Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 6. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Die zweite Grundaufgabe.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

§ 6. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Die zweite Grundaufgabe.

1 a) Um die Lage eines Punktes im Raume festzulegen, wählen wir (Fig. 17) auf der wagerechten Achse unserer lotrechten Bildebene $\mathfrak{B}$ einen beliebigen Punkt O und errichten in O auf der Bildachse sowohl in der Bildebene wie in der wagerechten Grundebene $\mathfrak{G}$ die Senkrechte. So erhalten wir drei zueinander senkrechte Achsen, die als x= oder Breitenachse, y= oder Tiefenachse, z= oder Höhenachse unterschieden werden. Ihr Schnittpunkt O heißt **Null-** oder **Anfangspunkt** des rechtwinkligen Achsenkreuzes. Die drei Achsen bestimmen drei zueinander senkrechte Ebenen, die **Koordinatenebenen.** Durch diese Ebenen wird der ganze Raum in acht Fächer, Raumachtel, geteilt (Modell eines Raumachtels!). Um eine einfache Anschauung zu gewinnen, denken wir uns die in einer Fußbodenecke eines Zimmers zusammenstoßenden Flächen endlos erweitert. Die Fußbodenebene entspricht unserer Grundebene $\mathfrak{G}$ oder der xy=Ebene, die lotrechten Wandflächen entsprechen unseren lotrechten Ebenen, und zwar ist die xz=Ebene unsere Bildebene (Frontebene) $\mathfrak{B}$, die yz=Ebene heißt Seitenebene, da ein auf der Grundebene vor $\mathfrak{B}$ stehender Beschauer sie zur Seite hat.

Ist ein Punkt P in einem Raumachtel gegeben, so fällen wir auf die Koordinatenebenen die Lote $PP_1 = z$, $PP_2 = y$ und $PP_3 = x$. Diese Abstände des Punktes P von den Koordinatenebenen heißen die **Koordinaten** von P. Durch sie ist die Lage des Punktes P bestimmt. Denn ziehen wir P_1P_x senkrecht zu OX, so ist $OP_x = x$ und $P_1P_x = y$ (vgl. auch § 63, 4). Indes ist die Lage von P nur dann völlig bestimmt, wenn außer den Koordinaten x, y und z (z. B. 4; 3; 5) noch das Raumachtel angegeben ist, in dem P liegt. Wieviel Punkte gibt es, die dieselben Koordinaten haben?

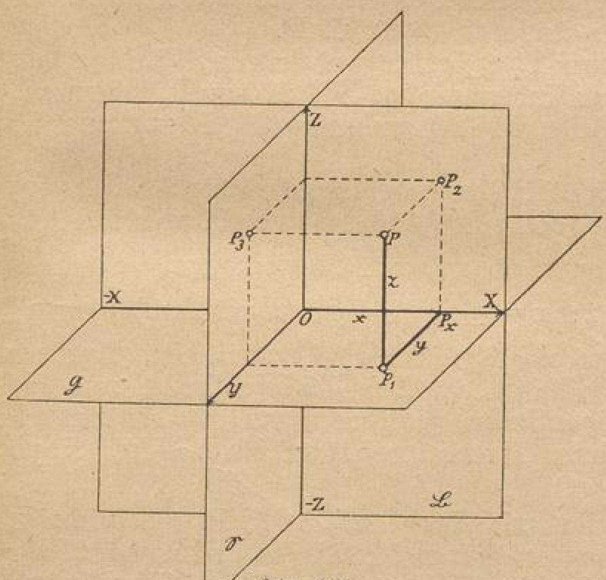

Fig. 17.

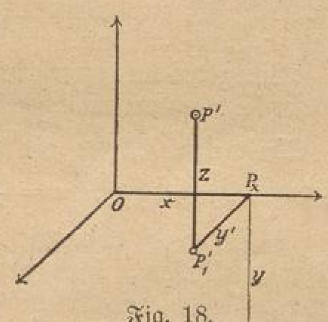

Fig. 18.

Um nun die Lage eines Punktes P lediglich durch die Angabe seiner Koordinaten zu bestimmen, wählen wir auf der x-Achse die Richtung OX, auf der y-Achse die Richtung OY und auf der z-Achse die nach oben gehende Richtung als die positive. Die entgegengesetzten Richtungen sind dann negativ. Wir gelangen dann zu dem Punkte P mit den Koordinaten $x = +2$, $y = +3$, $z = +2{,}5$ (Längeneinheit 1 cm), indem wir von O auf der x-Achse 2 cm in positiver Richtung bis P_x, dann parallel der positiven Richtung der y-Achse 3 cm bis P_1 und endlich parallel der positiven Richtung der z-Achse 2,5 cm bis P gehen, also dem Streckenzuge $OP_x P_1 P$ folgen. Die Lage des Punktes P ist eindeutig bestimmt. Wie gelangen wir zum Punkte Q mit den Koordinaten $x = -2$, $y = +3$, $z = -2{,}5$?

b) Für uns kommt im folgenden besonders der Fall in Betracht, daß der Punkt P durch seine senkrechte Projektion P_1 auf die Grundebene, den **Grundriß** von P (welche Koordinaten sind dadurch gegeben?) und durch seinen Abstand z von der Grundebene, der positiv oder negativ sein kann, gegeben ist.

Der Einfachheit halber stellen wir die abzubildenden Körper zumeist in das erste Raumachtel, für das die Achsenrichtungen sämtlich positiv sind.

2a) **Zweite Grundaufgabe. Das Schrägbild eines beliebigen Raumpunktes P zu bestimmen.**

Wir erhalten das Bild des Punktes P (Fig. 17 und 18), der durch seine Koordinaten x, y und z gegeben ist, indem wir das Bild des Streckenzuges $OP_x P_1 P$ bestimmen. P_1P bildet sich dabei in natürlicher Größe parallel der z-Achse ab (§ 3, S. I).

Ist P durch seinen Grundriß P_1 (Fig. 18) und seinen Abstand z von der Grundebene gegeben, so finden wir das Bild P′ von P, indem wir zunächst P_1 in bekannter Weise abbilden und dann $P_1' P' = z$ parallel zur z-Achse ziehen.

Wie gewinnt man aus der Abbildung des Punktes die Abbildung von Strecken und daraus die von Flächen und Körpern?

Aufgabe. Bilde die Punkte ab mit den Koordinaten

$$x = \pm 3;\; y = \pm 2;\; z = \pm 4 \text{ (Längeneinheit 1 cm).}$$

b) Nennen wir die zur x-Achse (Bildachse) parallelen Geraden **Breitenlinien**, die zur y-Achse parallelen **Tiefenlinien** und die zur z-Achse parallelen **Höhenlinien**, so können wir für die Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion die einfache Regel aufstellen:

Breiten- und Höhenlinien erscheinen auch im Bild als solche in natürlicher Größe, dagegen erscheinen die Tiefenlinien nach Maßgabe der Abbildungszahlen verkürzt und um ihren Schnittpunkt mit der Bildachse gedreht.

§ 7. Abbildung von Körpern und Körperschnitten.

1a) **Aufgabe 1.** Das Schrägbild eines auf der Grundebene ruhenden Würfels (Kantenlänge a = 4 cm), dessen Grundkante CD