Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 82. Genäherte Richtungs-Gewichte

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

(Fortsetzung von S. 279.)

Da das System (14) keine eindeutige Lösung giebt, muss eine Willkür eintreten; man nimmt möglichst bequem:

$$X + A' + B' + C' = 0 \tag{15}$$

addiert diese Gleichung zu jeder einzelnen von (14) und erhält damit:

$$\left.\begin{array}{l} 4X \;\ldots\;\ldots\;\ldots + (a\,l) + (b\,l) + (c\,l) = 0 \\ \quad 4A' \;\ldots\;\ldots - (a\,l) \qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad 4B' \;\ldots - (b\,l) \qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad 4C' + (c\,l) \qquad\qquad\quad = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Damit bekommt man 4 Werte X, A', B', C', deren Differenzen $A' - X$, $B' - X$, $C' - X$ nichts anderes sind als die $A\;B\;C$ aus (12), was sich am einfachsten dadurch beweist, dass man in (12) die Summe der 3 Gleichungen zu jeder einzeln addiert und dann bequem nach $A\;B\;C$ auflöst.

Dem System (16) entspricht das folgende Gewichtsgleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 4(\alpha\,\alpha) \;\ldots\;\ldots\;\ldots = 0 \\ \quad 4(\alpha\,\beta) \;\ldots\;\ldots = 0 \\ \qquad 4(\alpha\,\gamma) \;\ldots = 0 \\ \qquad\quad 4(\alpha\,\delta) = 0 \end{array}$$

woraus

$$(\alpha\,\alpha) = \frac{1}{4}$$

$$(\alpha\,\beta) = 0 \qquad (\alpha\,\gamma) = 0 \qquad (\alpha\,\delta) = 0$$

oder allgemein für eine Station mit s Strahlen:

$$(\alpha\,\alpha) = (\beta\,\beta) = (\gamma\,\gamma) = \ldots = \frac{1}{s}$$

$$(\alpha\,\beta) = (\alpha\,\gamma) = (\beta\,\gamma) = \ldots = 0$$

Damit haben wir die Hauptteile der Theorie von § 77. auf einem zweiten Wege gefunden.

§ 82. Genäherte Richtungsgewichte.

Die Zusammenfassung und Ausgleichung von Stationsmessungen ist in Form von Richtungen mit Richtungsgewichten nach dem bisherigen möglich in 3 Fällen:

1) bei lauter vollen Richtungssätzen (§ 75.),
2) in dem Falle *dreier* Richtungen (§ 76.),
3) bei Winkelmessungen in allen Combinationen (§ 77.)

In diesen Fällen kann die Gesamtheit aller auf einer Station gemachten Theodolitmessungen für Netzausgleichungszwecke vollkommen ersetzt werden durch *einen* Satz von Richtungsmessungen, dessen Richtungen gewisse angebbare (bei 1) und 3) gleiche) Einzelgewichte zukommen, so dass darauf eine Ausgleichung nach § 40. gegründet werden kann.

In fast allen anderen Fällen von Stationsmessungen kann das Ergebnis der Stationsausgleichung nur als ein Satz von Winkeln oder Richtungen in Verbindung mit einer Gruppe von *Gewichtsgleichungen* weiter zur Netzausgleichung benützt werden, und diese Gewichtsgleichungen (XV. S. 159) mit ihren Gewichtscoefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]\ldots$ sind es hauptsächlich, welche eine derartige Netzausgleichung ungemein schwerfällig und mühsam machen, wie schon an unserem kleinen Schulbeispiel von § 72. gesehen werden kann.

Aber auch abgesehen von dieser Rechenmühe hat diese Bessel sche Netzausgleichung mit Gewichtsgleichungen sich stets mit einem noch wichtigeren Übelstande behaftet gezeigt, indem der mittlere Fehler der *Netz*ausgleichung (m_2 oder μ_2 unten auf S. 159) erheblich grösser gefunden wurde als der mittlere *Stations*fehler (m_1 oder μ_1 auf S. 157), was auf Fehlerursachen hindeutet, welche auf den Stationen verborgen bleiben und erst im Netze zu Tage treten.

Alle diese Umstände haben schon lange den Wunsch der Geodäten erzeugt, Netzausgleichungen für beliebige Stationsmessungen ohne Gewichtsgleichungen, mit näherungsweise anzunehmenden Einzelgewichten der Richtungen durchzuführen. So wurde schon etwa 1850 die grosse britische Triangulierung (Ordnance trigonometrical survey) nach Einzelgewichten ausgeglichen, wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungsmessungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen als Genauigkeitsmass diente. Damals vor 1858 war die Theorie der Netzausgleichungen überhaupt noch nicht völlig klar vorhanden, und jedenfalls den britischen Geodäten noch nicht verfügbar; jenes Verfahren war das Ergebnis einer gesunden Empirie.

Später, etwa um 1870 haben wir ein ähnliches Verfahren bei der Neuausgleichung der alten Bayerischen Triangulierung durch *v. Orff*, welcher schlechtweg die „Anschnittszahlen“ als Richtungsgewichte nahm, wie wir beispielshalber in § 76. S. 258 gezeigt haben.

Einen wesentlichen Fortschritt hat die Bestimmung genäherter Richtungsgewichte gemacht in einer Theorie von *Helmert*, welche enthalten ist in der „Veröffentlichung des Königlich preussischen Geodätischen Instituts und Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Die Europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft, Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen“, Berlin 1893, S. 37—42, und in einer Abhandlung in „Astr. Nachrichten“, 134. Band, 1893, S. 281—296 „Über eine Vereinfachung bei der Einführung von Stationsergebnissen in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes.“ (Bericht hierüber Z. f. V. 1894, S. 212—222).

Indem wir diese Theorie hier mitteilen, wollen wir auch die Helmert schen Bezeichnungen wegen des Anschlusses an die citierten Originalschriften, hier beibehalten, und müssen dazu zuerst bemerken, dass nun mit q eine Gewichts-*Reciproke* bezeichnet werden soll im Gegensatz zu unserem vorhergehenden § 76. u. s. w., wo q das Gewicht selbst einer ausgeglichenen Richtung war.

Auch seien die Gewichts-Coefficienten, welche in unserem früheren § 28. teils mit Q_1, Q_2, Q_3, teils mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ u. s. w. bezeichnet waren, nun in erster Linie mit Q_{22}, Q_{23}, Q_{24} u. s. w. bezeichnet.

Wenn eine Stationsausgleichung nach § 71. vorliegt mit zwei Winkeln x' und x'' als unabhängigen Unbekannten, so findet man die Gewichte von x' und x'' bei der Ausgleichung bzw. $p' = \frac{1}{[\alpha\alpha]}$ und $p'' = \frac{1}{[\beta\beta]}$, wobei $[\alpha\alpha]$ und $[\beta\beta]$ die Gewichts-Coefficienten nach § 28. und § 29. sind. Auch das Gewicht P der Differenz $x'' - x'$, d. h. des Winkels zwischen den zwei Strahlen P' und P'' von Fig. 1. S. 232 lässt sich angeben, denn es ist $x'' - x'$ eine lineare Funktion der unabhängigen x' und x'', nämlich nach (1) S. 92.:

$$x'' - x' = F = f_1 x' + f_2 x'' + f_3 x'''$$

wobei
$$f_1 = -1 \quad , \quad f_2 = +1 \quad , \quad f_3 = 0$$

folglich nach (3) S. 92:
$$\frac{1}{P} = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\beta] + [\beta\,\beta]$$

Eine solche Formel gilt für jeden nach der Ausgleichung erhaltenen Winkel, und wenn wir nach dem vorhergehenden Citate die Gewichtscoefficienten anders bezeichnen, nämlich $[\alpha\,\alpha] = Q_{22}$, $[\alpha\,\beta] = Q_{23}$, $[\beta\,\beta] = Q_{33}$, und die Winkel selbst $x' = (1,2)$, $x'' = (1,3)$, also $x'' - x' = (2,3)$, so wird die Gewichtsreciproke des Winkels (2,3) ausgedrückt durch
$$q_{23} = Q_{22} - 2\,Q_{23} + Q_{33}$$

Nach diesen Festsetzungen über die Wahl der Bezeichnungen betrachten wir zunächst den Fall einer Stationsausgleichung mit 4 Strahlen.

Zwischen diesen 4 Strahlen 1, 2, 3, 4 bestehen 6 Winkel, welche nach der Ausgleichung folgende Gewichte haben sollen:
$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Winkel } (1,2) & \text{mit Gewicht} = 1 : Q_{22} & & = 1 : q_{12} \\
\text{"} \quad (1,3) & \text{"} \quad \text{"} \quad 1 : Q_{33} & & = 1 : q_{13} \\
\text{"} \quad (1,4) & \text{"} \quad \text{"} \quad 1 : Q_{44} & & = 1 : q_{14} \\
\text{"} \quad (2,3) & \text{"} \quad \text{"} \quad 1 : (Q_{22} + Q_{33} - 2\,Q_{23}) & & = 1 : q_{23} \\
\text{"} \quad (2,4) & \text{"} \quad \text{"} \quad 1 : (Q_{22} + Q_{44} - 2\,Q_{24}) & & = 1 : q_{24} \\
\text{"} \quad (3,4) & \text{"} \quad \text{"} \quad 1 : (Q_{33} + Q_{44} - 2\,Q_{34}) & & = 1 : q_{34}
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Nun soll *ein* Satz von Richtungsmessungen mit Einzelgewichten der einzelnen Strahlen an die Stelle des Ausgleichungsergebnisses gesetzt werden; sind die Reciproken der Einzelgewichte der 4 Strahlen bzw. q_1, q_2, q_3, q_4, so müssen die Gleichungen bestehen:
$$\left.\begin{array}{lll}
q_{12} = q_1 + q_2 & q_{13} = q_1 + q_3 & q_{14} = q_1 + q_4 \\
 & q_{23} = q_2 + q_3 & q_{24} = q_2 + q_4 \\
 & & q_{34} = q_3 + q_4
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Wenn nur *drei* Strahlen vorhanden wären, so würden auch nur 3 von diesen Gleichungen vorhanden sein, nämlich:
$$\left.\begin{array}{ll}
q_{12} = q_1 + q_2 & q_{13} = q_1 + q_3 \\
 & q_{23} = q_2 + q_3
\end{array}\right\} \quad (3)$$

und daraus lassen sich die 3 Unbekannten q_1, q_2, q_3 geradezu bestimmen, nämlich:
$$\left.\begin{array}{l}
q_1 = \dfrac{q_{12} + q_{13} - q_{23}}{2} \\[2ex]
q_2 = \dfrac{q_{12} - q_{13} + q_{23}}{2} \\[2ex]
q_3 = \dfrac{-\,q_{12} + q_{13} + q_{23}}{2}
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Wenn man nach (1) hier einführt:
$$q_{12} = Q_{22} \quad , \quad q_{13} = Q_{33} \quad , \quad q_{23} = Q_{22} + Q_{33} - 2\,Q_{23},$$
so erhält man aus (4) die Gewichtsreciproken (ebenso wie (19) S. 258):
$$q_1 = Q_{23} \quad , \quad q_2 = Q_{22} - Q_{23} \quad , \quad q_3 = Q_{33} - Q_{23} \qquad (5)$$

Durch diese Gleichungen (3)—(5) haben wir in neuer Form nochmals dasselbe gefunden, was als Spezialfall schon in § 76. behandelt worden ist, nämlich dass in dem besonderen Falle *dreier* Strahlen die Stationsausgleichung sich stets in der Form von Richtungen mit Einzelgewichten $\frac{1}{q}$ der ausgeglichenen Richtungen erledigen lässt.

Nun kehren wir zu dem Falle von 4 Strahlen mit den Gleichungen (1) und (2) zurück.

Da man hier 6 Gleichungen in der Gruppe (2) und nur 4 Unbekannte q_1, q_2, q_3, q_4 hat, ist eine völlige Lösung nicht möglich, es sollen daher die 4 Werte q so bestimmt werden, dass sie den Gleichungen (2) möglichst (nach der M. d. kl. Q.) genügen. Betrachtet man die obenstehenden 6 Gleichungen (2) als Fehlergleichungen, so geben sie folgende 4 Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\underline{3\,q_1} + q_2 + q_3 + q_4 - s_1 = 0 & \text{wo } s_1 = q_{12} + q_{13} + q_{14} \\
q_1 + \underline{3\,q_2} + q_3 + q_4 - s_2 = 0 & \phantom{\text{wo }} s_2 = q_{12} + q_{23} + q_{24} \\
q_1 + q_2 + \underline{3\,q_3} + q_4 - s_3 = 0 & \phantom{\text{wo }} s_3 = q_{13} + q_{23} + q_{34} \\
q_1 + q_2 + q_3 + \underline{3\,q_4} - s_4 = 0 & \phantom{\text{wo }} \underline{s_4 = q_{14} + q_{24} + q_{34}} \\
 & S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Die Auflösung dieser 4 Gleichungen giebt:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Gewichts-Reciproke } q_1 = \dfrac{s_1}{2} - \dfrac{S}{12} & & \\
\quad " \quad " \quad q_2 = \dfrac{s_2}{2} - \dfrac{S}{12} & \text{mit der Summe} & \\
\quad " \quad " \quad q_3 = \dfrac{s_3}{2} - \dfrac{S}{12} & q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = \dfrac{S}{6} & \\
\quad " \quad " \quad q_4 = \dfrac{s_4}{2} - \dfrac{S}{12} & &
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Dieses (6) und (7) gilt für den besonderen Fall mit 4 Strahlen; im allgemeinen Falle mit n Strahlen ist eine ganz analoge allgemeinere Behandlung zu machen, wobei die Normalgleichungen statt (6) folgende werden:

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{(n-1)\,q_1} + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - s_1 = 0 \\
q_1 + \underline{(n-1)\,q_2} + q_3 + \cdots + q_n - s_2 = 0 \\
q_1 + q_2 + \underline{(n-1)\,q_3} + \cdots + q_n - s_3 = 0 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
q_1 + q_2 + q_3 + \cdots \underline{(n-1)\,q_n} - s_n = 0
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Absolutglieder s haben hier folgende Bedeutungen:

$$\left(\begin{array}{l}\text{dabei ist } q_{12} = q_{21} \\ q_{13} = q_{31} \text{ u. s. w.}\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l}
q_{12} + q_{13} + q_{14} + \cdots q_{1n} = s_1 \\
q_{21} + q_{23} + q_{24} + \cdots q_{2n} = s_2 \\
q_{31} + q_{32} + q_{34} + \cdots q_{3n} = s_3 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\underline{q_{n1} + q_{n2} + q_{n3} + \cdots q_{(n-1)n} = s_n} \\
s_1 + s_2 + s_3 + \cdots s_n = S
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Zur Probe hat man direkt aus den Q:

$$S = 2\,(n-1)\,(Q_{22} + Q_{33} + Q_{44} + \ldots Q_{nn}) - 4\,(Q_{23} + Q_{24} + \ldots + Q_{34} + \ldots Q_{(n-1)n}) \quad (10)$$

Die allgemeine Formel zur Berechnung eines q ist:

$$\left.\begin{array}{l}
q_1 = \dfrac{s_1}{n-2} - \dfrac{S}{2\,(n-1)\,(n-2)} \\
q_2 = \dfrac{s_2}{n-2} - \dfrac{S}{2\,(n-1)\,(n-2)} \quad \text{u. s. w.,} \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{array}\right\} \quad (11)$$

wobei noch die Summenprobe besteht:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots q_n = \frac{S}{2(n-1)} \tag{12}$$

Geht man auf die Bedeutung von s und S als Funktionen der Q zurück, so findet man die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{2(Q_{23} + Q_{24} + \ldots)}{(n-1)(n-2)} \\ q_2 &= q_1 + Q_{22} - \frac{2(Q_{23} + Q_{24} + Q_{25} + \ldots Q_{2n})}{n-2} \\ q_3 &= q_1 + Q_{33} - \frac{2(Q_{32} + Q_{34} + Q_{35} + \ldots Q_{3n})}{n-2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

u. s. w., wobei in den Summen nur nichtquadratische Indices zu beachten sind, also nur z. B. Q_{32}, $Q_{34} \ldots$ nicht aber Q_{33}, u. s. w.

Wir betrachten bei n Strahlen die $(n-1)$ Winkel, welche irgend ein Strahl mit den übrigen Strahlen bildet, z. B. den Strahl 1 in Verbindung mit den Strahlen 2, 3, 4 ..., dann kann man die Fehlerquadratsumme für solche $n-1$ Winkel doppelt ausdrücken, sowohl in den q_{12}, $q_{13} \ldots$ als auch in den q_1, q_2, $q_3 \ldots$, nämlich wegen (9):

$$q_{12} + q_{13} + q_{14} + \ldots = s_1$$

oder zweitens wegen der Normalgleichung (8):

$$(q_1 + q_2) + (q_1 + q_3) + (q_1 + q_4) + \ldots = (n-1)\, q_1 + q_2 + q_3 + \ldots = s_1 \tag{14}$$

Diese beiden Summen sind also *gleich*, was sehr zu Gunsten der Näherungen q_1, q_2, q_3, q_4 spricht, während es nicht günstig ist, dass die Abweichungen zwischen q_{12} und $q_1 + q_2$ u. s. w. in der Ausgleichung alle als *gleich* zulässig behandelt wurden. Den besonderen Fall nur *dreier* Strahlen haben wir bereits bei (3)—(5) als Zwischenbemerkung abgehandelt, und wir haben in (5) gesehen, dass man die Reciproken q der Richtungsgewichte schlechthin in den Gewichtscoefficienten ausdrücken kann; indessen kann man in diesem einfachen Falle auch alles in den Normalgleichungs-Coefficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$, $[b\,b]$ selbst ausdrücken, denn nach (18) und (19) S. 58 ist:

$$[\alpha\,\alpha] = Q_{22} = \frac{[b\,b]}{D}\ ,\quad [\alpha\,\beta] = Q_{23} = \frac{-[a\,b]}{D}\ ,\quad [\beta\,\beta] = Q_{33} = \frac{[a\,a]}{D} \tag{15}$$

wo

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]$$

daraus findet man in Verbindung mit (5):

$$q_1 = \frac{-[a\,b]}{D}\ ,\quad q_2 = \frac{[b\,b] + [a\,b]}{D}\ ,\quad q_3 = \frac{[a\,a] + [a\,b]}{D} \tag{16}$$

dieses (15) gilt dann, wenn die Stationsausgleichung mit 2 *Winkeln* als Unbekannten gemacht ist; wenn dagegen 3 *Richtungen* als Unbekannte eingeführt sind, so werden die Normalgleichungen folgende Formen annehmen:

$$\left.\begin{aligned} (a\,a)\,A + (a\,b)\,B + (a\,c)\,C + (a\,l) &= 0 \\ (a\,b)\,A + (b\,b)\,B + (b\,c)\,C + (b\,l) &= 0 \\ (a\,c)\,A + (b\,c)\,B + (c\,c)\,C + (c\,l) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Da A, B, C *Richtungen* (und nicht zwei Winkel) sind, können diese 3 Gleichungen nicht unabhängig sein, sondern nach (3) § 81. S. 277 bestehen die Beziehungen:

$$(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) = 0\ ,\ (a\,b) + (b\,b) + (b\,c) = 0\ ,\ (a\,c) + (b\,c) + (c\,c) = 0 \tag{18}$$

und *eine* der 3 Unbekannten ist willkürlich, weshalb etwa $A = 0$ gesetzt wird und dann bleibt von (17) nur:

$$\left.\begin{aligned}(b\,b)\,B + (b\,c)\,C + (b\,l) = 0\\ (b\,c)\,B + (c\,c)\,C + (c\,l) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Bei *zwei* Gleichungen kann man aber wieder die Gewichtscoefficienten Q unmittelbar in den Coefficienten $(b\,b)$ $(b\,c)$ ausdrücken, nämlich ebenso wie bei (15):

$$\left.\begin{aligned}Q_{22} = \frac{(c\,c)}{(b\,b)\,(c\,c) - (b\,c)\,(b\,c)}\ , \quad Q_{33} = \frac{(b\,b)}{(b\,b)\,(c\,c) - (b\,c)\,(b\,c)}\\ Q_{23} = \frac{-\,(b\,c)}{(b\,b)\,(c\,c) - (b\,c)\,(b\,c)}\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Wegen (18) lässt sich (20) mit (5) auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{q_1} &= (a\,a) - \frac{(a\,b)\,(a\,c)}{(b\,c)}\\ \frac{1}{q_2} &= (b\,b) - \frac{(a\,b)\,(b\,c)}{(a\,c)}\\ \frac{1}{q_3} &= (c\,c) - \frac{(a\,c)\,(b\,c)}{(a\,b)}\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

In den allgemeinen Formeln muss auch der Fall inbegriffen sein, dass zwischen n Strahlen alle $n\dfrac{n-1}{2}$ Winkel gleichgewichtig gemessen sind. Setzt man dabei das Gewicht eines gemessenen Winkels $= 1$, so werden nach § 77. S. 265 nach der Ausgleichung alle Winkelgewichte $= \dfrac{n}{2}$, also die Reciproken der Gewichte werden:

$$q_{12} = q_{13} = q_{14} = \cdots q_{1\,(n-1)} = \frac{2}{n}$$

dann nach (9):

$$q_{12} + q_{13} + q_{14} + \cdots + q_{1\,(n-1)} = \frac{2\,(n-1)}{n} = s_1$$

Ebenso auch s_2 , $s_3 \ldots s_n$ und also $S = n\,s_1 = 2\,(n-1)$

Also nun nach (11):

$$q_1 = \frac{2\,(n-1)}{n\,(n-2)} - \frac{2\,(n-1)}{2\,(n-1)\,(n-2)} = \frac{1}{n}$$

d. h. das Gewicht einer ausgeglichenen Richtung ist $= n$, als Ergebnis des Näherungsverfahrens, was mit dem strengen Verfahren stimmt.

Hat man endlich m volle Sätze bei n Strahlen, so sind nach der Mittelbildung alle Richtungsgewichte $= m$ oder die Reciproken der Winkelgewichte:

$$q_{12} = q_{13} = \ldots \qquad = \frac{2}{m}$$

also

$$s_1 = s_2 = \ldots \qquad = \frac{2\,(n-1)}{m}\ , \quad S = \frac{2\,n\,(n-1)}{m}$$

$$q_1 = \frac{2\,(n-1)}{(n-2)\,m} - \frac{2\,n\,(n-1)}{2\,m\,(n-1)\,(n-2)} = \frac{1}{m}$$

also wieder Übereinstimmung mit der strengen Theorie.

Das Helmert sche Näherungsverfahren befolgt also in den betrachteten 3 Fällen, in welchen strenge Richtungsgewichte möglich sind, die strenge Theorie und schliesst sich im übrigen näherungsweise an.

Um ein vollständiges Beispiel zu haben, nehmen wir eine Stationsausgleichung, welche an anderem Orte (Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen I. S. 66) völlig durchgerechnet wurde, nach Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, I. Teil, 2. Auflage. Berlin 1870, S. 57.

Station Lautern:

Sternberg	Paulinen	Schippenbeil	Rössel	
$p_1{}^\circ = 18$	$p_1' = 18$	$p_1'' = 18$	$p_1''' = 18$	$[p_1] = 72$
$p_2{}^\circ = 6$	. .	. .	$p_2''' = 6$	$[p_2] = 12$
. .	$p_3' = 6$	$p_3'' = 6$	$p_3''' = 6$	$[p_3] = 18$
$[p^\circ] = 24$	$[p'] = 24$	$[p''] = 24$	$[p'''] = 30$	$[p] = 102$

Nach (11) § 71. S. 236 berechnet man:

$$(a\,a) = 24 - \frac{18}{72}\,18 - \ldots - \frac{6}{18}\,6 = \quad 17{,}50$$

$$(a\,b) = \quad -\frac{18}{72}\,18 \quad \ldots - \frac{6}{18}\,6 = -\ 6{,}50 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Stationsausgleichung selbst interessiert uns hier nicht, sondern nur die Gewichtsbestimmungen; wir bilden daher sofort die Gewichtsgleichungen nach (20) S. 90:

Auflösung

$$\begin{array}{ll} +\underline{17{,}50\,[\alpha\,\alpha]} - 6{,}50\,[\alpha\,\beta] - 6{,}50\,[\alpha\,\gamma] - 1 = 0 & [\alpha\,\alpha] = 0{,}094 \\ -\ 6{,}50\,[\alpha\,\alpha] + \underline{17{,}50\,[\alpha\,\beta]} - 6{,}50\,[\alpha\,\gamma] = 0 & [\alpha\,\beta] = 0{,}052 \\ -\ 6{,}50\,[\alpha\,\alpha] - 6{,}50\,[\alpha\,\beta] + \underline{20{,}50\,[\alpha\,\gamma]} = 0 & [\alpha\,\gamma] = 0{,}046 \end{array}$$

Die beiden anderen Gruppen von Gewichtsgleichungen geben auch noch:

$$[\beta\,\beta] = 0{,}093 \quad , \quad [\beta\,\gamma] = 0{,}046 \quad , \quad [\gamma\,\gamma] = 0{,}078$$

Wenn wir nun die Bezeichnungen Q nach (1) anwenden, haben wir:

$$\begin{array}{ll} Q_{22} = [\alpha\,\alpha] = +\,0{,}094 = q_{12} & Q_{23} = 0{,}052 \\ Q_{33} = [\beta\,\beta] = +\,0{,}093 = q_{13} & Q_{24} = 0{,}046 \\ Q_{44} = [\gamma\,\gamma] = +\,0{,}078 = q_{14} & Q_{34} = 0{,}046 \end{array} \Bigg\}\ 0{,}144$$

$$Q_{22} + Q_{33} - 2\,Q_{23} = 0{,}094 + 0{,}093 - 0{,}104 = +\,0{,}083 = q_{23}$$
$$Q_{22} + Q_{44} - 2\,Q_{24} = 0{,}094 + 0{,}078 - 0{,}092 = +\,0{,}080 = q_{24}$$
$$Q_{33} + Q_{44} - 2\,Q_{34} = 0{,}093 + 0{,}078 - 0{,}092 = +\,0{,}079 = q_{34}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_{12} + q_{13} + q_{14} = s_1 = 0{,}265 \\ q_{12} + q_{23} + q_{24} = s_2 = 0{,}257 \\ q_{13} + q_{23} + q_{34} = s_3 = 0{,}255 \\ q_{14} + q_{24} + q_{34} = s_4 = 0{,}237 \end{array}\right\}\ S = 1{,}014 \ ,\ \frac{S}{12} = 0{,}0845$$

Dann nach (7):

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = 0{,}1325 - 0{,}0845 = 0{,}0480 \\ q_2 = 0{,}1285 - 0{,}0845 = 0{,}0440 \\ q_3 = 0{,}1275 - 0{,}0845 = 0{,}0430 \\ q_4 = 0{,}1185 - 0{,}0845 = 0{,}0340 \end{array}\right\}\ 0{,}1690 = \frac{S}{6}\ \text{(Probe)}$$

Um auch noch die Formeln (13) anzuwenden, haben wir mit $n = 4$:

$$q_1 = \frac{0,144}{3} = 0,048$$
$$q_2 = 0,048 + 0,094 - 0,098 = 0,044$$
$$q_3 = 0,048 + 0,093 - 0,098 = 0,043$$
$$q_4 = 0,048 + 0,078 - 0,092 = 0,034$$

Damit haben wir alle q und deren Reciproken, d. h. die Richtungsgewichte $\frac{1}{q}$ berechnet, und sogar mit Proben.

Nun handelt es sich noch darum, zu sehen, wie genau die Näherungsgewichte mit den strengen Gewichten oder die Näherungs-Gewichts-Reciproken mit den strengen Gewichtsreciproken aller Winkel übereinstimmen. Z. B. der erste Winkel Sternberg-Paulinen hat die strenge Gewichtsreciproke $q_{12} = 0,094$ und genähert $q_1 + q_2 = 0,092$ was sehr nahe stimmt.

Für alle 6 Winkel ergiebt sich folgende Vergleichung:

streng	genähert	Abweichung	
$q_{12} = 0,094$	$q_1 + q_2 = 0,092$	$-0,002$	
$q_{13} = 0,093$	$q_1 + q_3 = 0,091$	$-0,001$	durchschnittliche
$q_{14} = 0,078$	$q_1 + q_4 = 0,082$	$+0,004$	Abweichung
$q_{23} = 0,083$	$q_2 + q_3 = 0,087$	$+0,004$	$= 0,0025$
$q_{24} = 0,080$	$q_2 + q_4 = 0,078$	$-0,002$	oder 3 %
$q_{34} = 0,079$	$q_3 + q_4 = 0,077$	$-0,002$	

Dieses sind die Gewichts-Reciproken; wir wollen auch noch die Gewichte selbst ausrechnen und mit den Anschnittszahlen vergleichen:

	Gewicht	Anschnittszahl	Abweichung
$q_1 = 0,048$	$1 : q_1 = 20,8$	$[p^\circ] = 24$	$+3,2$
$q_2 = 0,044$	$1 : q_2 = 22,7$	$[p'] = 24$	$+1,3$
$q_3 = 0,043$	$1 : q_3 = 23,3$	$[p''] = 24$	$+0,7$
$q_4 = 0,034$	$1 : q_4 = 29,4$	$[p'''] = 30$	$+0,6$
			Durchschnitt 1,45 oder 6 %.

Die Anschnittszahlen weichen von den Näherungsgewichten im Mittel nur um 6 % ab, es könnten daher die Anschnittszahlen in diesem Falle wohl auch noch als Näherungsgewichte benützt werden, indessen ist unser Fall ein sehr einfacher; im allgemeinen werden die Anschnittszahlen grössere Abweichungen von den theoretischen Gewichten geben.

Ein grösseres Beispiel zur Vergleichung zwischen den strengen und den genäherten Winkelgewichten, sowie zwischen den genäherten Richtungsgewichten und den Anschnittszahlen giebt die bereits citierte Helmert sche Abhandlung in „Astr. Nachr., 134. Band, 1893“, S. 287; es ist eine spanische Station mit 12 Richtungen; die strengen q_{12}, q_{13} ... weichen von den genäherten $q_1 + q_2$, $q_1 + q_3$ ... ab im Mittel um 11 %, äusserstenfalls um 30 %. Zwischen den q und den Reciproken der Anschnittszahlen besteht eine durchschnittliche Abweichung von 31 %.

Ebendaselbst S. 289 wird auch über die Anwendung des Näherungsverfahrens auf 12 Stationen mit zusammen 71 Richtungen berichtet. Zwischen den strengen

q_{12}, q_{13} als Gewichts-Reciproken der Winkel und den genäherten $q_1 + q_2$, $q_1 + q_3 \ldots$ ergab sich im Mittel eine Abweichung von 9 %.

Zur weiteren Charakterisierung des Verfahrens wird noch auf S. 290—291 der citierten Astr. Nachr. für das kleine Württembergische aus 6 Dreiecken bestehenden Dreiecksnetz für Erdmessung (von E. Hammer, Stuttgart 1892) die von Helmert nach seinem Näherungsverfahren durchgeführte Ausgleichung mitgeteilt, in Vergleichung mit der strengen Ausgleichung. Die grösste Differenz der beiderseitigen Ergebnisse für die 33 möglichen Winkel beträgt 0,038″; die mittere Veränderung ist $\pm$ 0,014″ bei einem mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels von $\pm$ 0,47″ und einem mittleren Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels von $\pm$ 0,4″. Letzteres bekundet eine mittlere Veränderung von nur $\pm$ 3,5 % und eine maximale Änderung von 9,5 %.

Teilungsfehler und Netzfehler.

Die im vorstehenden behandelte Theorie betrifft nur die reinen Messungsfehler im engeren Sinne, nämlich Einstellungsfehler (mit dem Fernrohr) und Ablesungsfehler (am Mikroskop oder Nonius), oder die „*nackten*“ Beobachtungsfehler. Die Teilungsfehler des Theodolitkreises können durch symmetrische Kreisverstellungen in den verschiedenen Messungssätzen teilweise eliminiert sein, sie spielen aber immer noch eine Rolle in dem Gesamtfehler einer Richtung.

Im Allgemeinen darf für eine Sicht nicht schlechthin *ein* Beobachtungsfehler angenommen werden, sondern eine Zusammenwirkung von verschiedenen Fehlerursachen, welche teils unregelmässig, (nackter Beobachtungsfehler) teils regelmässig oder gar konstant sind.

Als konstante Fehler treten auf: Die Instrumentalfehler, besonders die regelmässigen Teilungsfehler und die zufälligen Teilungsfehler, die persönlichen Fehler des Beobachters bei der Auffassung der Zielpunkte, Centrierungsfehler, zeitliche Veränderungen in der Lage der Stationen — „aus den verschiedensten Gründen“ — und seitliche Brechungen der Lichtstrahlen in der Luft. Wenn diese Fehler unter Umständen bei verschiedenen Gruppen der Winkelmessungen einer Station von Gruppe zu Gruppe in wechselnder Weise wirken, so ist ihr Einfluss ein systematischer.

Von dieser Anschauung ausgehend verfährt Helmert auf S. 36 der oben S. 283 citierten Veröffentlichung weiter so:

Angenommen man habe einen Satz unabhängiger ungleich gewichtiger Richtungen, von denen eine das Gewicht n habe, oder mit n facher Einstellung einer ideellen Einheitsvisur gleichgewichtig sei, und es sei μ der mittlere nackte Beobachtungsfehler für die Gewichtseinheit, so ist $\frac{\mu^2}{n}$ der mittlere nackte Beobachtungsfehler der fraglichen Richtung. Ferner sei $\frac{\tau^2}{r}$ der Einfluss des zufälligen Teilungsfehlers bei r gleich verteilten Einstellungen. Dann hat man das mittlere Fehlerquadrat der Richtung nach dem bisherigen $= \frac{\mu^2}{n} + \frac{\tau^2}{r}$.

Nun wird aber hierzu noch ein mittlerer *Netz*richtungsfehler ν genommen, welcher sich aus den konstanten Fehlern zusammensetzt, die in der Regel auf den Stationen verborgen bleiben und erst in den Widersprüchen des *Netzes* erkannt werden können. Dazu gehören auch Reste regelmässiger Teilungsfehler und anderer systematischer Einflüsse, die eigentlich durch das Messverfahren eliminiert sein sollten.

Auf diese Weise wird das vollständige mittlere Fehlerquadrat einer Richtung dargestellt durch:

$$M^2 = \frac{\mu^2}{n} + \frac{\tau^2}{r} + \nu^2 \tag{22}$$

Um ν^2 kennen zu lernen wurde ein Durchschnittswert von M^2 aus den Widersprüchen der Dreiecksabschlüsse oder aus älteren Netzausgleichungen und zum Teil aus der Vergleichung von Stationsergebnissen verschiedener Epochen entnommen, μ^2 und τ^2 aber nach Möglichkeit geschätzt. Nach S. 55, 56, 89, 109, 110, 125 der citierten Veröffentlichung sind solche Ermittlungen $\nu^2 = 0{,}19$, $0{,}43$, $0{,}09$, $0{,}18$, $0{,}09$, $0{,}15$, $0{,}09$

$$\text{Im Mittel } \nu^2 = 0{,}17 \text{ oder } \nu = \pm\, 0{,}4'' \tag{23}$$

Dieser Netzfehler $\nu = \pm\, 0{,}4''$ ist ein verhältnismässig *hoher* Wert!

Noch eine Eigentümlichkeit wird auf S. 37 hinzugefügt: Wenn auf derselben Station Messungen aus verschiedenen Jahren mit einander zu verbinden waren, so wurde zunächst M^2 für jede Epoche für sich berechnet. Dafür sprach das Auftreten *grosser Differenzen* selbst in den besten Messungen *verschiedener Jahre*, wobei es allerdings unaufgeklärt blieb, was die Gründe solcher Änderungen mit *der Zeit* sein mögen.

§. 83. Das Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz mit Ausgleichung von Helmert.

Aus der Veröffentlichung des geodätischen Instituts von 1893 (Citat s. oben S. 283) entnehmen wir von S. 87—95 das „Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz“, welches in unserer nachfolgenden Fig. 1. dargestellt ist, und wir führen die Hauptmomente der Richtungsausgleichung vor, welche nach der neuen Helmert schen Gewichtstheorie (im vorigen § 82.) gemacht ist.

Das Netz hat 10 Stationen folgender Herkunft:

Belgische Messungen	Belgische und Preussische Messungen	Preussische Messungen
Nederweert	Roermond	Erkelenz
Lommel	Ubagsberg	Langschoss
Peer	Henri-Chapelle	
Montaigu		
Tongres		
$M_B = \frac{0{,}89''}{\sqrt{2}} = \pm\, 0{,}63''$	$M_B = \pm\, 0{,}73''$, $M_P = \begin{cases} \pm\, 0{,}79'' \\ \pm\, 0{,}66'' \end{cases}$	$M_P = \frac{0{,}73''}{\sqrt{2}} = \pm\, 0{,}52''$

Die hier sofort beigesetzten mittleren Winkelfehler $\pm\, 0{,}89''$ und $\pm\, 0{,}73$ sind aus Dreiecksschlüssen der Belgischen Triangulierung und des neueren rheinischen Dreiecksnetzes des geodätischen Institutes im Allgemeinen ermittelt, und geben den mittleren Fehler einer im Netz ausgeglichenen Belgischen Richtung oder Preussischen Richtung bzw. $= \pm\, 0{,}63''$ und $\pm\, 0{,}52''$, während die Vergleichungen auf den An-