Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 8. Darstellung der Kugel.

$\varphi = 30°$ beträgt, zu schneiden und die Schnittfigur in wahrer Größe zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Aufgabe 16. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden Kegel (Fig. 29). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

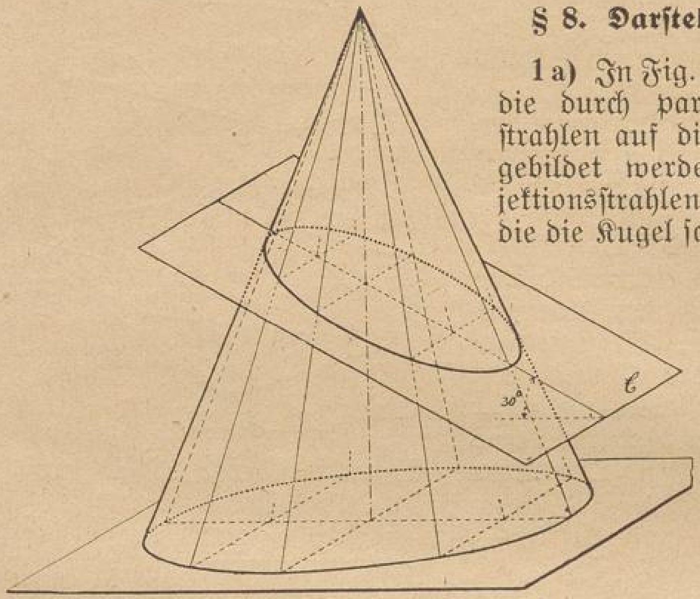

Fig. 29.

§ 8. Darstellung der Kugel.

1 a) In Fig. 30 sei O eine Kugel, die durch parallele Projektionsstrahlen auf die Bildebene B abgebildet werden soll. Die Projektionsstrahlen zerfallen in solche, die die Kugel schneiden, und solche, die sie berühren. Die berührenden Projektionsstrahlen bilden einen Strahlenzylinder (Berührungszylinder), der die Kugel in einem Großkreise u, dessen Ebene auf den Projektionsstrahlen senkrecht steht, berührt und die Bildebene in einer Kurve u′, einer Ellipse, die nichts anderes als die Parallelprojektion des Großkreises u darstellt, durchdringt. Für ein Auge, das aus sehr großer Entfernung längs den Projektionsstrahlen hinsieht, wäre der Großkreis u der **wahre Umriß** des Körpers. Im Gegensatz dazu heißt sein Bild u′ der **scheinbare Umriß** der Kugel. Dieser ist offenbar allein nicht imstande, in dem Beschauer den Eindruck einer Kugel hervorzurufen. Um dies zu erreichen, ist noch die Abbildung von wichtigen Schnitten erforderlich.

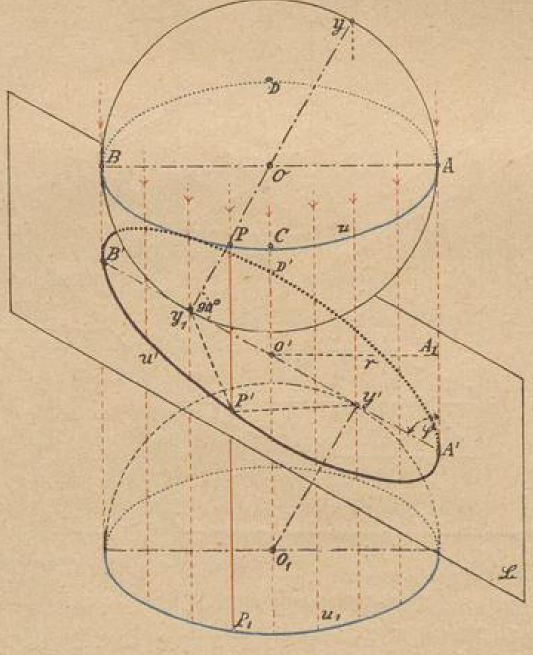

Fig. 30.

b) Um den Umrißkreis u (Fig. 30) abzubilden, beachten wir, daß der zur

Bildebene B parallele Durchmesser CD sich in wahrer Größe abbildet, also $C'D' = CD = 2r$. Dagegen erscheint der zu CD senkrechte Durchmesser AB im Bilde (A'B') gestreckt und auch senkrecht zu C'D'. $A'B' = 2a$ wird die **große** und $C'D' = 2b$ die **kleine** Achse der Ellipse. Die halbe Länge der ersten ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $A'O'A_1$, von dem die Kathete $O'A_1 = r$ und der gegenüberliegende Winkel $O'A'A_1 = \varphi$, der Neigungswinkel der Bildstrahlen mit der Bildebene, der leicht bestimmt werden kann,[1]) bekannt sind. Denkt man sich die Kugel innerhalb des Tangentenzylinders verschoben, bis sie die Bildebene berührt, so wird diese auf A'B' im Punkte Y_1 berührt. Der zur Bildebene senkrechte Durchmesser Y_1Y bildet sich auf A'B' ab, und zwar als die Brennpunkte[2]) Y_1 und Y' der Umrißellipse. Das Umrißbild der Kugel ändert sich nicht, wenn diese innerhalb des Tangentenzylinders beliebig verschoben wird.

2) Aufgabe. Das Schrägbild einer **Kugel** zu zeichnen (Fig. 31). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

I. Als Nullpunkt unseres Koordinatensystems wählen wir den Mittelpunkt O der Kugel und bilden zunächst die in den drei Koordinatenebenen gelegenen Schnittkreise ab, von denen sich der Frontalkreis, das ist der in der Bildebene gelegene, in wahrer Größe abbildet. Die beiden anderen Schnittkreise erscheinen im Bild als Ellipsen, die zum Teil über den Frontalkreis hinausgreifen. Die große Achse der Umrißellipse liegt auf dem Bild YY_1 des zur Bildebene senkrechten Durchmessers, die kleine Achse ist gleich dem dazu senkrechten Durchmesser $CD = 2r$. Da $OC = r$ und $OY = r.q$, also $\sphericalangle CYO = \varphi$ ist, so findet man den Endpunkt A der halben großen Achse der Umrißellipse, indem man parallel zu CY

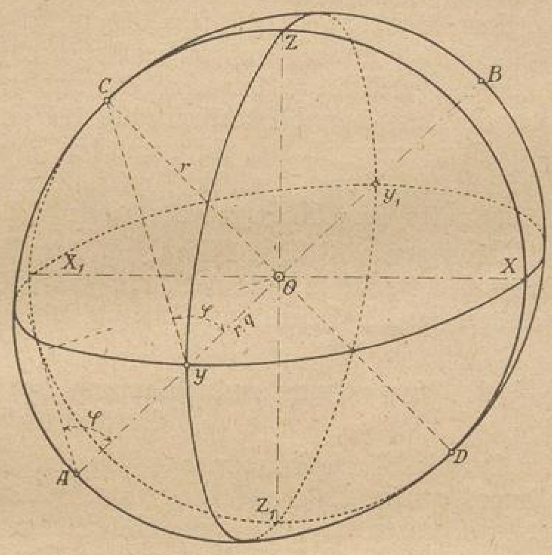

Fig. 31.

---

[1]) Ist z. B. $q = \frac{1}{2}$ gegeben, so ist $\cot \varphi = \frac{A'A_1}{A_1O'} = \frac{1}{2}$, also, da $A_1O' = r$, $A'A_1 = \frac{1}{2}r$.

[2]) Der Nachweis, daß das Umrißbild u' der Kugel eine Ellipse mit den Brennpunkten Y' und Y_1 ist, ergibt sich leicht mit Hilfe der sog. Dandelinschen Kugeln O und O_1 (Fig. 30). Diese berühren die Bildebene in den Punkten Y_1 und Y' und den Tangentenzylinder in den Kreisen u und u_1, deren Ebenen zu dessen Achse senkrecht sind und deshalb überall den gleichen Abstand haben. Für einen beliebigen Punkt P' von u' ist daher $P'Y' + P'Y_1 = P'P_1 + P'P = PP_1$. Das Umrißbild u' hat daher die Eigenschaft, daß die Summe der Abstände eines jeden Punktes von den beiden Punkten Y' und Y_1, den **Brennpunkten**, fest ist, es ist also eine Ellipse (L. II. § 51, 2). $PP_1 = A'B'$, Beweis!

an den Frontalkreis die Tangente zieht, die die Verlängerung von OY in A trifft.

Um das erhaltene Bild noch anschaulicher zu gestalten, ist die Abbildung von Schnitten parallel zur Grundebene oder parallel zur Seitenebene erforderlich. Zu dem Zwecke teile man z. B. den in der z-Achse liegenden Durchmesser in 6 gleiche Teile, lege durch die Teilpunkte die zur Grundebene parallelen Schnitte und bilde sie samt den umgeschriebenen Quadraten ab. Die Bilder dieser Schnitte sind Ellipsen, die von der Umrißellipse sämtlich umschlossen werden. In der Fig. 31 sind sie der Deutlichkeit halber nicht gezeichnet.

II. Eine einfache und bei günstig gewählten Abbildungszahlen recht anschauliche Darstellung der Kugel ergibt sich auch, wenn man in gleicher Weise wie vorher eine hinreichend große Anzahl frontaler Schnitte abbildet, die sich wieder als Kreise darstellen. Die umhüllende Ellipse ist wieder der scheinbare Umriß der Kugel.

Das Bild der Kugel (Fig. 31) wirkt infolge der starken Verzerrung zunächst befremdend auf unser Auge. Doch ändert sich das sofort, wenn man die Bildebene lotrecht hält und in angemessener Entfernung in der Richtung der Sehstrahlen nach dem Bild hinsieht. Dann verschwindet die Verzerrung für das Auge und die Figur stellt mit täuschender Körperlichkeit eine Kugel dar, die Umrißellipse erscheint als Kreis, obgleich der Sehpunkt (Projektionszentrum) unendlich fern liegt.

Übungen. 1. Wie bildet sich der Umriß u der Kugel ab, wenn $\alpha = 90°$ wird? 2. In welchem Falle ist u' wieder ein Kreis? 3. Wie ändert sich die Gestalt des Umrißbildes, wenn $\sphericalangle\ \varphi$ immer kleiner wird?

§ 9. Anwendung und Wertung der schiefen Parallelprojektion. Geschichtliches.

1) Die Darstellungen der schiefen Parallelprojektion zeichnen sich durch große Anschaulichkeit aus. Neben den Breiten- und Höhenverhältnissen treten auch die Tiefenverhältnisse klar hervor. Sie eignet sich deshalb besonders zur Darstellung von Gegenständen, in deren Gestalt drei zueinander senkrechte Richtungen hervortreten. So bildet sie das einfachste Verfahren zum Zeichnen von Kristallformen, wobei man die Werte $q = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 20°$ bevorzugt, zum Darstellen wissenschaftlicher und technischer Apparate (Physikbuch!), zum Skizzieren von Maschinenteilen und architektonischen Gegenständen, endlich zum Anfertigen der stereometrischen Figuren. Die Abbildung mit den Zahlen $q = 1$ und $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive) gestattet bei unverändertem Maßstab die unmittelbare Entnahme der Höhen-, Breiten- und Tiefenmaße. Sie wird deswegen häufig im Baufach zur Darstellung von Steinschnitten angewandt. Das unter dem Namen „Militärperspektive" bekannte Abbildungsverfahren wird benutzt zur Anfertigung von Festungs-, Stadt- und Lageplänen.

Den erwähnten Vorzügen steht, abgesehen von dem fehlerhaften Eindruck, den das Schrägbild besonders in gerader Ansicht auf das