Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 5. Die Abbildung ebener, in der Grundebene gelegener oder ihr paralleler Figuren.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

2 a) Erste Grundaufgabe. Die schiefe Parallelprojektion eines in der Grundebene gelegenen Punktes A für die Abbildungszahlen q und α (z. B. $\frac{1}{2}$ und 45°) zu bestimmen.

Wir fällen (Fig. 11) von A auf die Bildachse das Lot AA_x und ziehen unter einem Winkel von 45° zur Bildachse $A_x A' = \frac{1}{2} A_x A$. A' ist dann das gesuchte Bild von A.

Man findet demnach das Schrägbild eines beliebigen in der Grundebene gelegenen Punktes A, indem man auf die Bildachse das Lot AA_x fällt und diese Strecke für die gegebenen Abbildungszahlen abbildet. Der Endpunkt A' der Bildstrecke $A_x A'$ ist das gesuchte Bild des Punktes A.

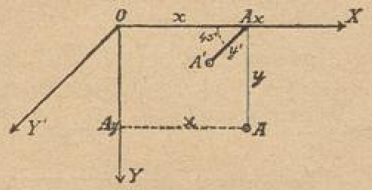

Fig. 11.

Die Abbildung mehrerer Punkte (Fig. 10), z. B. A, B und C, für dieselben Abbildungszahlen kann dadurch sehr vereinfacht werden, daß die Verbindungsstrecken von A, B und C mit ihren Bildern A', B' und C' AA', BB', CC' einander parallel sind (Grund?). Es braucht infolgedessen bei der Zeichnung nur für ein Achsenlot (AA_x) die Verkürzung bestimmt zu werden.

b) Statt unmittelbar durch seine Lage kann ein Punkt A auch durch seine senkrechten Abstände von einem rechtwinkligen Achsensystem (Koordinatensystem) gegeben sein (Fig. 11). Die Bildachse wählen wir als x-Achse und die in einem beliebigen Punkte O auf ihr in der Grundebene errichtete Senkrechte als y-Achse. $OA_x = x$ ist die Abszisse und $OA_y = A_x A = y$ die Ordinate des Punktes A, x und y sind seine Koordinaten.

Aufgabe. Bilde für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$ die Punkte ab, deren Koordinaten sind
$x = \pm 3$; $y = \pm 2{,}4$ (Längeneinheit 1 cm).

Wie bildet sich die y-Achse ab?

§ 5. Die Abbildung ebener, in der Grundebene gelegener oder ihr paralleler Figuren.

1) Aufgabe 1. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen Rechtecks ABCD, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen (Fig. 12). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Die Seiten AB und CD bilden sich in natürlicher Größe ab, und zwar fällt AB mit seinem Bilde zusammen. Dagegen erscheinen die zur Bildebene senkrechten Strek-

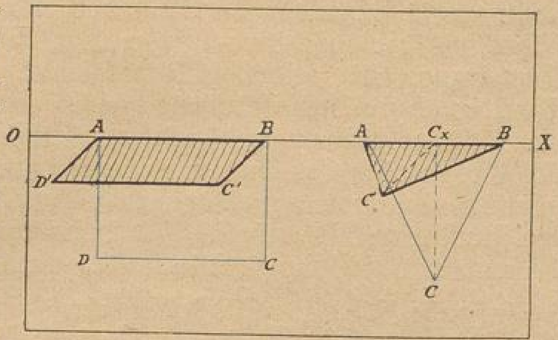

Fig. 12.

ken AD und BC im Bilde auf die Hälfte verkürzt und ihre Projektionen A′C′ und B′D′ bilden mit der Bildachse einen Winkel von 45°. Zeichnung!

Aufgabe 2. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen gleichschenkligen Dreiecks ABC, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Lösung s. Fig. 12.

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden regelmäßigen Sechsecks zu zeichnen, von dem ein Seitenpaar der Bildachse parallel ist (Fig. 13). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

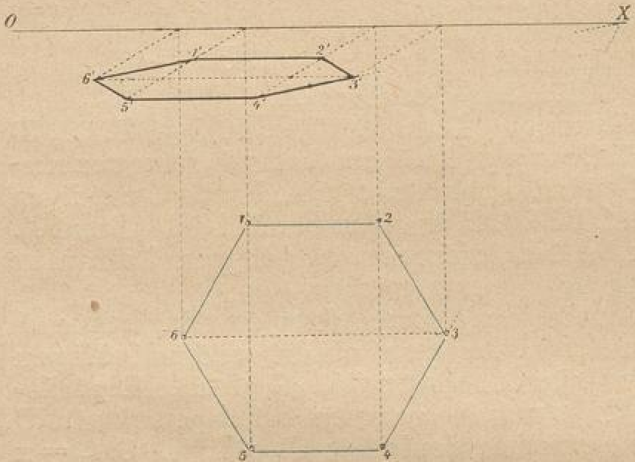

Fig. 13.

Wie bilden sich die frontalen Strecken $\overline{12}$, $\overline{54}$, $\overline{63}$ ab? Eine sehr scharfe Genauigkeitsprobe für die Zeichnung besteht darin, daß die Verlängerungen der Seiten der Urfigur und der ihrer zugehörigen Bilder (z. B. $\overline{43}$ und $\overline{4'3'}$) sich auf der Achse schneiden müssen. (Grund?) Vgl. § 20. 1b u. 2.)

Aufgabe 4. Das Schrägbild eines beliebig in der Grundebene gelegenen Fünfecks $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ zu zeichnen. Genauigkeitsprobe! (Vgl. Aufgabe 3.)

Aufgabe 5. Ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte durch ihre Koordinaten gegeben sind, abzubilden. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

A: $x = 3$, $y = 2$; B: $x = 7$, $y = 4$; C: $x = 5$, $y = 6$. Längeneinheit 1 cm.

2) Das **Bild einer Kurve,** die in der Grundebene gelegen ist, erhält man dadurch, daß man auf ihr eine hinreichend große Anzahl aufeinander folgender Punkte wählt, sie nach der Grundaufgabe abbildet und die aufeinander folgenden Bildpunkte durch einen stetigen Kurvenzug aus freier Hand verbindet. Eine übergroße Zahl von Punkten abzubilden, ist unzweckmäßig. Denn mit Hilfe unseres Auges, das für den schönen und stetigen Verlauf einer Kurve außerordentlich empfindlich ist, können nahe beieinander liegende Punkte meist genauer verbunden werden, als es durch Einschaltung neu bestimmter Zwischenpunkte möglich ist. Beim Ausziehen des Bildes in Tusche bedient man sich eines Kurvenlineals.

Aufgabe 6. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden Kreises mit dem gegebenen Radius r, dessen Mittelpunkt M auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Wir teilen den Durchmesser AB (Fig. 14), der mit seinem Bilde zusammenfällt, in eine Anzahl, etwa 8, gleiche Teile und ziehen in den Teilpunkten die zum Durchmesser senkrechten Sehnen. Ihre Endpunkte bilden wir in bekannter Weise ab und verbinden sie durch einen zusammenhängenden Kurvenzug. Das **Schrägbild des Kreises** heißt **Ellipse.** Sie ist die Schnittkurve des von sämtlichen Projektionsstrahlen gebildeten Zylindermantels mit der Bildebene, der diese oberhalb und unterhalb der Achse durchstößt. Erzeuge mit Drahtmodellen Schrägbilder von Kreisen! Beobachte die Schattenbilder von Rädern und die Sonnenbilder runder Öffnungen!

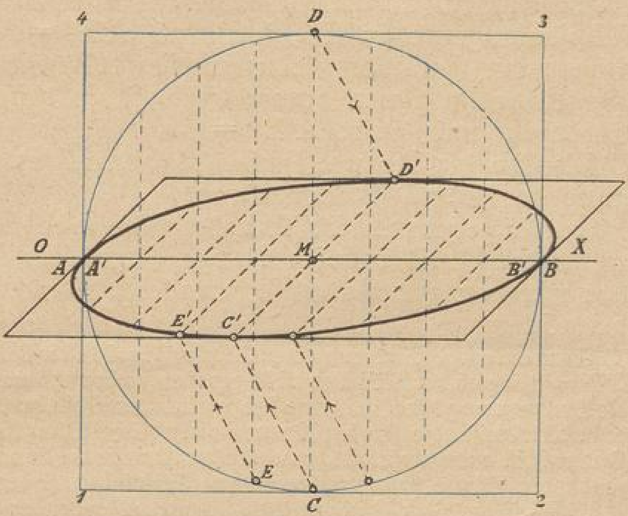

Fig. 14.

Für die Darstellung der Ellipse braucht nur der vor der Bildebene gelegene Halbkreis gezeichnet und abgebildet zu werden. Wie findet man daraus das Bild des hinter der Bildebene liegenden Halbkreises (s. § 3, S. III und IV)?

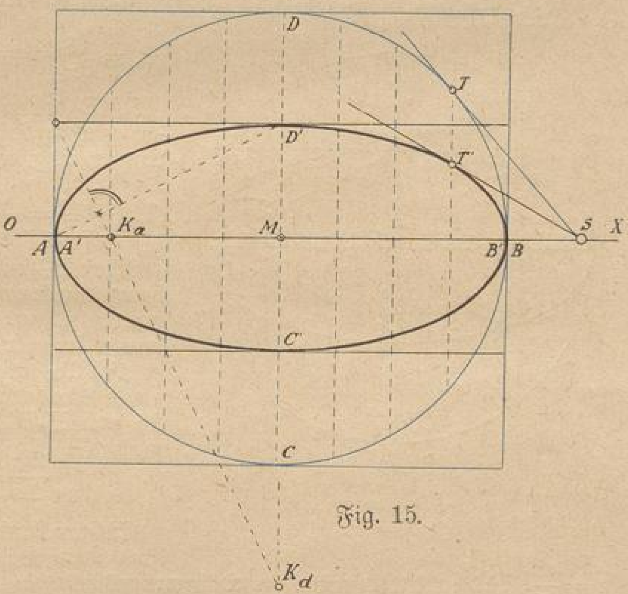

Fig. 15.

Um eine möglichst genaue Zeichnung der Ellipse zu erhalten, ist es nützlich, einige Tangenten in den Endpunkten der zueinander senkrechten Durchmesser AB und CD, die das Tangentenquadrat 1234 bilden, mit abzubilden. Das ist auch wichtig, um die *seitlich übergreifenden Bogenstücke* bei A und B, die sogenannten *Henkel*, in schöner und genauer Form zu gewinnen. Dazu ist jedoch namentlich die Abbildung einiger weiterer Punkte bei A und B erforderlich.

Nach der Bemerkung in § 4, 2a) sind die Verbindungslinien der Kreispunkte mit ihren Bildern parallel (z. B. CC' ∥ EE'). Dadurch wird das fortgesetzte umständliche Teilen überflüssig.

Aufgabe 7. Es soll der in Aufg. 6 bezeichnete Kreis für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 90°$ abgebildet und die Tangente im Punkte T′ der Ellipse bestimmt werden (Fig. 15).

Wo müssen sich die Tangente des Kreises in T und die zugehörige Ellipsentangente in T′ schneiden? $A'B' = AB$ und $C'D'$ sind die Bilder der senkrechten Durchmesser AB und CD des Kreises. Da die Kurve zu ihnen symmetrisch ist, so heißen sie die Achsen der Ellipse, und zwar $A'B' = 2a$ die große (Hauptachse) und $C'D' = 2b$ die kleine Achse (Nebenachse). Hinsichtlich der Zeichnung der Kurve s. Anmerkung.

Das angegebene Abbildungsverfahren des Kreises ändert sich nicht, wenn der Kreis beliebig in der Grundebene liegt (Grund?). Man hat nur den zur Bildachse parallelen Durchmesser als Bildachse zu betrachten.

Anmerkung. Sind von einer Ellipse (Fig. 16) die beiden Achsen ($A'B' = 2a$ und $C'D' = 2b$) und der Mittelpunkt M gegeben, so benutzt man beim Ausziehen mit Vorteil die Krümmungskreise in den Endpunkten der Achse, den sogenannten Scheitelpunkten, d. h. die Kreise, die sich der Kurve in den Scheitelpunkten am innigsten anschmiegen. Dadurch ist man imstande, von der punktweise bestimmten und mit Bleistift vorgezeichneten Ellipse Kurvenstücke in den Scheiteln mit der Zirkelreißfeder auszuziehen.

Es sei (Fig. 16) k ein durch den Scheitel A′ gehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf A′B′ liegt. Er schneide die Ellipse in den Punkten P′ und Q′, den Bildern der Punkte P und Q des um M mit a beschriebenen Kreises. Nach der Zeichnung der Ellipse ist dann

$$\text{(I)} \quad \frac{P'P_x}{PP_x} = q = \frac{D'M}{DM} = \frac{b}{a}.$$

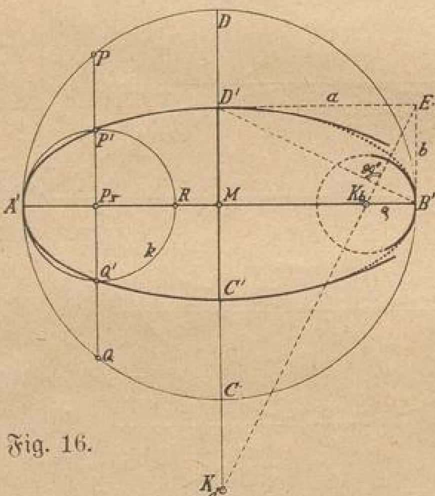

Fig. 16.

Ist R der zweite Schnittpunkt von K mit der großen Achse A′B′, so ergibt sich durch Anwendung des Sehnensatzes nach (I)

$$\text{(II)} \quad \frac{P_x R}{P_x B} = \frac{A'P_x \cdot P_x R}{A'P_x \cdot P_x B} = \frac{P_x P'^2}{P_x P^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Rückt P_x immer näher an den Scheitel A′ heran, so kommen auch die Punkte P′ und Q′ immer näher, und der Kreis k schmiegt sich immer inniger an die Ellipse in A′ an. Fällt endlich P_x mit A′ zusammen, so wird P_xR gleich dem doppelten „Krümmungsradius" 2ρ und P_xB' gleich $A'B' = 2a$. Mithin ist nach (II) $\frac{2\rho}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$ oder $\rho = \frac{b^2}{a}$.

Entsprechend findet man für den Radius der Krümmungskreise in C′ und D′ $r = \frac{a^2}{b}$. Die Mittelpunkte der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten B′ und D′ erhält man gleichzeitig durch folgende einfache Konstruktion: Man vervollständige das rechtwinklige Dreieck MB′D′ zu dem Rechteck MB′ED′ und fälle von E das Lot auf B′D′, das MB′ in K_b und die Verlängerung von D′C′ in K_a trifft. Es ist dann $K_bB' = \rho$ und $K_aD' = r$. Beweis!

3) Denkt man sich eine in der Grundebene gelegene Figur, z. B. ein Fünfeck, samt der Grundebene parallel zu sich verschoben, so erhalten wir nach § 3, S. II stets ein kongruentes und gleichliegendes Bild. Das ist wichtig für die Abbildung der Grund- und Deckflächen von Prismen und Zylindern.