UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 7. Abbildung von Körpern und Körperschnitten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Visual Library

seiner Koordinaten zu bestimmen, wählen wir auf der x-Achse die Richtung OX, auf der y-Achse die Richtung OY und auf der z-Achse die nach oben gehende Richtung als die positive. Die entgegengesetzten Richtungen sind dann negativ. Wir gelangen dann zu dem Punkte P mit den Koordinaten $x = +2$, $y = +3$, $z = +2,5$ (Längeneinheit 1 cm), indem wir von O auf der x-Achse 2 cm in positiver Richtung bis P_x, dann parallel der positiven Richtung der y-Achse 3 cm bis P_1 und endlich parallel der positiven Richtung der z-Achse 2,5 cm bis P gehen, also dem Streckenzuge $OP_x P_1 P$ folgen. Die Lage des Punktes P ist eindeutig bestimmt. Wie gelangen wir zum Punkte Q mit den Koordinaten $x = -2$, $y = +3$, $z = -2,5$?

b) Für uns kommt im folgenden besonders der Fall in Betracht, daß der Punkt P durch seine senkrechte Projektion P_1 auf die Grundebene, den **Grundriß** von P (welche Koordinaten sind dadurch gegeben?) und durch seinen Abstand z von der Grundebene, der positiv oder negativ sein kann, gegeben ist.

Der Einfachheit halber stellen wir die abzubildenden Körper zumeist in das erste Raumachtel, für das die Achsenrichtungen sämtlich positiv sind.

2a) **Zweite Grundaufgabe. Das Schrägbild eines beliebigen Raumpunktes P zu bestimmen.**

Wir erhalten das Bild des Punktes P (Fig. 17 und 18), der durch seine Koordinaten x, y und z gegeben ist, indem wir das Bild des Streckenzuges $OP_x P_1 P$ bestimmen. P_1P bildet sich dabei in natürlicher Größe parallel der z-Achse ab (§ 3, S. I).

Ist P durch seinen Grundriß P_1 (Fig. 18) und seinen Abstand z von der Grundebene gegeben, so finden wir das Bild P' von P, indem wir zunächst P_1 in bekannter Weise abbilden und dann $P_1' P' = z$ parallel zur z-Achse ziehen.

Wie gewinnt man aus der Abbildung des Punktes die Abbildung von Strecken und daraus die von Flächen und Körpern?

Aufgabe. Bilde die Punkte ab mit den Koordinaten

$$x = \pm 3;\ y = \pm 2;\ z = \pm 4 \text{ (Längeneinheit 1 cm).}$$

b) Nennen wir die zur x-Achse (Bildachse) parallelen Geraden **Breitenlinien**, die zur y-Achse parallelen **Tiefenlinien** und die zur z-Achse parallelen **Höhenlinien**, so können wir für die Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion die einfache Regel aufstellen:

Breiten- und Höhenlinien erscheinen auch im Bild als solche in natürlicher Größe, dagegen erscheinen die Tiefenlinien nach Maßgabe der Abbildungszahlen verkürzt und um ihren Schnittpunkt mit der Bildachse gedreht.

§ 7. Abbildung von Körpern und Körperschnitten.

1a) **Aufgabe 1.** Das Schrägbild eines auf der Grundebene ruhenden Würfels (Kantenlänge $a = 4$ cm), dessen Grundkante CD auf der Bildachse liegt, für die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$ zu zeichnen (Fig. 19).

Man bilde zunächst die Grundfläche für die gegebenen Abbildungszahlen und dann die Ecken der Deckfläche ab (Genauigkeitsproben!). Welche Seitenflächen des Würfels bilden sich in wahrer Größe ab? Was für Figuren sind die Bilder der anderen Flächen?

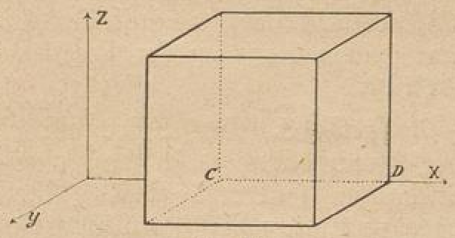


Fig. 19.

Sichtbarkeit. Betrachtet man den abzubildenden Würfel in der Richtung der Projektionsstrahlen (Sehstrahlen), so sind einzelne Kanten dem Auge nicht sichtbar. Die Bilder solcher dem Auge *nicht sichtbaren Linien eines Körpers werden im folgenden punktiert oder auch weggelassen, dagegen die der sichtbaren gleichmäßig ausgezogen.* Die Abbildungen gewinnen dadurch sehr an Anschaulichkeit.

Aufgabe 2. Den in Aufg. 1 bezeichneten Würfel auch für die Abbildungszahlen

	a)	b)	c)	d)
$q =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\alpha =$	30°	45°	90°	45°

darzustellen (Fig. 20).

Um die Wirkung auf das Auge beurteilen zu können, sind die Schrägbilder desselben Würfels für die gebräuchlichen, in Aufg. 2 gegebenen Abbildungszahlen nebeneinander gezeichnet. Der unschöne Eindruck, den

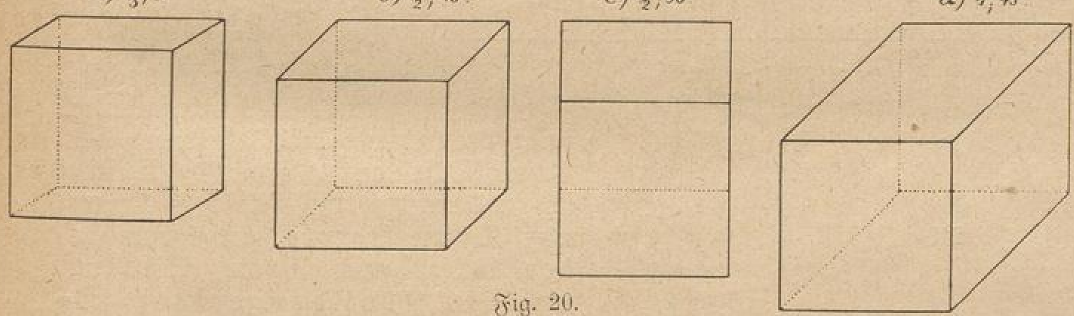


Fig. 20.

man z. B. im Falle Aufg. 2d) erhält, rührt daher, daß man das Bild nicht in der Richtung der Projektionsstrahlen betrachtet. Geschieht dieses in einiger Entfernung, so verschwindet für das Auge die Verzerrung, und das Bild wirkt richtig. Die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45^\circ$ ist unter dem Namen **Kavalierperspektive**[1]) bekannt, da sie seinerzeit den französischen

[1]) Der Name wird auch darauf zurückgeführt, daß die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45^\circ$ früher zur Anfertigung von Übersichtsplänen von Festungswerken benutzt wurde. Mit „Kavaliere" bezeichnet man die hohen Aufbauten bei den Festungswerken.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Kavalieren auf der Kriegsschule als die bequemste zur Anwendung empfohlen wurde. Für $q = 1$ und $\alpha = 90°$ erhält man die sogenannte **Militärperspektive**, die also den Grundriß in wahrer Gestalt liefert. Bei sehr steilem Einfallen der Projektionsstrahlen spricht man von **Vogelperspektive.**

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines Würfels zu zeichnen, der so auf der Grundebene ruht, daß eine Diagonale seiner Grundfläche zur Bildachse senkrecht steht (Übereckstellung). a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$; b) $q = 1$, $\alpha = 90°$ (Militärperspektive).

Aufgabe 4. Den Körper zu zeichnen, der aus einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm entsteht, wenn man die Ecken durch Schnitte, die durch die Mitten dreier in einer Ecke zusammenstoßender Kanten geführt werden, abschneidet. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$. (Kubooktaeder, Kristallform von Eisenkies).

Aufgabe 5. Ein auf der Grundebene stehendes gerades Prisma mit der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die Grundfläche des Prismas sei ein beliebiges Fünfeck ABCDE, das nach Gestalt und Lage in Fig. 21 angegeben ist. Nach Abbildung der Grundfläche zieht man durch die Eckpunkte A'B'C'D'E' des Bildes die Parallelen zur z-Achse und trägt auf ihnen die gegebene Höhe h ab. Die Deckfläche ergibt sich danach durch Parallelverschiebung um die Höhe h nach oben.

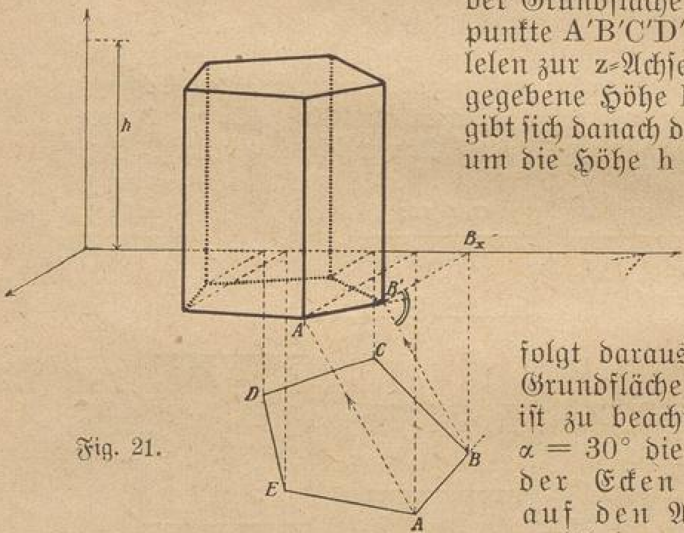
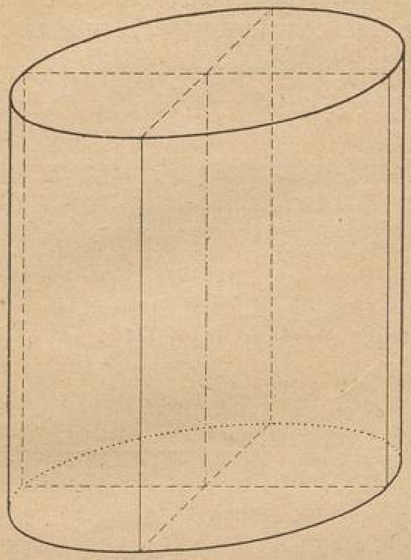


Fig. 21.

Die Grundseiten und ihre Bilder (z. B. AB und A'B') schneiden sich auf der Bildachse. Welche Vereinfachung folgt daraus für die Abbildung der Grundfläche des Körpers? Weiter ist zu beachten, daß für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$ die Verbindungsstrecken der Ecken mit ihren Bildern auf den Abbildungen der zugehörigen Tiefenlinien (30°-Linien) senkrecht stehen, z. B. $BB' \perp B'B_x$.

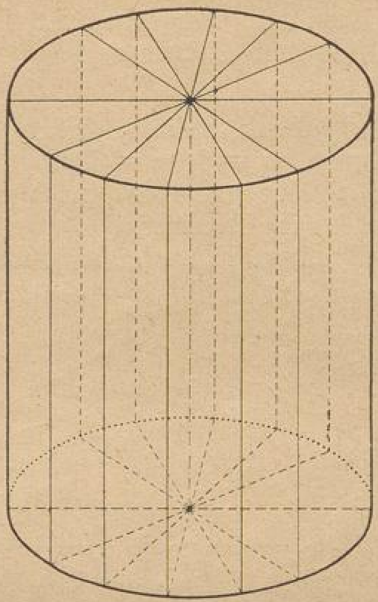
Aufgabe 6. Das Schrägbild eines auf der Grundebene stehenden geraden Zylinders von der Höhe h zu zeichnen. a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45$, b) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 22 und 23).

Die Zylinderachse lassen wir der Einfachheit halber mit der z-Achse zusammenfallen. Die Grundfläche wird nach § 5, Aufg. 6 abgebildet. Die der Grundfläche parallele und kongruente Deckfläche ergibt sich wie beim Prisma durch Parallelverschiebung um die Höhe h. Die gemeinsamen Tangenten der Bilder der Grund- und Deckfläche des Zylinders bilden für den Mantel die Sichtbarkeitsgrenzen, die in Fig. 23 mit den Seitenlinien des in der Bildebene gelegenen Achsenschnittes (Frontalschnittes) zusammenfallen.



($\frac{1}{2}$, 45°)

Fig. 22.



($\frac{1}{2}$, 90°)

Fig. 23.

b) **Aufgabe 7.** Das Schrägbild einer auf der Grundebene stehenden Pyramide mit der Höhe h zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Von der Pyramide (Fig. 24) ist außer der Höhe die Grundfläche nach Lage und Gestalt, ferner die senkrechte Projektion S_1 (Grundriß) der Spitze gegeben. Zeichnung!

Aufgabe 8. Einen geraden Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ (vgl. Fig. 29).

c) **Aufgabe 9.** Ein regelmäßiges Oktaeder mit der Achsenlänge l = 6 cm in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen (Fig. 25). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

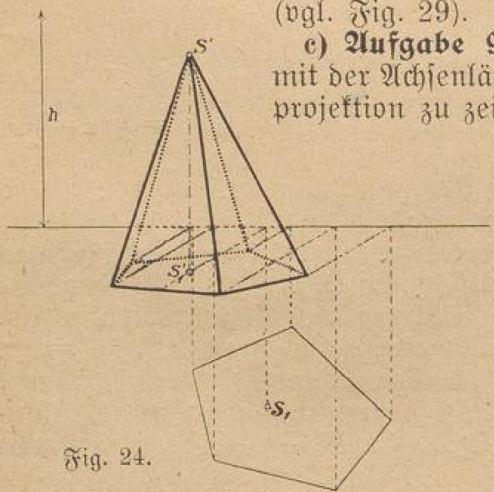


Fig. 24.

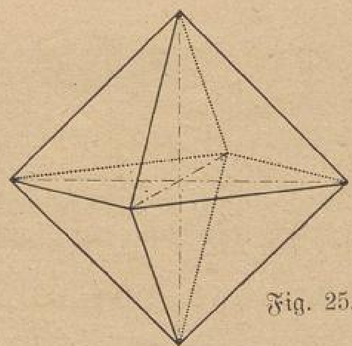


Fig. 25.

Der Einfachheit halber lassen wir die drei Achsen des Körpers mit den Achsen unseres Koordinatensystems zusammenfallen. Die Höhen- und Breitenachse erscheinen im Bilde in natürlicher Größe, während die Tiefenachse auf ein Drittel verkürzt wird (L. I. § 103).

Bilde den Körper auch ab, wenn die Kantenlänge $a = 4$ cm gegeben ist.

Aufgabe 10. Das Schrägbild eines Rhombendodekaeders zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Der Körper entsteht aus dem Würfel, indem auf die Seitenflächen regelmäßige vierseitige Pyramiden, deren Höhe gleich der halben Kantenlänge ist, aufgesetzt werden. Der Körper wird von 12 Rhom-

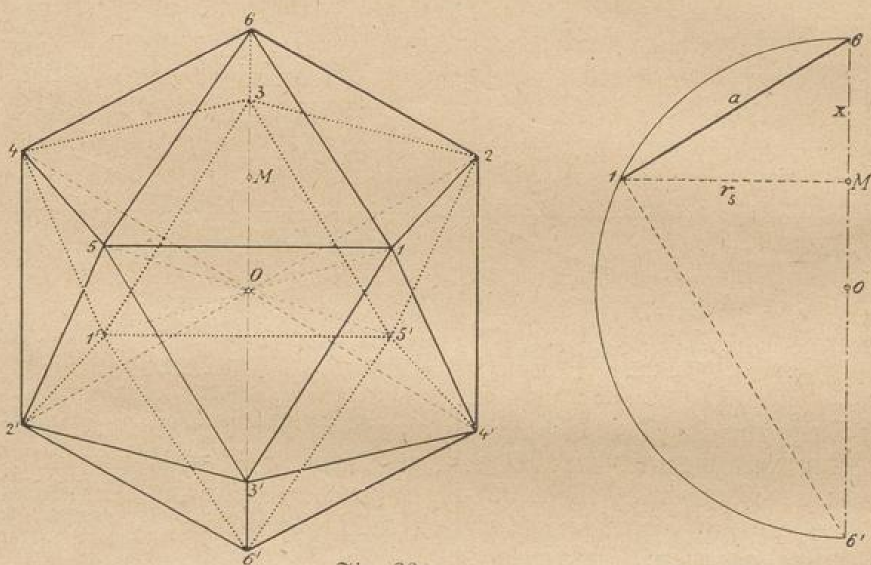


Fig. 26a. Fig. 26b.

ben begrenzt (Name!). Da der Granat diese Kristallform besitzt, heißt er auch Granatoeder.

Aufgabe 11. Das Schrägbild eines regelmäßigen Ikosaeders (Kantenlänge a), von dem die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte (66′) auf der Grundebene senkrecht steht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 26).

Nach einer kurzen Orientierung über den Bau des Körpers (L. I. § 104, 1) ergibt sich die folgende einfache Darstellung:

Bilde zunächst das zur Grundebene parallele regelmäßige Fünfeck 1 2 3 4 5 (Fig. 26a) mit dem Mittelpunkte M ab, ziehe $M6 = x$, wo x die Höhe der fünfseitigen Pyramide bezeichnet (Konstruktion in Fig. 26b), parallel der z-Achse und verlängere M 6 bis 6′, so daß $66' = 2r$, dem Durchmesser der Umkugel, wird. Nun halbiere 66′ und bestimme mit Hilfe des Mittelpunktes O die Gegenpunkte der Ecken des Fünfecks 1 2 3 4 5. $1'O = 1O$; $2'O = 2O$; ... (§ 3, S. IV). Löse die Aufgabe auch für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Aufgabe 11a. Ein regelmäßiges I k o ſ a e d e r ruht mit einer Seitenfläche ſo auf der Grundebene, daß die Verbindungsſtrecke zweier Gegenpunkte der Bildebene parallel iſt. Das Schrägbild zu entwerfen für $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (Fig. 27).

Wie muß man das Bild (Fig. 27) betrachten, wenn es richtig wirken ſoll?

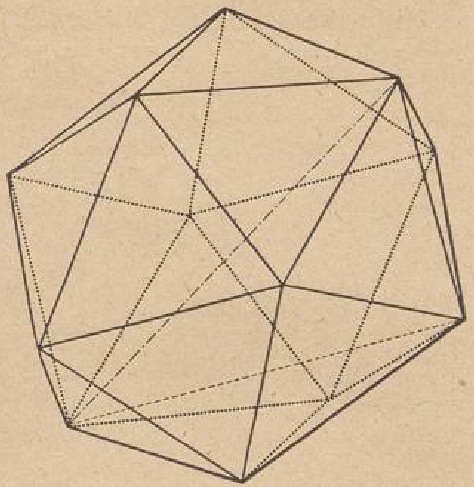


Fig. 27.

Aufgabe 12. Das Schrägbild eines regelmäßigen Dodekaeders (Kantenlänge a), das mit einer Seitenfläche beliebig auf der Grundebene ruht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die 20 Ecken des Körpers bilden zu je 5 die Ecken von 4 regelmäßigen Fünfecken, die im vorliegenden Falle der Grundebene parallel ſind. Die Abbildung dieſer Fünfecke liefert am ſchnellſten eine genaue Zeichnung. Zur Orientierung über den Körper ſ. L. I. § 105.

2) **Aufgabe 13.** Ein regelmäßig-ſechsſeitiges P r i s m a durch eine zur Bildebene ſenkrechte Ebene, deren Neigungswinkel mit der Grundebene 30° beträgt, zu ſ c h n e i d e n (Fig. 28). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Zeichnung! Beſtimme die Schnittfigur in wahrer Größe!

Aufgabe 14. Löſe die entſprechende Aufgabe für einen geraden Z y l i n d e r (vgl. Fig. 30). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$.

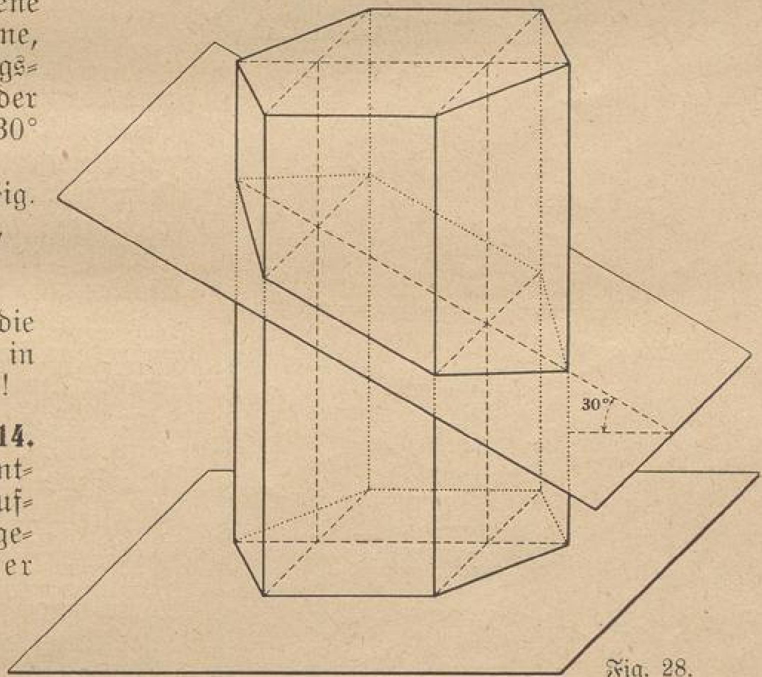


Fig. 28.

($q - \frac{1}{2}$, $\alpha - 45°$)

Aufgabe 15. Eine regelmäßig-ſechsſeitige P y r a m i d e durch eine zur Bildebene ſenkrechte Ebene, deren Neigung zur Grundebene

$\varphi = 30°$ beträgt, zu schneiden und die Schnittfigur in wahrer Größe zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Aufgabe 16. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden Kegel (Fig. 29). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

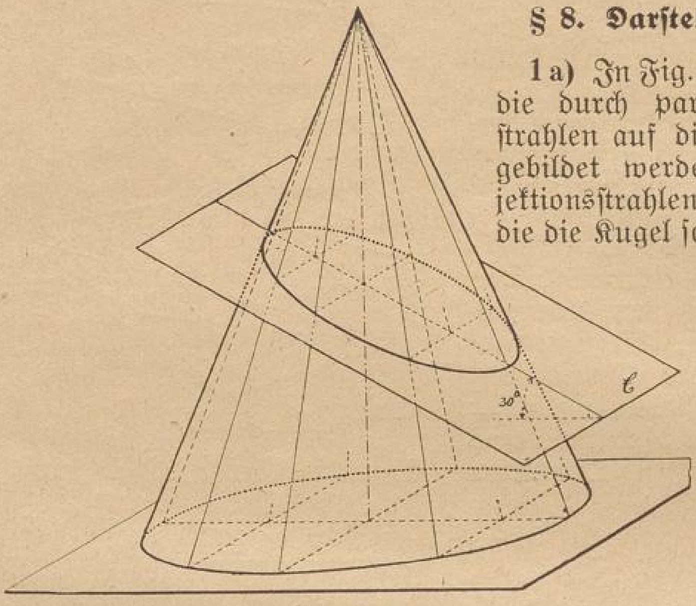


Fig. 29.

§ 8. Darstellung der Kugel.

1 a) In Fig. 30 sei O eine Kugel, die durch parallele Projektionsstrahlen auf die Bildebene B abgebildet werden soll. Die Projektionsstrahlen zerfallen in solche, die die Kugel schneiden, und solche, die sie berühren. Die berührenden Projektionsstrahlen bilden einen Strahlenzylinder (Berührungszylinder), der die Kugel in einem Großkreise u, dessen Ebene auf den Projektionsstrahlen senkrecht steht, berührt und die Bildebene in einer Kurve u′, einer Ellipse, die nichts anderes als die Parallelprojektion des Großkreises u darstellt, durchdringt. Für ein Auge, das aus sehr großer Entfernung längs den Projektionsstrahlen hinsieht, wäre der Großkreis u der **wahre Umriß** des Körpers. Im Gegensatz dazu heißt sein Bild u′ der **scheinbare Umriß** der Kugel. Dieser ist offenbar allein nicht imstande, in dem Beschauer den Eindruck einer Kugel hervorzurufen. Um dies zu erreichen, ist noch die Abbildung von wichtigen Schnitten erforderlich.

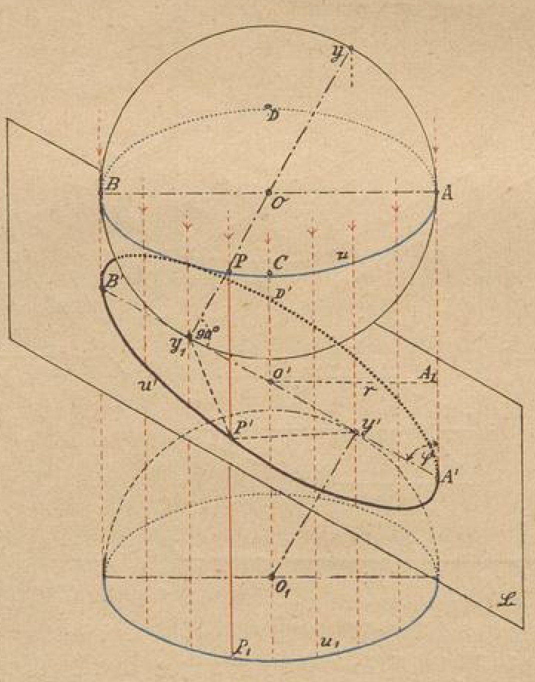


Fig. 30.

b) Um den Umrißkreis u (Fig. 30) abzubilden, beachten wir, daß der zur