Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

Zweiter Abschnitt. Gerade Parallelprojektion. (Grund- und Aufrißverfahren.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Auge macht, ein Hauptmangel gegenüber. Die schiefe Parallelprojektion ist zur unmittelbaren Festlegung räumlicher Gebilde nicht einfach genug. Schon die Darstellung verhältnismäßig einfacher Körper erfordert das Hinzutreten der senkrechten Projektion. So ist z. B. in Aufg. 7, § 7 zur Darstellung der Pyramide in Wirklichkeit die senkrechte Projektion sowohl zur Grundebene (Grundriß) als auch zur Bildebene (Aufriß) gegeben. Weiter bietet die Darstellung von krummen Linien und Flächen Schwierigkeiten. Ein zur Grundfläche paralleler Kreis z. B. bildet sich bei schiefer Parallelprojektion als Ellipse ab, während er bei der senkrechten Projektion sich wieder als Kreis darstellt.

2) Die Anfänge der schiefen Parallelprojektion gehen, wie alte Stadt- und Befestigungspläne lehren, weit zurück. Schon die Darstellungen in den Gräbern der alten Ägypter zeigen die Gegenstände (z. B. eine Palastanlage) in einer Art Militärperspektive.[1])

Das bereits sehr früh benutzte Verfahren der schiefen Parallelprojektion wurde besonders durch J. H. Lambert (1728—1777) wissenschaftlich behandelt und bekanntgemacht. Im vorigen Jahrhundert ist das Verfahren der schiefen Parallelprojektion verallgemeinert und als besondere Darstellungsmethode („Axonometrie") begründet worden. Wählt man als Bildebene nicht, wie wir es bisher getan haben, eine lotrechte Ebene, sondern eine ganz beliebige schief gelegene Ebene, so erhält man die allgemeinste Form der schiefen Parallelprojektion.

Zweiter Abschnitt.

Gerade Parallelprojektion.

(Grund- und Aufrißverfahren).

---

§ 10. Allgemeines. Darstellung auf zwei Bildebenen.

1) Die gerade Parallelprojektion oder senkrechte Projektion[2]) ist als besonderer Fall der Parallelprojektion zu betrachten, bei der die Projektionsstrahlen die Bildebene unter einem rechten Winkel treffen. Deswegen gelten auch hier die in § 3 abgeleiteten Hauptsätze der Parallelprojektion. Die senkrechte Projektion hat den besonderen Vorzug, daß sie gestattet, Körper nach den drei Hauptrichtungen in gleichem Maßstabe abzubilden. Darauf beruht ihre große Bedeutung für Handwerk, Technik und Kunst.

---

[1]) Vgl. F. Schilling, Über Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, 1904, S. 147.

[2]) Wenn im zweiten Abschnitt von Projektion oder Projizieren schlechthin gesprochen wird, so ist stets die senkrechte (orthogonale = rechtwinklige) Projektion gemeint.

2a) Projizieren wir einen einfachen Körper, z. B. einen Quader (Fig. 32), auf eine zu seiner Grundfläche parallele Ebene B_1, so erhalten wir als seine Projektion das Rechteck Q_1, durch das die Ausmessungen des Körpers nur nach der Breite und Tiefe bestimmt sind. Um auch die Höhe in der einfachsten Weise festzulegen, projizieren wir den Körper noch auf eine zweite Ebene B_2 parallel der Breiten- und Höhenrichtung, so daß die Höhe sich in wahrer Größe darstellt (Fig. 32). Durch Hinzutreten der zweiten Projektion Q_2 sind Gestalt und Ausmessungen des Körpers bestimmt. Wie wir im folgenden sehen werden, genügt im allgemeinen zur vollständigen Darstellung (Festlegung) eines Körpers die Projektion auf zwei Ebenen.

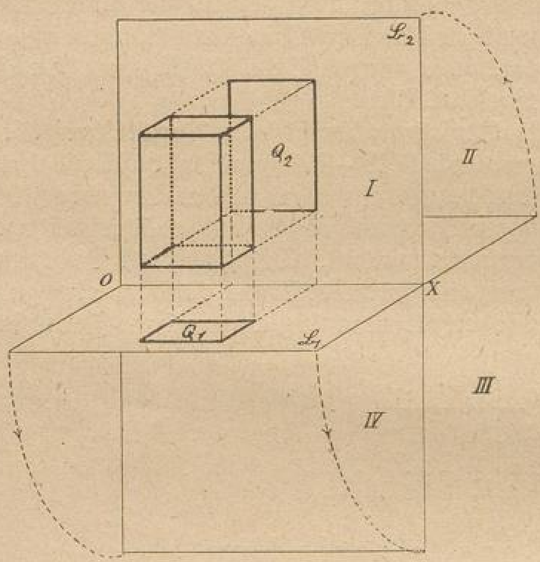


Fig. 32.

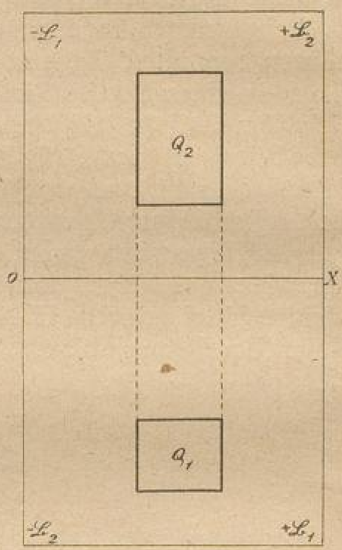


Fig. 33.

Die **erste Bildebene** B_1 (Fig. 32) oder **erste Tafel** wählt man wagerecht, die **zweite Bildebene** B_2 oder **zweite Tafel** lotrecht zu B_1. Die Ebene B_1 heißt auch **Grund-** oder **Grundrißebene;** die Ebene B_2, die unserer Bildebene bei der schiefen Parallelprojektion entspricht, **Aufrißebene.** Dementsprechend heißen die Projektionen eines Gebildes auf diese Ebenen **Grundriß** oder **erste Projektion** (Q_1) und **Aufriß** oder **zweite Projektion** (Q_2). Die Schnittgerade OX der beiden Bildebenen wird als **Bild-** oder **x-Achse** bezeichnet.

b) Denken wir uns (Fig. 32) die Bildebenen B_1 und B_2 unbegrenzt erweitert, so teilen sie den Raum in vier Teilräume (Raumviertel oder Quadranten) I, II, III und IV. Als Aufrißebene betrachten wir stets die lotrecht vor uns gehaltene Zeichenebene. Dann bezeichnen wir den vorderen oberen Teilraum als I. Raumviertel, den hinter B_2 gelegenen oberen als II. Raumviertel usw. Der Einfachheit halber nehmen wir die darzustellenden Gebilde im allgemeinen im I. Teilraum an.

c) Um mit einer Zeichenebene auszukommen, denkt man die erste Bildebene (Fig. 33) um die Achse in der durch die Pfeile angegebenen Richtung um 90° gedreht. Dadurch fällt der vordere Teil der Grundrißebene mit dem unteren Teile der Aufrißebene zusammen, während der hinter B_2 gelegene Teil der Grundrißebene mit dem oberen Teil von B_1 zur Deckung kommt. Von dem in Fig. 32 samt seinen senkrechten Projektionen im Schrägbilde gezeichneten Quader erhalten wir nach Vereinigung beider Bildebenen die in Fig. 33 gegebene Darstellung.

Es ist dauernd zu beachten, daß die Vereinigung der beiden Bildebenen lediglich den Zweck hat, die Darstellung auf einer einzigen Zeichenebene zu ermöglichen. Für die Ausführung hat man sich daher die beiden Ebenen stets in ihrer rechtwinkligen Verbindung zu denken.

Bei Darstellung von Gebilden im ersten Raumviertel (Fig. 32) braucht man nur die vordere Hälfte der Grundrißebene und die obere der Aufrißebene in Betracht zu ziehen. Nach Vereinigung der Bildebene trennt die Achse („trennende Achse") Grundriß und Aufriß; das über der Achse gelegene Feld ist Aufrißebene, das darunter liegende Grundrißebene.

§ 11. Darstellung des Punktes.

1) Sind in Fig. 34 B_1 und B_2 die beiden zueinander senkrechten Bildebenen und ist P ein beliebiger Punkt im I. Raumviertel, so sind die Fußpunkte P_1 und P_2 der von P auf die Bildebenen gefällten Lote die Projektionen von P. P_1 ist sein Grundriß oder seine erste Projektion, P_2 sein Aufriß oder seine zweite Projektion. Den Abstand $PP_1 = z$ des Punktes P von B_1 nennen wir seinen **ersten Tafelabstand** oder Höhenabstand, entsprechend $PP_2 = y$ seinen **zweiten Tafelabstand** oder Tiefenabstand. Die durch die Tafelabstände PP_1 und PP_2 bestimmte Ebene steht auf beiden Bildebenen senkrecht (L. I. § 72, 3), ist mithin auch senkrecht zu ihrer Schnittgeraden, der Bildachse OX. Ist P_x der Schnittpunkt der Ebene mit der Achse, so sind demnach P_1P_x und P_2P_x senkrecht zur Achse OX (L. I. § 67, 1), d. h. die Lote von Grund- und Aufriß eines Punktes auf die Bildachse haben denselben Fußpunkt.

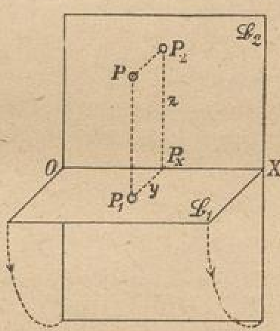


Fig. 34.

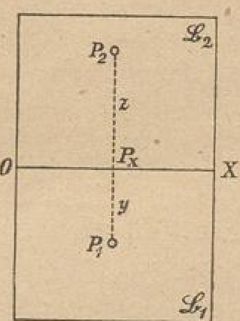


Fig. 35.

Das Viereck $PP_1P_xP_2$ (Fig. 34) ist ein Rechteck. In diesem ist $P_2P_x = PP_1 = z$ und $P_1P_x = PP_2 = y$.

Der erste Tafelabstand eines Punktes ist also gleich dem Abstand seines Aufrisses von der Bildachse und der zweite Tafelabstand gleich dem Abstand seines Grundrisses von der Bildachse.

2) Wird die Grundebene in der früher angegebenen und auch aus der Fig. 34 ersichtlichen Weise in die Aufrißebene heruntergeklappt (Fig. 35), so fallen nach 1) die Lote P_1P_x und P_2P_x in eine Gerade. Wir erhalten damit den einfachen, aber sehr wichtigen Satz:

Grund- und Aufriß eines Punktes liegen stets auf einer Senkrechten zur Achse.

Umgekehrt können nur dann je ein Punkt der ersten und zweiten Bildebene die Bilder eines und desselben Raumpunktes sein, wenn ihre Lote auf die Bildachse denselben Fußpunkt haben.

3) Übungen. a) Warum ist ein Punkt des Raumes durch seine Projektion auf eine feste Ebene nicht bestimmt? Welche Angaben wären noch erforderlich, um seine Lage völlig zu bestimmen?

b) Wie liegen (Fig. 36 und 37) Grund- und Aufriß zur Bildachse, wenn der abzubildende Punkt 1. im I.; 2. im II.; 3. im III.; 4. im IV. Raumviertel liegt?

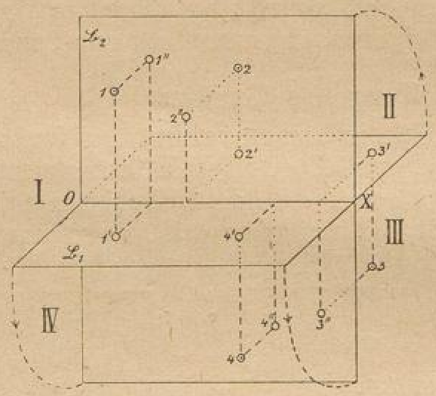


Fig. 36.

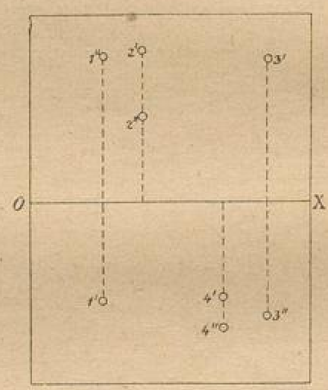


Fig. 37.

c) Wo liegt P, wenn 1. sein Grundriß P_1; 2. sein Aufriß P_2 auf der Bildachse liegt?

d) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß den gleichen Abstand von der Achse haben? (Halbierungsebene; zwei Möglichkeiten!)

e) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß 1. über der Achse; 2. unter der Achse zusammenfallen? (Vgl. d.)

§ 12. Darstellung der Geraden.

1 a) Projizieren wir (Fig. 38) die Gerade g, die B_1 im Punkte G und B_2 im Punkte A durchstößt, auf die beiden Bildebenen, so erhalten wir als ihre erste Projektion (Grundriß) die Gerade g_1, als zweite Projektion (Aufriß) g_2. Die Projektionen einer Geraden sind im allgemeinen wieder Gerade. Denn sie ergeben sich als Schnittgerade der projizierenden Ebenen, die die Gesamtheit aller projizierenden Lote umfassen, mit den Bildebenen. Aus ihren Projektionen g_1 und

g_2 ergibt sich umgekehrt die ursprüngliche Gerade g als Schnitt der durch g_1 und g_2 zu den zugehörigen Bildebenen gelegten Normalebenen.

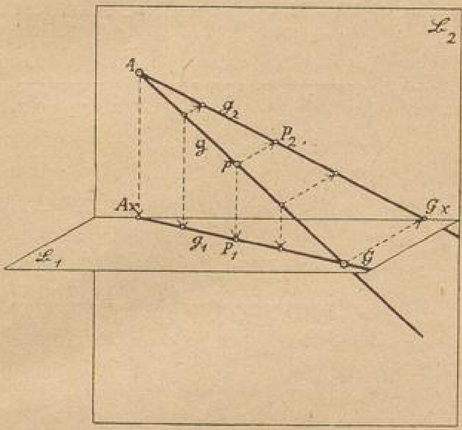


Fig. 38.

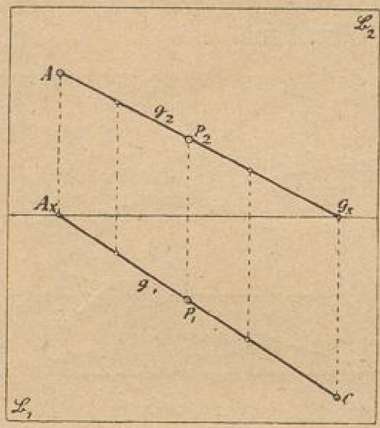


Fig. 39.

Nach Vereinigung der Grundebene mit der Bildebene gewinnen wir für die Gerade g (Fig. 38) die in Fig. 39 gegebene Darstellung. Die Bilder desselben Punktes P liegen auf einer Senkrechten zur Achse ($P_1P_2 \perp OX$).

b) Der Punkt G, in dem g die Grundrißebene durchstößt, heißt die **erste Spur** oder **Grundrißspur** der Geraden, entsprechend der Punkt A ihre **zweite Spur** oder **Aufrißspur.** Jeder dieser Spurpunkte fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, z. B. G mit seiner ersten Projektion G_1. Die zweite Projektion G_x von G liegt auf der Achse, ebenso die erste A_x von A. Die Grundrißspur G der Geraden g liegt daher (Fig. 38 und 39) senkrecht unter (oder über) dem Schnittpunkte G_x ihrer zweiten Projektion g_2 mit der Achse; ihre Aufrißspur dagegen senkrecht über (oder unter) dem Schnittpunkte A_x ihrer ersten Projektion g_1 mit der Achse. Löse danach die

Aufgabe 1. Die Spuren einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden zu bestimmen (Fig. 38).

Umgekehrt sind durch die Spuren G und A einer Geraden g auch ihre Projektionen g_1 und g_2 bestimmt.

Aufgabe 2. Gegeben sind die Spuren G und A einer Geraden g. Ihre Projektionen g_1 und g_2 zu finden.

Man lote (Fig. 39) die Spuren auf die Achse und verbinde den Fußpunkt A_x des Lotes von A mit G und den Fußpunkt G_x des Lotes von G mit A.

2) Gerade in besonderer Lage zu den Bildebenen.

Bei den folgenden in besonderer Lage befindlichen Geraden sind die Spuren zu bestimmen oder ihre Lage anzugeben. Zur Erleichterung der Anschauung und des Verständnisses ist stets zuerst ein Schrägbild anzufertigen.

a) g ist schief zu beiden Bildebenen und durchstößt B_1 hinter der Achse, so daß nur die zweite Spur sichtbar ist (Fig. 40 und 41). In welchem Raumviertel liegt die von den Spuren begrenzte Strecke AG der Geraden?

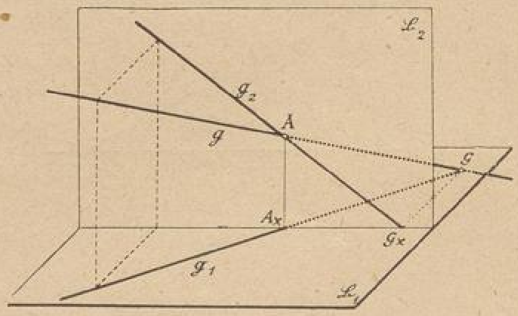


Fig. 40.

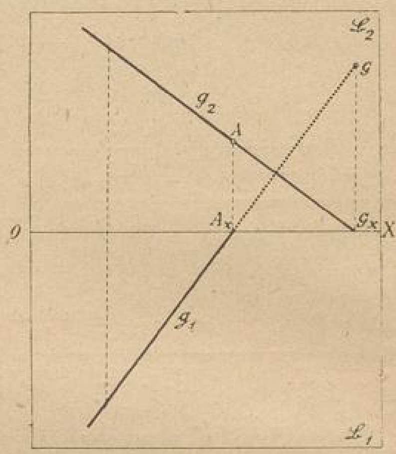


Fig. 41.

b) g ist parallel zu B_1 (B_2) und schief zu B_2 (B_1). Vgl. Fig. 42 und 43. Die zweite Projektion g_2 ist der Achse parallel. Wo liegt G_x (A_x)?

c) g ist parallel zu B_1 und B_2. Zeichnung! Wo liegen die Spuren G und A von g?

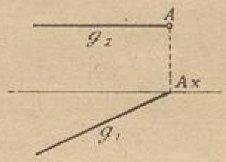


Fig. 42.

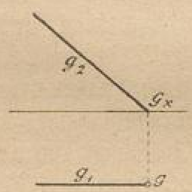


Fig. 43.

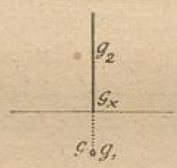


Fig. 44.

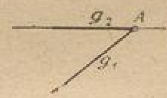


Fig. 45.

d) g ist senkrecht zu B_1 (B_2). S. Fig. 44. g_1 schrumpft in diesem Falle in einen Punkt zusammen, der mit der ersten Spur G von g zusammenfällt. Wo liegt die zweite Spur A?

e) g liegt in B_1 (B_2). S. Fig. 45.

3a) Gerade und Punkt.

Ein Punkt P (Fig. 38 und 39) **liegt dann und nur dann auf einer Geraden, wenn seine Projektionen P_1 und P_2 auf den entsprechenden Projektionen der Geraden liegen, also P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2.**

Umgekehrt geht eine Gerade dann und nur dann durch einen Punkt P, wenn ihre Projektionen durch die entsprechenden Projektionen des Punktes gehen.

b) Für die Beurteilung der **Lage zweier Geraden** ergibt sich aus a) der wichtige Satz:

Schneiden sich zwei Gerade (g und l, Fig. 46), so liegen die Schnittpunkte S_1 und S_2 ihrer gleichnamigen Projektionen auf einem Lot ($S_1 S_2$) zur Achse und umgekehrt.

Rückt der Schnittpunkt P der Geraden g und l ins Unendliche, so rücken damit auch seine Projektionen ins Unendliche. Was folgt daraus für die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden?[1])

Aufgabe. Zu einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden durch einen Punkt P (P_1P_2) die Parallele zu zeichnen. Lösung!

Liegen (Fig. 47) die Schnittpunkte der Projektionen zweier Geraden g und l nicht senkrecht untereinander, so haben die Geraden im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam. Die Projektionen stellen also **zwei windschiefe Gerade** dar.

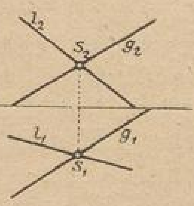


Fig. 46.

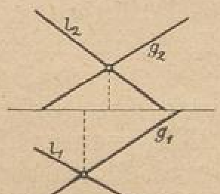


Fig. 47.

In welchem Ausnahmefalle können die Schnittpunkte der Projektionen zweier windschiefer] Geraden senkrecht untereinander liegen?

§ 13. Bestimmung der Tafelneigungen einer Geraden und der wahren Länge einer Strecke.

1) Aufgabe. Die Neigungswinkel einer Geraden g mit den Bildebenen zu bestimmen.

Da GA_x (s. Schrägbild Fig. 48) die Projektion von g auf $\mathfrak{B}_1$ ist, ist $\sphericalangle\, AGA_x$ der Neigungswinkel γ_1 von g mit der ersten Tafel oder Bildebene. Um γ_1 zu finden, denken wir uns das Dreieck GA_xA um GA_x in die erste Bildebene umgelegt, so daß es in die Lage des Dreiecks GA_xA_0 kommt. Wir erhalten dann zur Bestimmung von γ_1 die folgende Konstruktion: Man errichte (Fig. 49) auf GA_x in A_x das Lot $A_xA_0 = A_xA$ und verbinde A_0 mit G. Alsdann ist $\sphericalangle\, A_0GA = \gamma_1$.

Entsprechend finden wir den Neigungswinkel γ_2 mit der zweiten Bildebene.

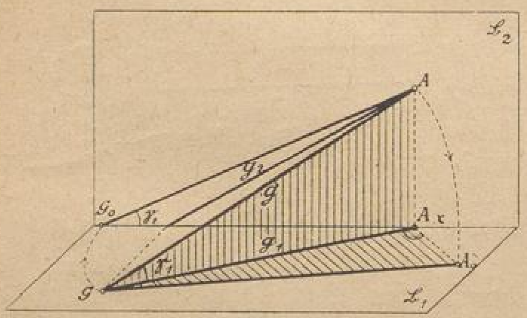


Fig. 48.

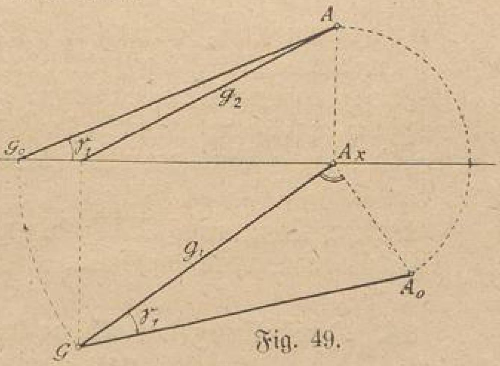


Fig. 49.

[1]) Beachte auch, daß die entsprechenden projizierenden Ebenen paralleler Geraden parallel sind.

Bemerkung. Anstatt Dreieck GA_xA um g_1 als Drehungsachse in die erste Bildebene umzulegen, können wir es uns auch um AA_x gedreht denken, bis es in die zweite Bildebene fällt (Fig. 48 und 49). Die Konstruktion wird dann noch einfacher. Inwiefern?

$GA_0 = AG_0$ ist die wahre Länge der von den Spurpunkten G und A begrenzten Strecke der Geraden g.

2) Aufgabe. Die wahre Länge der durch ihre Projektionen L_1M_1 und L_2M_2 gegebenen Strecke LM zu bestimmen.

Aus dem Schrägbilde Fig. 50 erkennen wir, daß die Strecke LM mit ihrer ersten Projektion L_1M_1 und den Endloten $LL_1 = l$ und $MM_1 = m$ das Trapez LMM_1L_1 bildet. Denken wir uns dieses Trapez um L_1M_1 in die Grundrißebene umgelegt, so erhalten wir das Trapez $L_0M_0M_1L_1$, in dem $L_0M_0 = LM$ und $L_0L_1 = l$ und $M_0M_1 = m$ ist. Um das umgelegte Trapez in der Zeichenebene (Fig. 51) zu gewinnen, errichten wir auf L_1M_1 in L_1 das Lot $L_1L_0 = L_xL_2 = l$ und in M_1 das Lot $M_1M_0 = M_xM_2 = m$. Sodann ist L_0M_0 gleich der wahren Länge der Strecke LM.

Eine andere mehr Raum ersparende Konstruktion ergibt sich aus dem folgenden leicht zu beweisenden Satz (Fig. 50 und 51): Die wahre Länge einer Strecke ist die Hypotenuse (s_0) eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die eine Projektion (s_1) und dessen andere Kathete die Differenz (l—m) der Abstände der Endpunkte der andern Projektion (s_2) von der Achse ist.

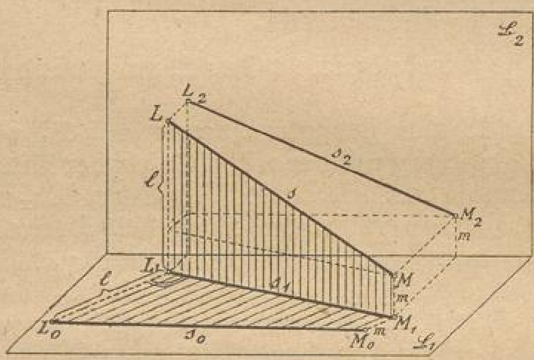


Fig. 50.

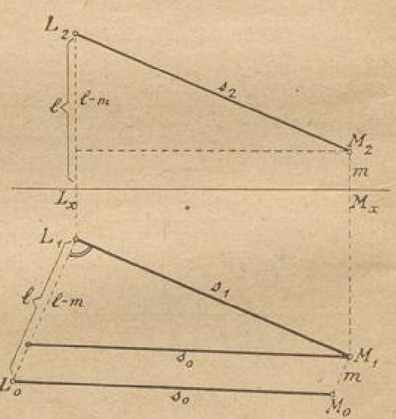


Fig. 51.

Welche Lage muß LM haben, damit eine Projektion die wahre Größe der Strecke darstellt?

§ 14. Darstellung der Ebene durch ein ebenes Vieleck (Darstellung von ebenen Vielecken).

1) Da die Lage einer Ebene durch drei ihrer Punkte bestimmt ist, so ist eine Ebene durch die Projektionen dreier Punkte, die *nicht einer Geraden angehören*, oder, was dasselbe ist, durch die *Projektion eines in ihr liegenden Dreiecks, vollständig festgelegt*. Infolgedessen dürfen bei einem ebenen Vieleck, z. B. dem Fünfeck in Fig. 52, nur von drei Ecken (1, 2, 3) die *beiden* Projektionen willkürlich gewählt werden. Von den übrigen Ecken (4 und 5) dagegen darf nur *je eine* Projektion (z. B. 4′ und 5′) beliebig angenommen werden.

Aufgabe 1. Von einem beliebig im Raum gelegenen ebenen Fünfeck sind der Grundriß (1′2′3′4′5′) und die Aufrisse (1″, 2″, 3″) dreier Ecken gegeben. Die Aufrisse der übrigen Ecken zu bestimmen (Fig. 52).

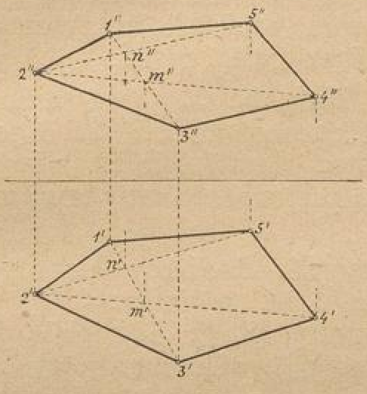


Fig. 52.

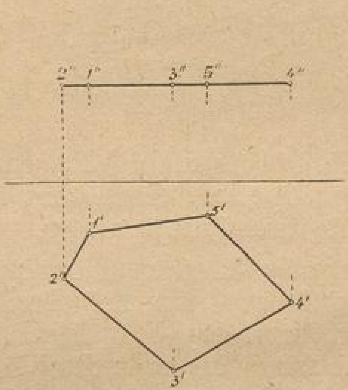


Fig. 53.

Die Aufrisse der Ecken 4 und 5 müssen so konstruiert werden, daß sie mit den drei beliebig angenommenen Ecken 1, 2, 3 in einer Ebene liegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß *die Diagonalen des Vieleckes sich schneiden müssen*, also nicht windschief sein dürfen. Daher zeichnen wir zunächst die beiden Projektionen 1′3′ und 1″3″ der Diagonale 1 3 und ziehen durch den dritten festbestimmten Punkt 2 im Grundriß die Diagonalen 2′4′ und 2′5′, die die Diagonale 1′3′ in m′ und n′ schneiden. Die Aufrisse m″ und n″ dieser Schnittpunkte bestimmen wir durch Hinaufloten auf 1″3″ und erhalten, wenn wir 2″ mit m″ und n″ verbinden, die Aufrisse der Diagonalen 2 4 und 2 5, deren Endpunkte 4″ und 5″ senkrecht über den zugehörigen Grundrissen 4′ und 5′ liegen.

Was für eine zweite Projektion ergibt ein ebenes Vieleck (Fig. 53), das der Grundrißebene parallel ist? Wieviel Ecken brauchen in diesem Falle nur im Aufriß gegeben zu sein, um seine Projektionen zu zeichnen?

2) Gerade und Punkte in einer Ebene.

a) **Aufgabe 2.** Von der Geraden g, die in der Ebene des Dreiecks 1 2 3 liegt, ist die erste Projektion g_1 gegeben. Die zweite Projektion g_2 zu bestimmen (Fig. 54).

Die Gerade g kann nur dann in der Ebene des Dreiecks liegen, wenn die Schnittpunkte von g_2 mit den Seiten des Dreiecks im

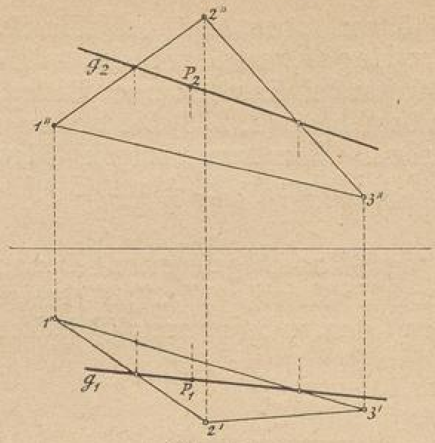


Fig. 54.

Aufriß senkrecht über den zugehörigen Schnittpunkten von g_1 mit den entsprechenden Seiten des Grundrißdreiecks liegen. Lösung!

b) Zur **Festlegung eines Punktes P in der Ebene,** die z. B. durch ein Dreieck bestimmt ist, benutzen wir eine beliebige durch P in der Ebene gezogene Gerade, die so das Bindeglied zwischen Punkt und Ebene bildet. Diese Hilfsgerade muß die in a) angegebene Eigenschaft besitzen.

Aufgabe 3. Von dem in der Ebene des Dreiecks 1 2 3 gelegenen Punkte P ist der Grundriß P_1 gegeben. Den Aufriß P_2 zu bestimmen.

Lösung s. Fig. 54. Statt einer beliebigen Geraden g kann man einfacher eine Eckenlinie benutzen.

3) Aufgabe 4. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit der Ebene des Dreiecks 1 2 3 zu finden.

Zur Bestimmung des Schnittpunktes S (s. Schrägbild Fig. 55) legen wir durch die erste Projektion g_1 der Geraden g, die den Um-

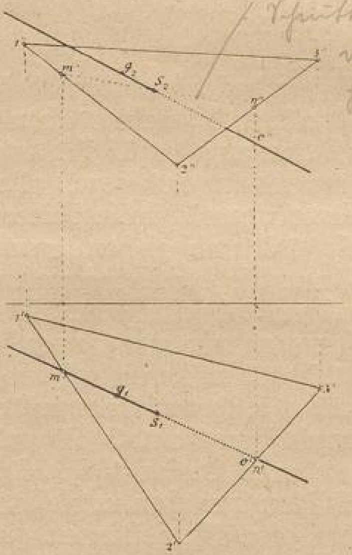


Fig. 55.

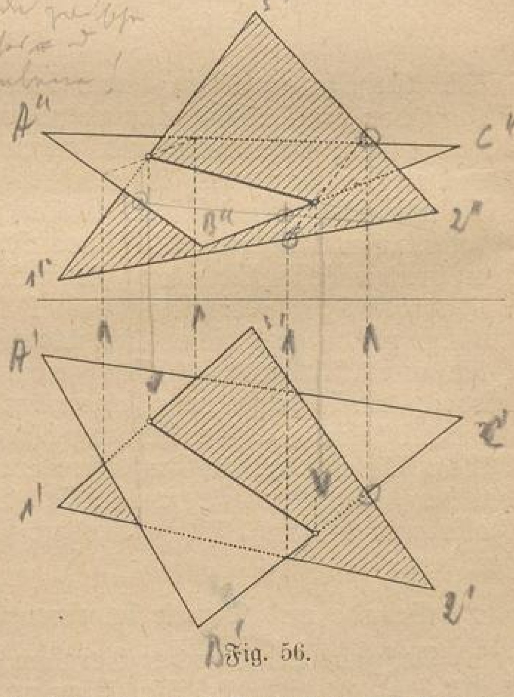


Fig. 56.

fang des Grundrisses in m' und n' trifft, die zur Grundebene senkrechte Hilfsebene. Diese schneidet das Dreieck in der Schnittlinie mn. Der Schnittpunkt von mn und der Geraden g ist der gesuchte Punkt S.

Wir erhalten daher die zweite Projektion der Schnittlinie mn mit dem Dreieck dadurch, daß wir die Punkte m' und n' von 1'2' und 2'3' hinaufloten. Der Schnittpunkt S_2 von g_2 mit m''n'' ist der Aufriß des gesuchten Durchstoßpunktes. Seine erste Projektion S_1 ergibt sich durch Herunterloten auf g_1.

Sichtbarkeit. Die Dreiecksfläche denken wir uns undurchsichtig. Um nun festzustellen, welches Stück der Geraden g durch das Dreieck z. B. im Grundriß, also für ein senkrecht über der Grundrißebene befindliches Auge, verdeckt erscheint, beachten wir, daß n' (o') die erste Projektion sowohl des auf der Dreiecksseite gelegenen Punktes n, als auch des auf der Geraden g gelegenen Punktes o ist. Da o'' unter n'' liegt, geht die Seite 23 über g hinweg. Mithin ist die Strecke S_1n' von oben nicht sichtbar.

Aufgabe 5. Die Schnittlinie zweier sich schneidender Dreiecke (Vierecke), deren Projektionen gegeben sind, zu bestimmen (Fig. 56). Lösung nach Aufg. 4.

§ 15. Darstellung von Körpern in einfacher Stellung. Abwicklung.

Aufgabe 1. Einen auf der Grundebene ruhenden Würfel (Kantenlänge a = 5 cm), von dem zwei Seitenflächen der Aufrißebene parallel sind, in senkrechter Projektion zu zeichnen (Fig. 57).

Grundriß und Aufriß sind je ein Quadrat mit der Seite a.

Aufgabe 2. Der in Fig. 57 gezeichnete Würfel soll um die Kante 26 um den Winkel α = 30° gedreht und in der neuen Lage dargestellt werden (s. Fig. 58).

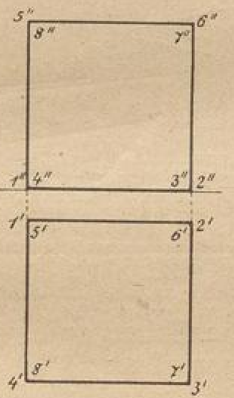


Fig. 57.

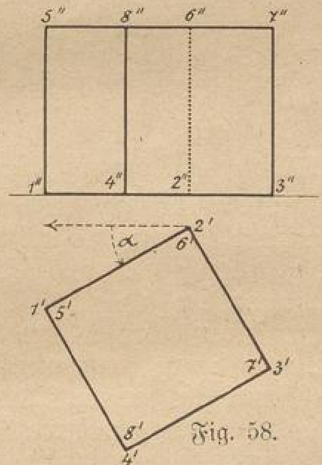


Fig. 58.

Aufgabe 3. Eine regelmäßig-achtseitige Säule, die auf einem quadratischen Sockel steht, darzustellen (Maßstab 1 : 10). Grundkante des Sockels a = 50 cm, der Säule b = 15 cm, Höhe entsprechend h = 15 cm und l = 80 cm.

Aufgabe 4. Eine regelmäßig-fünfseitige Pyramide, die mit der Grundfläche auf der Grundebene steht und deren Grundkante a und Höhe h gegeben sind, darzustellen. Ferner soll der im Abstande x von der Spitze zur Grundfläche parallele Schnitt und die Abwicklung des Körpers gezeichnet werden.

Der Grundriß des Körpers (Fig. 59) ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seite a. Die Verbindungsstrecken seiner Ecken mit dem Mittelpunkte S_1, der ersten Projektion der Spitze S, sind die Grundrisse der Seitenkanten. Zur Gewinnung des Aufrisses fälle man von S_1 auf die Achse das Lot und verlängere es um h bis S_2, der zweiten Projektion der Spitze, und verbinde S_2 mit den zweiten Projektionen der Ecken der Grundfläche. Denkt man sich die Ober-

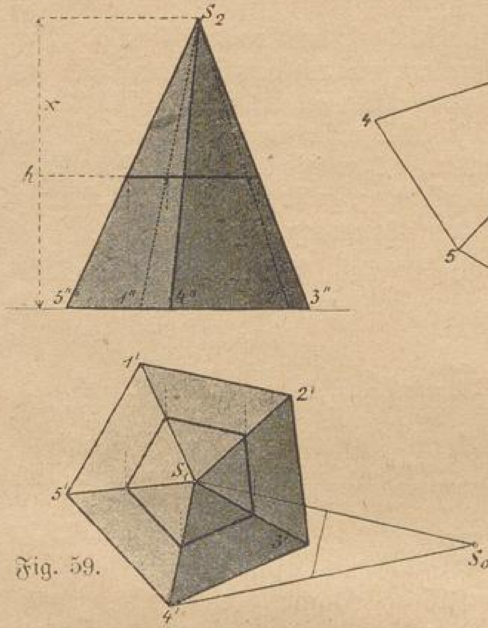


Fig. 59.

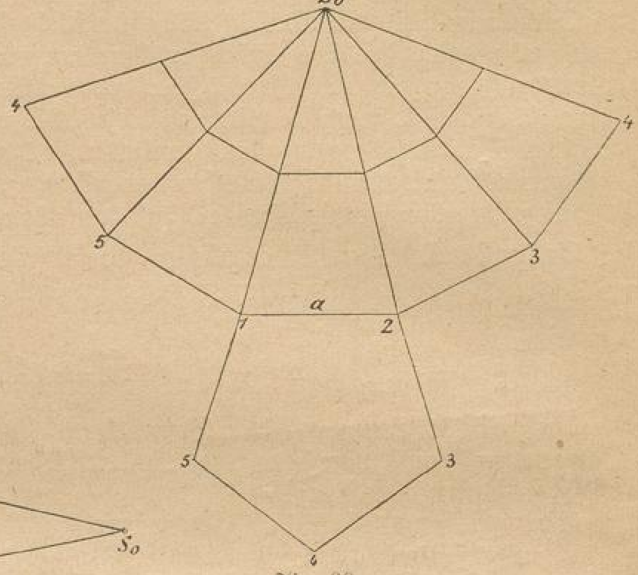


Fig. 60.

fläche des Körpers abgelöst und längs einer Seitenkante und der Grundkanten bis auf 12 aufgeschnitten, so erhält man durch Ausbreiten in eine Ebene das Netz des Körpers (Fig. 60), das im vorliegenden Falle aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit einem anhängenden Fünfeck besteht. Die Konstruktion des Netzes erfordert die Ermittlung der Länge der Seitenkante. Diese ergibt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ($4' S_1 S_0$), dessen eine Kathete gleich dem großen Radius des Fünfecks ($4' S_1$) und dessen andere Kathete die gegebene Höhe ist. Das auf der Grundebene senkrecht stehende Dreieck wird zur bequemen Konstruktion um $4' S_1$ in die Grundebene umgelegt (Fig. 59). Mit Hilfe des Netzes ist ein Modell des Körpers anzufertigen.

Aufgabe 5. Die Normalbilder eines auf der Grundebene stehenden a) geraden Zylinders mit Achsenschnitt und Querschnitt, b) geraden Kegels mit Achsenschnitt und Querschnitt, c) einer auf der Grundebene ruhenden Kugel zu zeichnen.

a) Der Grundriß (Fig. 61) ist ein mit der Grundfläche des Zylinders zusammenfallender Kreis. Der Aufriß ist ein zur Achse senkrechtes Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Durchmesser des Grundkreises und dessen andere gleich der Höhe des Körpers ist. Welche Projektionen hat der Achsenschnitt 1 2 3 4 und der zur Grundfläche parallele Schnitt Q im Grund- und Aufriß? Eine Mantellinie, z. B.

1 4, erscheint in der ersten Projektion als Punkt, in der zweiten als Lot zur Achse.

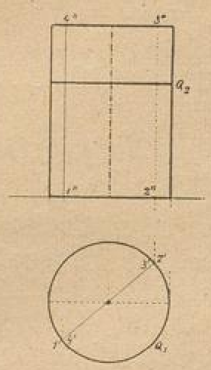


Fig. 61.

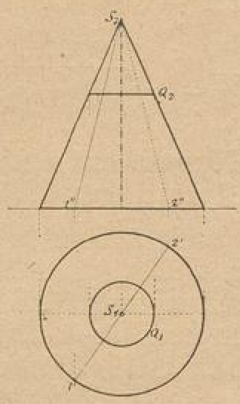


Fig. 62.

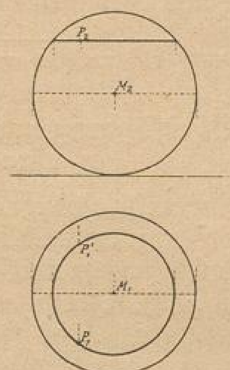


Fig. 63.

b) Welche Projektionen ergibt der Kegel? (Fig. 62). Welche der Achsenschnitt 1 2 S und der Parallelschnitt Q? Jeder Radius des Grundkreises, z. B. $1'S_1$, ist zugleich Projektion einer zugehörigen Seitenlinie (1 S).

c) Die Projektionsstrahlen (Fig. 63), die die Kugelfläche berühren, bilden eine die Kugel berührende Zylinderfläche. Die beiden Projektionen sind größte Kreise mit dem Radius der Kugel, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf einem Lot zur Achse liegen; sie sind gleichzeitig die Projektionen der zu den Bildebenen parallelen größten Kreise. Wie stellt sich ein zur Grundebene paralleler Schnittkreis dar? Wie findet man zum Aufriß P_2 des auf dem Schnittkreis gelegenen Punktes P den Grundriß P_1?

Aufgabe 6. Den Mantel des in Fig. 61 dargestellten Zylinders abzuwickeln.

Anleitung. Um die Länge eines Kurvenstücks als gerade Strecke annähernd darzustellen (zu rektifizieren), gibt man dem Stechzirkel eine so kleine Öffnung, daß das zwischen den Spitzen liegende Kurvenstück als geradlinig angenommen werden kann, trägt diese Strecke so oft auf einer Geraden ab, wie sie in dem vorliegenden Kurvenstück enthalten ist, und fügt das übrigbleibende Stück hinzu.

Von besonderer Wichtigkeit ist die **Rektifikation**[1]) **der Kreislinie.** Will man den halben Umfang des Kreises in Fig. 64 sehr angenähert haben, so

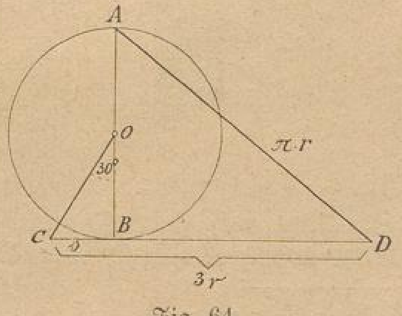


Fig. 64.

[1]) Zusammensetzung des lat. rectus (gerade) und facere (machen).

zeichne man den Durchmesser AB, trage im Mittelpunkte O einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die in B gezeichnete Tangente in C trifft, und verlängere CB = s bis D, so daß CD = 3r wird. Alsdann ist der halbe Umfang sehr angenähert gleich

$$AD = \sqrt{4r^2 + (3r - s)^2} = r \sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}141533\ldots r.$$[1]

§ 16. Überführung von Körpern aus einfacher Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung.

Die Normalprojektionen von Körpern in einfacher Stellung geben zumeist wenig anschauliche Bilder, weil dabei im allgemeinen die Projektionen mehrerer Kanten und Flächen zusammenfallen (vgl. z. B. Fig. 57). Jedoch kann der Körper leicht durch mehrfache Verschiebung parallel zu den Bildebenen (Tafeln) und mehrfache Drehungen um Achsen, die zu einer Bildebene senkrecht sind, sog. Tafellote, in eine allgemeinere Stellung übergeführt werden, in der wir sehr anschauliche Bilder von dem Körper erhalten.

Aufgabe 1. Ein Würfel soll aus einer einfachen Anfangsstellung durch Parallelverschiebung zu den Tafeln und durch Drehung um Tafellote in eine allgemeinere Stellung übergeführt und seine Projektion gezeichnet werden (Fig. 65).

I. Wir gehen von der in Fig. 65a gekennzeichneten einfachen

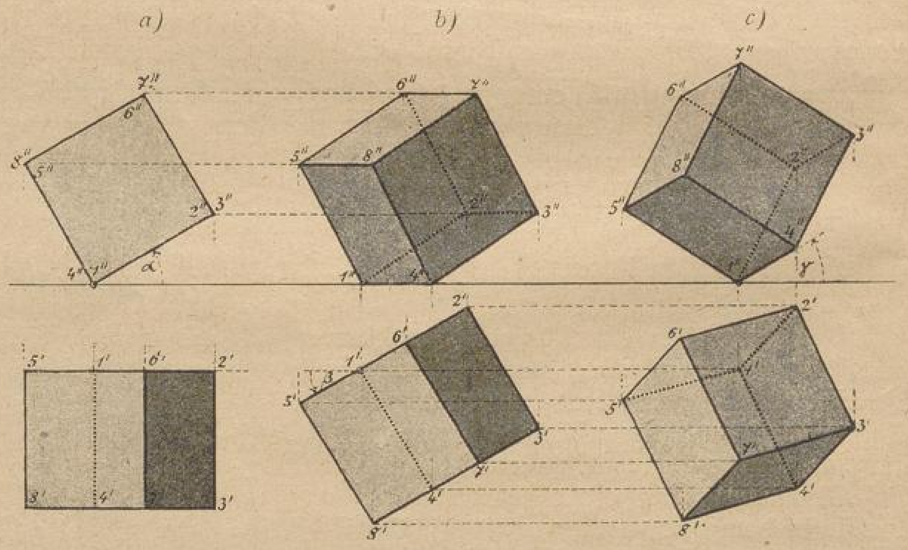


Fig. 65.

Stellung des Würfels aus, die sich aus der Frontstellung ergibt, wenn wir den Körper parallel zur zweiten Tafel verschieben und ihn

[1]) Statt 3,1415927 ... r. Der Fehler ist also kleiner als $\frac{6}{100000} = \frac{3}{50000}$ des Durchmessers. $s = r\,tg\,30° = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

dann um die Kante 1 4, die ein Lot zur zweiten Tafel ist, als Achse um den Winkel α drehen. Der Aufriß verändert dabei nicht seine Gestalt, bleibt also ein Quadrat, das gegen die Achse um den Winkel α gedreht ist. Die Grundrißpunkte verschieben sich dabei parallel zur Achse; sie liegen senkrecht unter den zugehörigen Aufrißpunkten.

II. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zu der ersten Tafel drehen wir den Würfel um das durch die Ecke 1 gehende erste Tafellot um den Winkel β (Fig. 65 b). Der Grundriß erfährt dadurch keine Änderung in seiner Gestalt, er wird um den Punkt 1′ um Winkel β gedreht. Die Eckpunkte bewegen sich bei der vorgenommenen Drehung parallel zur Grundebene. Ihre Aufrisse liegen demnach auf den durch die Aufrißpunkte in der Stellung a) gezogenen Parallelen zur Achse. Sie ergeben sich durch Hinaufloten aus dem Grundriß.

III. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zur zweiten Tafel drehen wir endlich den Würfel um das durch Eckpunkt 1 gehende zweite Tafellot um den Winkel γ (Fig. 65 c). Der Aufriß erleidet dadurch nur eine Drehung um γ um den Punkt 1″; seine Gestalt bleibt erhalten. Da sich die Eckpunkte des Würfels bei der Drehung parallel zur zweiten Tafel bewegen, so bleiben ihre zweiten Abstände erhalten. Ihre Grundrisse verschieben sich mithin nur parallel zur Achse, liegen also auf Parallelen zur Achse. Die Grundrisse der Ecken finden wir schließlich aus ihren Aufrissen durch Herunterloten.

Aufgabe 2. a) Ein regelmäßig-sechsseitiges Prisma (einen geraden Zylinder), b) eine regelmäßig-nseitige Pyramide (Kegel) aus einer einfachen Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung überzuführen und darzustellen.

Anmerkung. Ein einfacheres Verfahren zur Darstellung eines Körpers in allgemeiner Lage lehrt § 22.

§ 17. Darstellung der Ebene durch Spuren. Gerade und Punkte in der Ebene. Tafelneigung einer Ebene.

1) Eine unbegrenzte Ebene $\mathfrak{E}$ (Fig. 66) kann nicht wie Punkt und Gerade durch Projektion auf die Bildebenen dargestellt werden. Denn man bekäme im allgemeinen als ihre Projektion wieder die Bildebene. Man pflegt deshalb eine solche Ebene, da sie durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist, durch ihre **Spuren** e_1 und e_2 auf den Projektionsebenen, das sind ihre Schnittgeraden mit den Projektionsebenen, darzustellen (Fig. 67). Die Schnittgerade e_1

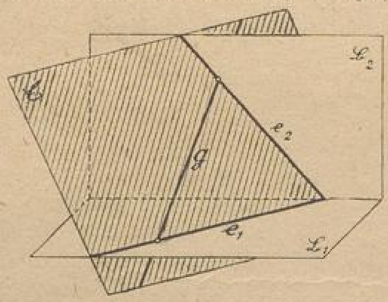


Fig. 66.

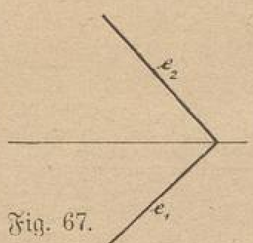


Fig. 67.

heißt die **erste,** e_2 die **zweite Spur.** Die beiden Spuren treffen sich in einem Punkte auf der Achse (Grund?).

Übungen. Stelle eine Ebene $\mathfrak{E}$ im Schrägbilde dar und zeichne daneben ihre Spuren in senkrechter Projektion, wenn $\mathfrak{E}$

a) zur ersten Bildebene senkrecht steht und schief zur zweiten ist;
b) zur zweiten Bildebene senkrecht steht und schief zur ersten ist;
c) zu einer Bildebene, etwa $\mathfrak{B}_2$, parallel ist;
d) zur Achse parallel ist;
e) zur Achse senkrecht ist.

Wie verlaufen die Spuren paralleler Ebenen? (Schrägbild!)

2) Gerade in der Ebene.

Liegt eine Gerade g (Fig. 66) in einer Ebene (e_1, e_2), so kann sie die Bildebenen nur in den Spuren der Ebene $\mathfrak{E}$ durchstoßen, und die Durchstoßpunkte sind zugleich die Spurpunkte der Geraden. Daraus ergibt sich:

Eine Gerade liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn ihre Spurpunkte in den gleichnamigen Spuren der Ebene liegen.

Umgekehrt geht eine Ebene durch eine Gerade, wenn ihre Spuren durch die gleichnamigen Spurpunkte der Geraden hindurchgehen (Fig. 66).

Aufgabe 1. Von einer in der Ebene $\mathfrak{E} = (e_1 e_2)$ liegenden Geraden g ist die erste Projektion g_1 gegeben. Die zweite Projektion g_2 zu bestimmen.

Zur Lösung s. Fig. 72.

g_1 schneidet e_1 in G und die Achse in A_x. Der zweite Spurpunkt liegt senkrecht über A_x auf e_2. Zeichnung!

Aufgabe 2. Die Spuren der Ebene zu zeichnen, die durch zwei sich schneidende Gerade $g = (g_1, g_2)$ und $h = (h_1, h_2)$ bestimmt ist.

Die erste Spur e_1 (Fig. 68) der gesuchten Ebene muß durch die ersten Spurpunkte G_1 und H_1 von g und h gehen, ebenso e_2 durch G_2 und H_2. Die gefundenen Spuren e_1 und e_2 müssen sich auf der Achse treffen.

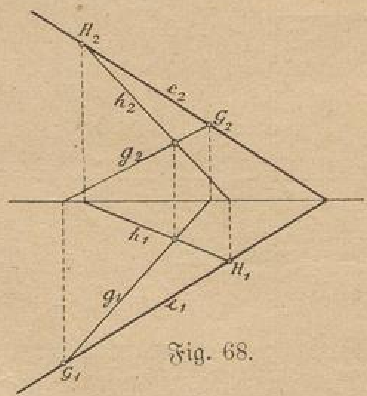


Fig. 68.

Aufgabe 2a. Löse Aufg. 2 für den Fall, daß die gegebenen Geraden parallel sind.

Anmerkung. Liegt ein Spurpunkt einer Geraden nicht auf der Zeichenfläche, so benutzt man eine Hilfsgerade, die die beiden gegebenen Geraden schneidet.

Aufgabe 3. Die Schnittlinie zweier durch ihre Spuren (e_1, e_2) und (f_1, f_2) gegebenen Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ zu bestimmen.

Aus dem Schrägbilde (Fig. 69) erkennt

man, daß die Schnittpunkte G_1 und G_2 der gleichnamigen Spurgeraden zugleich die Spurpunkte der gesuchten Schnittgeraden g sind. Lösung s. Fig. 70 (vgl. § 12, Aufg. 2).

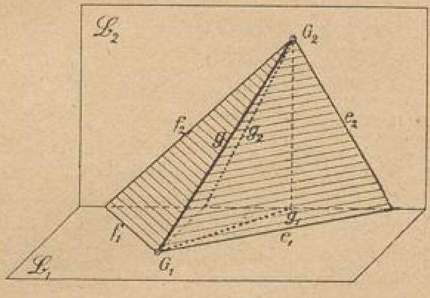


Fig. 69.

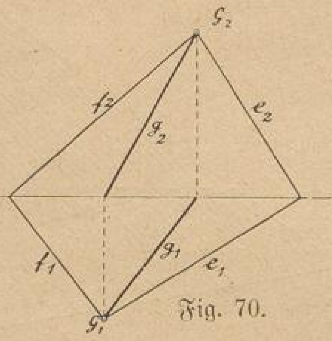


Fig. 70.

Stehen die beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ senkrecht zur ersten Bildebene, so ist auch die Schnittgerade g senkrecht (L. I. § 72, 3b) zu ihr (Fig. 71).

3) Punkte in der Ebene.

Als Bindeglied zwischen Punkt und Ebene benutzt man die Gerade. **Ein Punkt liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn er auf einer in ihr beliebig gezogenen Geraden liegt und umgekehrt.**

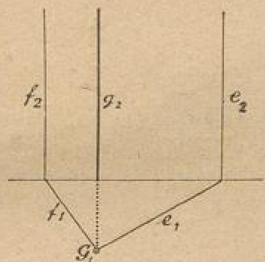


Fig. 71.

Aufgabe 4. Von einem auf der Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist die erste Projektion P_1 gegeben. Die zweite Projektion zu bestimmen (Fig. 72).

Durch P_1 zieht man die Gerade g_1, die man als erste Projektion einer durch P in $\mathfrak{E}$ gezogenen Geraden betrachtet, bestimmt nach Aufg. 1 ihren Aufriß g_2 und erhält durch Hinaufloten den Aufriß P_2.

Wie kann man also feststellen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt oder nicht?

In der Regel benutzt man zur Vereinfachung der Konstruktion nicht eine beliebige Gerade der Ebene, sondern eine **Tafelparallele,** d. h. eine Gerade, die entweder der ersten Tafel $\mathfrak{B}_1$ **(erste Tafelparallele)** oder der zweiten Tafel $\mathfrak{B}_2$ **(zweite Tafelparallele)** parallel ist.

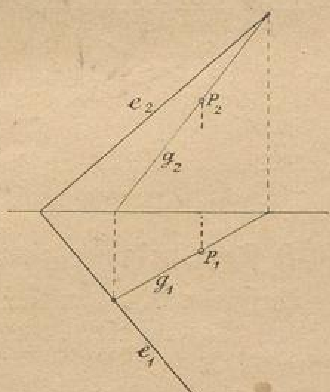


Fig. 72.

In Fig. 74 ist die Aufg. 4 mit Hilfe der ersten Tafelparallelen gelöst. Die durch P gehende erste Tafelparallele t (s. das Schrägbild Fig. 73) hat als erste Projektion t_1 eine Parallele zu e_1 (L. I. § 71, 1), als zweite t_2 eine Parallele zur Achse. Wo liegt ihre erste Spur? Löse die Aufgabe auch mit Hilfe der zweiten Tafelparallelen.

Welche Sätze gelten für die Projektionen der Tafelparallelen einer Ebene?

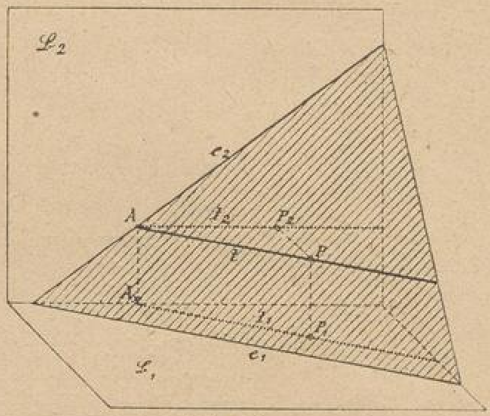


Fig. 73.

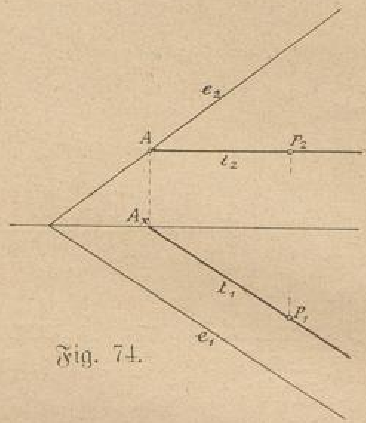


Fig. 74.

Aufgabe 5. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch eine Gerade (g_1, g_2) und einen Punkt (P_1, P_2) hindurchgeht (Fig. 75).

Die Aufgabe wird auf Aufg. 2 zurückgeführt, indem man durch Punkt P eine Gerade legt, die die gegebene Gerade in einem Punkte $Q = (Q_1, Q_2)$ schneidet. Am bequemsten benutzt man eine Tafelparallele, z. B. die Parallele zur zweiten Bildebene t_1, t_2 (zweite Spurparallele).

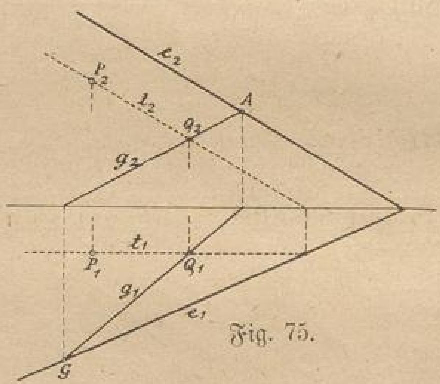


Fig. 75.

Aufgabe 6. Die Spuren einer beliebigen Ebene zu zeichnen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1, P_2) geht.

Aufgabe 7. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1. P_2) geht und einer gegebenen Ebene (e_1, e_2) parallel ist.

4) Tafelneigung einer Ebene.

Aufgabe 8. Den Neigungswinkel einer Ebene $E = (e_1, e_2)$ mit der ersten Tafel (die erste Tafelneigung) zu bestimmen (Fig. 76 und 77).

Um die erste Tafelneigung α_1 zu erhalten, schneide man die Ebene E durch eine zur ersten Spur e_1 senkrechte Hilfsebene H. Aus dieser wird durch die Ebene E und die beiden Bildebenen das rechtwinklige Dreieck BA_xA, das sog. **Neigungsdreieck**, herausgeschnitten. Dieses denke man sich um A_xA als Achse gedreht, bis es in die zweite Tafel fällt (B_0A_xA). Dann ist $\sphericalangle A_xB_0A = \alpha_1$ die gesuchte Tafelneigung.

Lösung. Man fälle (Fig. 77) von dem beliebigen Punkte A der Spur e_2 auf die Achse das Lot AA_x, ebenso von A_x auf die erste Spur e_1 das Lot A_xB und beschreibe um A_x mit A_xB als Radius

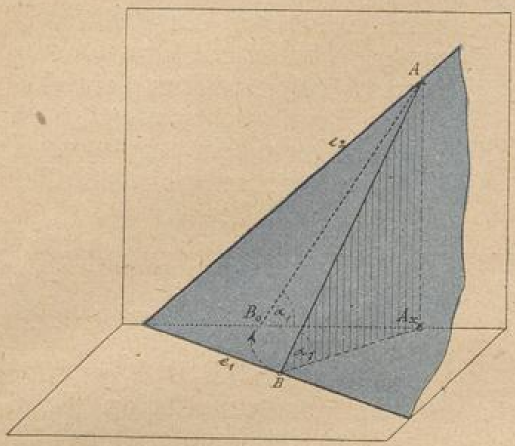


Fig. 76.

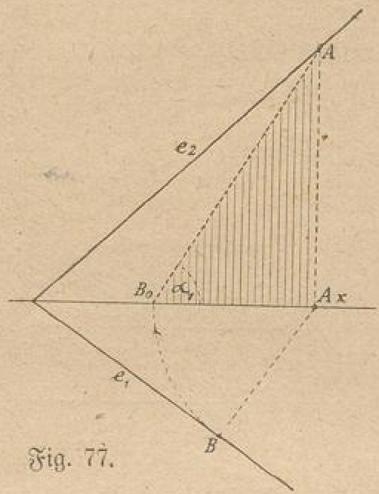


Fig. 77.

den Kreis, der die Achse in B_0 trifft. Dann ist $\sphericalangle AB_0A_x = \alpha_1$. Bestimme entsprechend die zweite Tafelneigung α_2.

Aufgabe 9 (Umkehrung von 8). Von einer Ebene $\mathfrak{E}$ ist die erste Spur e_1 und ihre erste Tafelneigung α_1 gegeben. Die zweite Spur der Ebene zu bestimmen.

§ 18. Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene.

1) Aufgabe 1. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit einer Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ zu bestimmen (Fig. 78).

Die Lösung für die wichtige Aufgabe findet man am besten an der Hand eines Schrägbildes. Durch g lege man eine zur ersten Bildebene senkrechte Hilfsebene $\mathfrak{H}$. Ihre erste Spur h_1 fällt mit g_1 zusammen, ihre zweite h_2 steht senkrecht zur Achse. Da die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ die Gerade g enthält, so liegt der Schnittpunkt S von g mit der gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ auch auf der Schnittgeraden s der Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Der Aufriß S_2 von S ergibt sich daher als Schnittpunkt von g_2 mit s_2. Den Grundriß S_1 des Durchdringungspunktes erhält man endlich durch Herunterloten auf $g_1 = s_1$. Zeichnung!

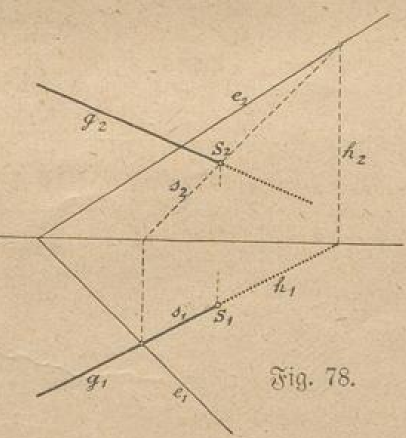


Fig. 78.

Aufgabe 2. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit der Ebene eines Parallelogramms ABCD zu bestimmen.

Als Hilfsebene benutze man wieder die durch g gehende erste Lotebene (vgl. § 14 Aufg. 4).

2) Gerade in senkrechter Lage zu einer Ebene.

Projiziert man (Fig. 79) eine Gerade g, die auf einer Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht steht, senkrecht auf eine Ebene $\mathfrak{B}$, so bildet die Projektion g_1 der Geraden mit der Spur e der Ebene $\mathfrak{E}$ einen rechten Winkel.

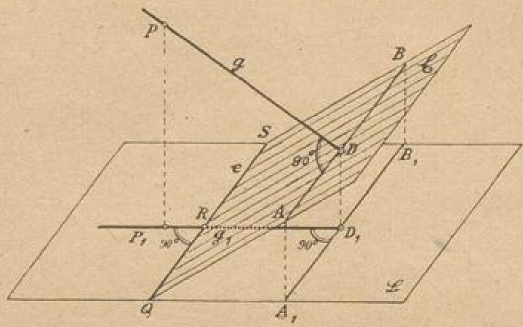


Fig. 79.

Denn zieht man durch den Durchdringungspunkt D der Geraden g die Parallele AB zur Bildebene, so ist, da $A_1D_1 \parallel AD$ und AD senkrecht zur Ebene DD_1P_1P ist, auch A_1D_1 senkrecht zu dieser Ebene (L. I. § 65, 2), folglich zunächst $\sphericalangle\, P_1D_1A_1 = 90°$.[1]) Als Gegenwinkel an Parallelen ist dann auch der von g_1 und der Spur e gebildete Winkel $P_1RQ = 90°$. Daraus folgt:

Die Projektionen einer Geraden, die zu einer Ebene senkrecht steht, schneiden die gleichnamigen Spuren der Ebene unter rechten Winkeln.

Aufgabe 3. Von einem gegebenen Punkte $P = (P_1, P_2)$ auf eine Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ das Lot zu fällen und den Abstand des Punktes von der Ebene zu bestimmen (Fig. 80). (Schrägbild!)

Von P_1 und P_2 hat man die Senkrechten zu den gleichnamigen Spuren der Ebene zu zeichnen, um die erste und zweite Projektion des gesuchten Lotes zu erhalten. Die Projektionen des Fußpunkts D des Lotes ergeben sich nach Aufg. 1.

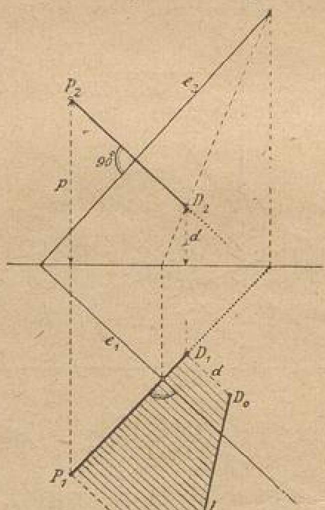


Fig. 80.

Die wahre Länge P_0D_0 des Abstandes $PD = l$ erhalten wir nach § 13, 2 aus dem zur ersten Bildebene senkrechten Trapez P_1D_1DP, das wir in diese Ebene um P_1D_1 als Achse umlegen.

Aufgabe 4. Den Abstand zweier windschiefer Geraden $g = (g_1, g_2)$ und $l = (l_1, l_2)$ zu bestimmen. Anleitung s. L. I. § 69 Aufg. 2.

§ 19. Einführung einer dritten Bildebene.

1) Eine ebene Figur, die in einer zur Bildachse senkrechten Ebene liegt, ist durch ihre beiden Projektionen nicht bestimmt. Ein in

[1]) Das Normalbild eines rechten Winkels, von dem ein Schenkel der Bildebene parallel ist, ist also wieder ein rechter!

solcher Lage befindlicher Kreis z. B. projiziert sich auf beide Bildebenen als eine seinem Durchmesser gleiche Strecke, die keinen sicheren Rückschluß auf das ursprüngliche Gebilde ermöglicht. Welche Projektionen hat ein gerader Zylinder, dessen Achse der Bildachse parallel ist? Um aber auch in solchen Fällen Gebilde, bei denen Flächen in normaler Lage zur Achse vorkommen, nach ihrer Gestalt festlegen zu können, nehmen wir eine dritte Bildebene, die **Seitenrißebene** B_3, zu Hilfe, die wir senkrecht zu B_1 und B_2, also senkrecht zur Bildachse annehmen. Die Projektion auf diese dritte Ebene heißt **dritte Projektion** oder **Seitenriß** (Profil), da sie eine seitliche Ansicht des Körpers wiedergibt. Vgl. Fig. 81, wo ein einfaches Haus mit Walmdach[1]) mit seinen drei Projektionen in schiefer Parallelprojektion gezeichnet ist. Um die drei Projektionen in derselben Zeichenebene darstellen zu können, denken wir uns nach Vereinigung der ersten mit der zweiten Bildebene die Seitenrißebene um OZ gedreht, bis sie in die Aufrißebene fällt. Wir erhalten dann die in Fig. 82 gegebene Darstellung.

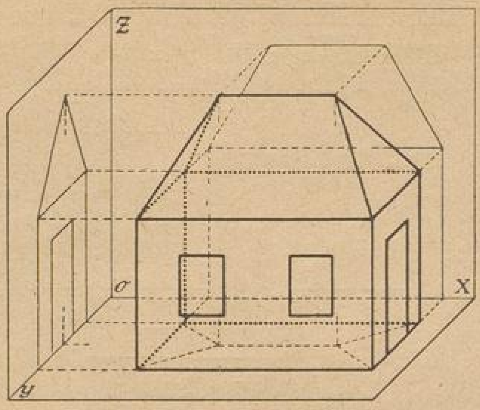


Fig. 81.

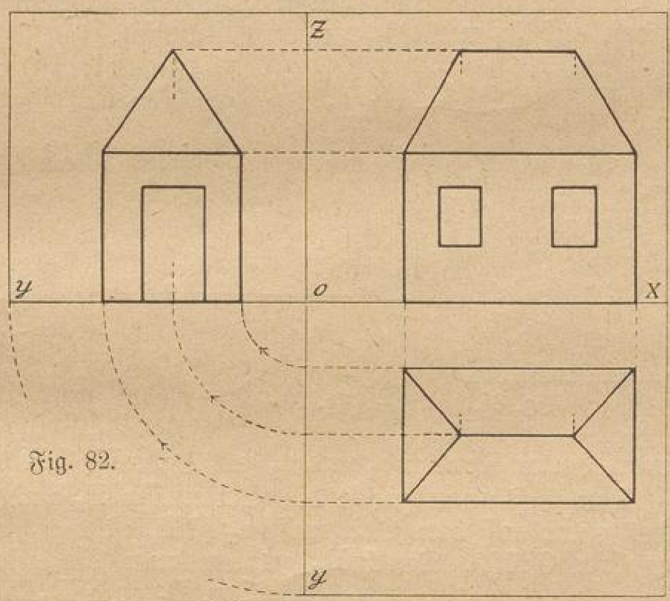


Fig. 82.

Durch das Hinzutreten von B_3 ergeben sich zwei neue Bildachsen (OY und OZ), die wir als y- oder Tiefenachse und z- oder Höhenachse unterscheiden (s. § 6, 1).

2) Aufgabe 1. Aus den beiden Projektionen P_1 und P_2 eines Punktes P die dritte P_3 zu bestimmen (Fig. 83 und 84).

[1]) Ein Walm- oder holländisches Dach entsteht aus einem einfachen zweiseitigen Dach dadurch, daß an Stelle der Giebel Dachflächen gesetzt werden, so daß die 4 Traufkanten auf gleicher Höhe liegen. Walm = schräg zurücktretender Dachgiebel.

Man fälle auf die Achse OZ das Lot P_2P_z und trage auf der Verlängerung $P_zP_3 = P_1P_x$ ab. Andere Lösung s. Fig.

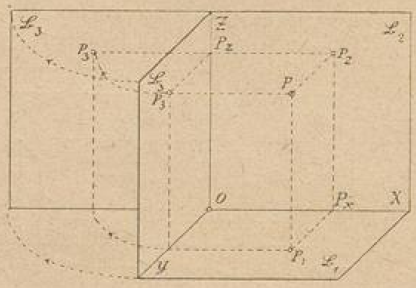


Fig. 83.

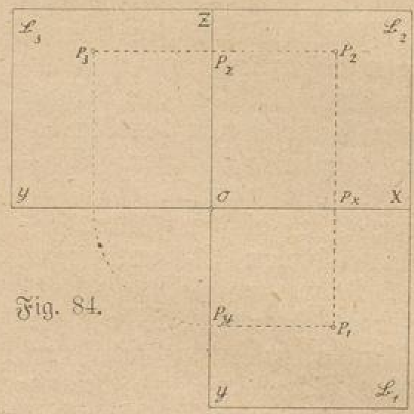


Fig. 84.

Aufgabe 2. Aus den beiden ersten Projektionen g_1 und g_2 einer Geraden die dritte g_3 zu bestimmen.

Man bestimme die dritten Projektionen der Spurpunkte der Geraden auf $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ und verbinde sie.

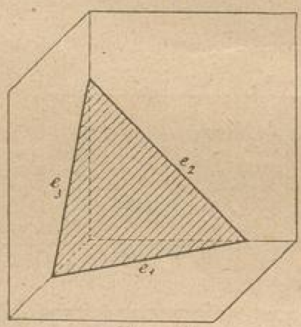


Fig. 85.

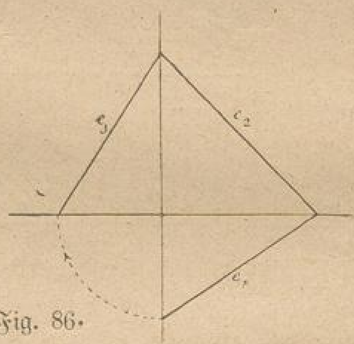


Fig. 86.

Aufgabe 3. Die dritte Spur e_3 einer Ebene (e_1, e_2) zu zeichnen.

Lösung s. Fig. 86, Darstellung in schiefer Parallelprojektion s. Fig. 85.

3) **Aufgabe 4.** Den Abstand eines Punktes P von einer Ebene $\mathfrak{E}$ zu bestimmen, deren Spuren e_1 und e_2 zur Bildachse OX parallel sind (Fig. 87).

Man bestimme zuerst die Seitenrisse P_3 und e_3. Das Lot P_3D_3, das man auf den Seitenriß e_3 fällt, ist der gesuchte Abstand in wahrer Größe. Durch D_3 gewinnt man die erste und zweite Projektion D_1 und D_2 des Lotfußpunktes.

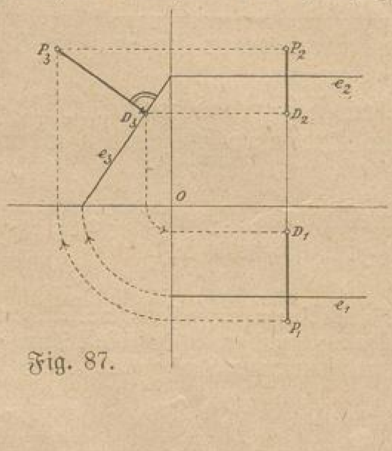


Fig. 87.

4) Die Lösung vieler Aufgaben erfährt durch die Einführung einer in jedem einzelnen Falle besonders zu wählenden beliebigen seitlichen Ebene, die zu einer Bildebene senkrecht ist, eine wesentliche Vereinfachung (vgl. auch § 21, Aufg. 4). Die Benutzung einer eigentlichen Seitenrißebene wäre dabei zwecklos.

Aufgabe. Von zwei Quadern I und

II, deren Kantenlängen gegeben sind, liegt der eine (I) mit einer Seitenfläche, der andere (II) nur mit der Kante $\overline{12}$ in der Grundebene und stützt sich mit einer Fläche auf die Kante 34 des ersten. Man soll die Projektionen des zweiten Quaders zeichnen (Fig. 88).

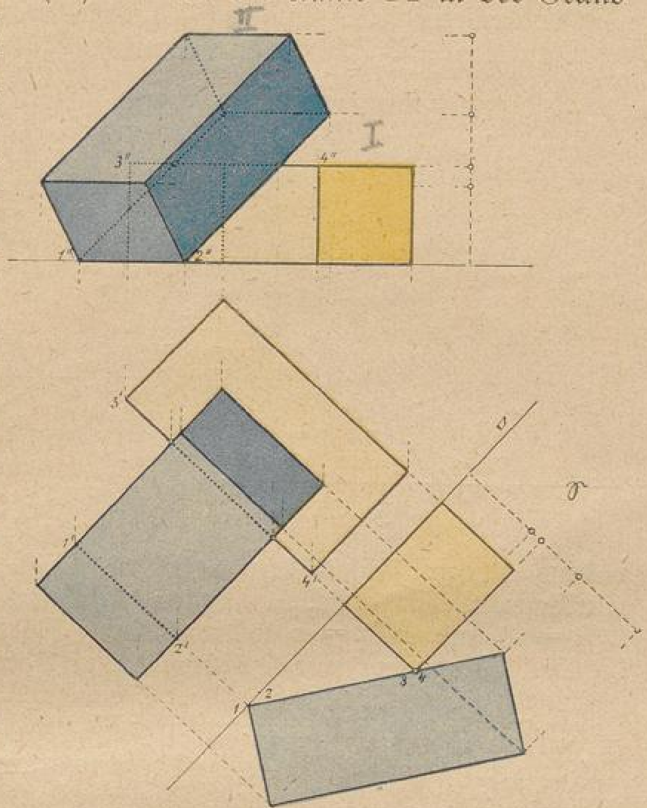


Fig. 88.

Wir wählen eine zu den Kanten $\overline{12}$ und $\overline{34}$ senkrechte dritte Bildebene S, die die Grundrißebene in der Spur s schneidet, und legen S, um die Zeichnung in derselben Zeichenebene ausführen zu können, um ihre Spur s in die Grundebene um. Da die Kantenlängen beider Körper gegeben sind, so können wir mit Hilfe des Grundrisses von I und aus der Lage der Kante $\overline{12}$ von II die Projektion der beiden Quader auf S leicht zeichnen. Wie kann daraus der Grundriß und Aufriß von II gefunden werden?

§ 20. Umlegung ebener Figuren und Bestimmung ihrer wahren Gestalt. Affinität.

1 a) Um die wahre Gestalt einer durch ihre Projektionen gegebenen ebenen Figur zu erhalten, denken wir uns die Ebene, in der die Figur liegt, um eine Spur (z. B. e_1) als Achse in die zugehörige Bildebene (B_1) umgelegt und bestimmen dann in der sich ergebenden Lage die ebene Figur.

Die Lösung dieser Aufgabe beruht, da eine ebene Figur durch die Lage ihrer Eckpunkte bestimmt ist, auf der Lösung der folgenden

Grundaufgabe: Einen in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gegebenen Punkt $P = (P_1, P_2)$ in die Grundebene umzulegen, d. h. man soll die Lage P_0 bestimmen, die P erhält, wenn die Ebene E um e_1 als Achse in die erste Bildebene umgeklappt wird.

Denken wir uns an der Hand des Schrägbildes (Fig. 89) die Ebene

$\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ um e_1 gedreht, dann beschreibt der in $\mathfrak{E}$ gelegene Punkt P einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht zu e_1 ist. Mithin fällt P nach vollendeter Umlegung auf die Verlängerung des von P_1 auf e_1 gefällten Lotes P_1B. Die Entfernung $P_0B = PB$, der **Drehungs-**

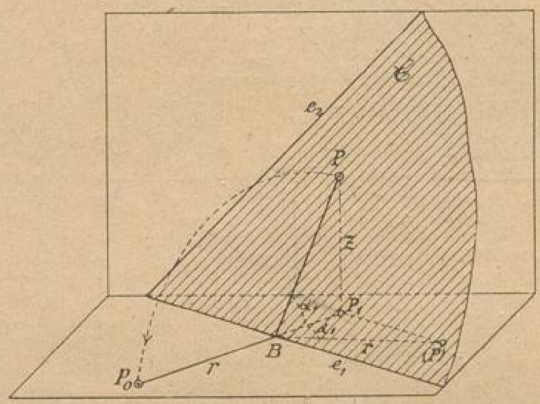


Fig. 89.

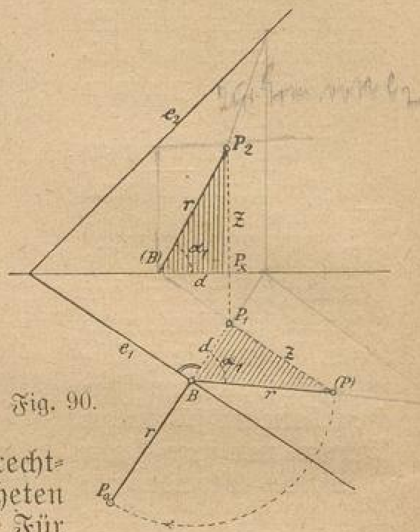


Fig. 90.

radius r, ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks PP_1B, dessen Katheten $P_1B = d$ und $PP_1 = z$ bekannt sind. Für die Ermittlung von r wird das Dreieck um BP_1 in die erste Bildebene umgeklappt, so daß man das schraffierte Dreieck $P_1(P)B$ erhält. $\sphericalangle P_1B(P) = \alpha_1$ ist die erste Tafelneigung der Ebene $\mathfrak{E}$.

Für die Konstruktion des Drehungsradius r merken wir uns den Satz: D e r D r e h u n g s r a d i u s e i n e s i n d i e e r s t e B i l d e b e n e u m g e l e g t e n P u n k t e s P i s t d i e H y p o t e n u s e e i n e s r e c h t w i n k l i g e n D r e i e c k s, d e s s e n e i n e K a t h e t e g l e i c h d e m A b s t a n d e d e r e r s t e n P r o j e k t i o n d e s P u n k t e s P v o n d e r U m d r e h u n g s a c h s e u n d d e s s e n a n d e r e K a t h e t e g l e i c h s e i n e m e r s t e n T a f e l a b s t a n d i s t.

Zur Lösung (Fig. 90) fälle man von P_1 auf e_1 das Lot P_1B und beschreibe mit dem Drehungsradius r um B den Kreis, der das über B verlängerte Lot P_1B in P_0 trifft.[1]) Der Drehungsradius r kann auch aus dem Dreieck $P_2(B)P_x$, wo $(B)P_x = BP_1$ ist, bestimmt werden, was bei vielen Anwendungen bequemer ist.

Für die Lösung der Aufg. ist die A n g a b e d e r z w e i t e n S p u r e_2 n i c h t e r f o r d e r l i c h. Wie kann diese bestimmt werden, wenn e_1, P_1 und P_2 gegeben ist? (Spurparallele!)

Aufgabe 1. Die wahre Größe des Winkels zweier sich schneidender Geraden g und h, deren Projektionen (g_1, g_2) und (h_2, h_2) gegeben sind, zu ermitteln.

---

[1]) Daß die Punkte P_1BP_0 scheinbar nicht auf einer Geraden liegen, beruht auf einer lehrreichen optischen Täuschung.

Zeichne die erste Spur der durch g und h bestimmten Ebene und lege um sie den Scheitel des Winkels in die erste Bildebene um.

Aufgabe 2. Von einem in Grund- und Aufriß gegebenen Walmdach die wahren Größen der Dachflächen und ihre Neigungswinkel mit der Grundebene zu bestimmen (Fig. 91).

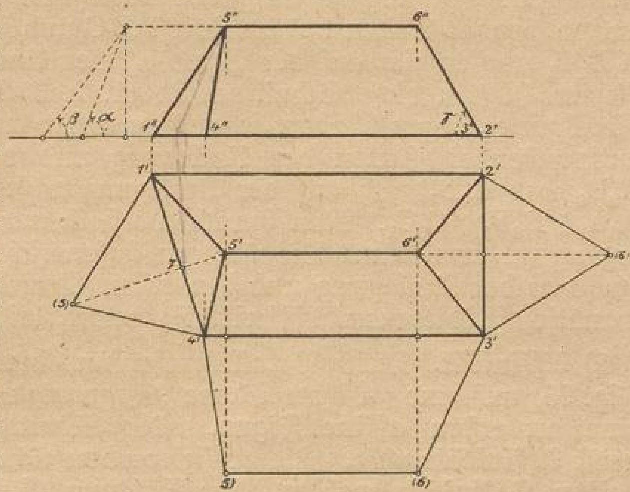


Fig. 91.

Das Trapez $1'2'3'4'$ bildet die erste Projektion der vier Traufkanten. Die Firstlinie $\overline{56}$ verläuft parallel und symmetrisch zu den Traufkanten $\overline{12}$ und $\overline{43}$. Die wahre Größe des Dachdreiecks 145 erhält man durch Umlegung um die Traufkante $\overline{14}$ in die Grundebene, wobei nur die Umlegung des Punktes 5 zu ermitteln ist. Der Winkel $5\,7\,5' = \alpha$ ist der Neigungswinkel der Dachfläche. Wie findet man die gesuchten Größen für die übrigen Dachflächen?

b) **Aufgabe 3.** Die wahre Gestalt $A_0B_0C_0$ eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC durch Umlegung in die Grundebene zu bestimmen (Fig. 92).

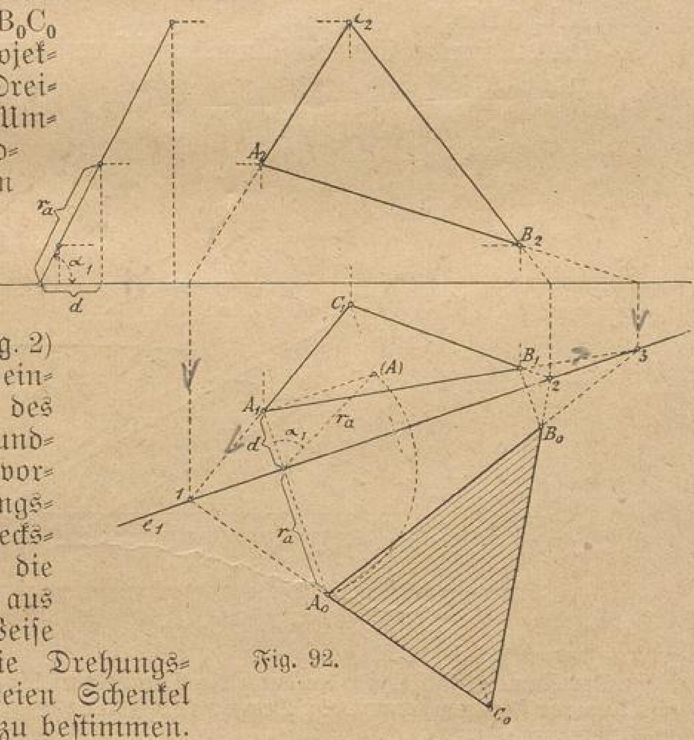


Fig. 92.

Man ermittle zunächst die Grundrißspur e_1 der Dreiecksebene (§ 17, Aufg. 2) und lege dann die einzelnen Eckpunkte des Dreiecks nach der Grundaufgabe um. Es ist vorteilhaft, den Neigungswinkel α_1 der Dreiecksebene gegen $\mathfrak{B}_1$ an die Bildachse in der aus Fig. 92 ersichtlichen Weise anzutragen und die Drehungsradien auf dem freien Schenkel von α_1 gleichzeitig zu bestimmen.

Zwischen der Umlegung $A_0B_0C_0$ des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ besteht eine einfache geometrische Beziehung (Verwandtschaft), die eine genauere und wesentlich bequemere Lösung aller ähnlichen Aufgaben ermöglicht. Die Verlängerungen entsprechender Seiten des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ müssen sich auf der Spur e_1, der Umlegungsachse schneiden (Grund?). Da diese Schnittpunkte (1, 2, 3) bei der Umlegung um die Spur e_1 liegen bleiben, so müssen daher auch die Verlängerungen entsprechender Seiten der Umlegung und des Grundrisses (z. B. A_0B_0 und A_1B_1) sich auf der Umlegungsachse schneiden. Ferner ist $A_0A_1 \parallel B_0B_1 \parallel C_0C_1$. Man braucht deshalb nur einen Punkt der Umlegung zu ermitteln. Die übrigen lassen sich dann auf Grund der zwischen der Umlegung und der ersten Projektion bestehenden Verwandtschaft, die man Affinität[1]) nennt, leicht finden.

2) Affinität. Durch Parallelprojektion einer ebenen Figur (ABC, Fig. 93) auf eine zu ihrer Ebene (E) geneigte Ebene (B) ergibt sich eine zur ersten **affine Figur.** Die Schnittgerade beider Ebenen heißt **Affinitätsachse.** Die projizierenden Strahlen (AA_1, BB_1, CC_1) heißen **Affinitätsstrahlen,** ihre Richtung (AA_1) **Affinitätsrichtung.** Zwischen zwei affinen Figuren, z. B. ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 93), bestehen folgende Beziehungen:

1. Jedem Punkte der einen Figur entspricht ein Punkt der andern (A_1 und A).
2. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel ($AA_1 \parallel BB_1$).
3. Entsprechende Gerade schneiden sich auf der Affinitätsachse (CA und C_1A_1).

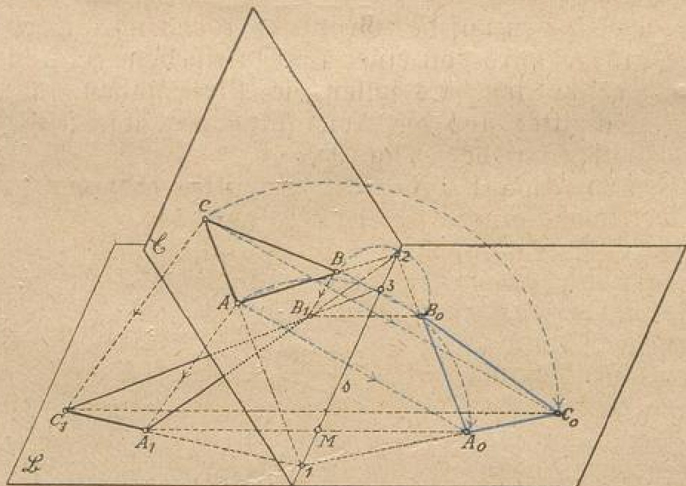


Fig. 93.

---

[1]) Der Name Affinität für die durch die Parallelprojektion herstellbare Verwandtschaft ebener Figuren stammt von Leonhard Euler (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg).

Diese Eigenschaften bleiben auch erhalten, wenn die Ebene E um die Spur s in die Ebene B umgelegt wird, so daß $\triangle$ ABC die Lage $A_0B_0C_0$ annimmt (Beweis!). $\triangle A_0B_0C_0$ kann auch als Parallelprojektion von ABC aufgefaßt werden (Beweis!). Damit haben wir den Satz:

Die Umlegung einer ebenen Figur und ihre erste Projektion sind affine Gebilde mit ihrer ersten Spur als Affinitätsachse.

Eine Affinität ist bestimmt durch die Achse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P'.

Aufgabe. Zu dem Dreieck ABC (Fig. 94) in seiner Ebene das affine Dreieck zu zeichnen, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P' gegeben sind.

Bemerkung. Betrachten wir $A_1B_1C_1$ in Fig. 93 als Grundfigur eines Prismas, dessen Seitenkanten die Affinitätsstrahlen sind, so können wir ABC als schiefen Schnitt durch den Körper und $A_0B_0C_0$ als die Umlegung des Schnittes ansehen. Denken wir uns nun noch den Schnitt senkrecht auf die Bildebene B projiziert, so ist die Grundfigur nicht nur mit der senkrechten Projektion des Schnittes, sondern auch mit dessen Umlegung für die Spur der Schnittebene als Affinitätsachse affin.

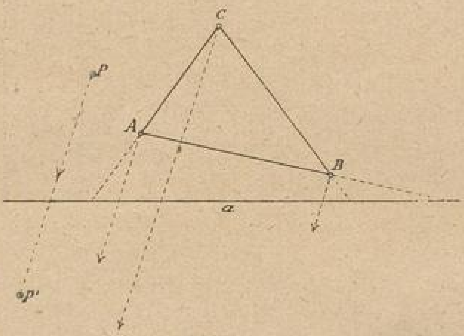


Fig. 94.

§ 21. Darstellung ebener Körperschnitte. Abwicklung.

1) Aufgabe 1. Ein auf der Grundebene stehendes gerades vierseitiges Prisma wird von einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $E = (e_1, e_2)$ geschnitten. Es sollen die Projektionen und die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des schief abgeschnittenen Prismas ermittelt werden (Fig. 95).

Die erste Projektion 1'2'3'4' des Schnittes fällt mit dem Grundriß des Körpers zusammen, während die zweite 1''2''3''4'' in die zweite Spur der Schnittebene fällt (Grund?). Die wahre Gestalt des Schnittes 1 2 3 4 finden wir durch Umlegung sämtlicher Eckpunkte in die Grundrißebene. Die Umlegung (1) von 1 liegt auf der von 1' zur Umlegungsachse e_1 gezogenen Senkrechten, und zwar im Abstande des zugehörigen Drehungsradius r von e_1. Dieser kann, da der von e_2 und der x-Achse gebildete Winkel α_1 gleich der ersten Tafelneigung der Schnittebene ist, unmittelbar aus dem Aufriß entnommen werden, $r = \overline{X1''}$.

Um (1) zu erhalten, beschreiben wir um X mit $\overline{X1''} = r$ als Radius den Kreis, der die Bildachse in (1'') trifft und loten diesen Punkt auf die von 1' zu e_1 gezogene Senkrechte herunter. Entsprechend können wir die Umlegungen der anderen Punkte gewinnen. Einfacher und schneller kommen wir jedoch zum Ziele durch Benutzung der zwischen den Figuren (1) (2) (3) (4) und $1'2'3'4'$ bestehenden Affinität (s. Bem. § 20).

Um die Abwicklung des Mantels des schief abgeschnittenen Prismas zu erhalten, tragen wir auf einer Geraden die Seiten der Grundfigur nacheinander auf, errichten in den Endpunkten die Lote und tragen auf ihnen die Längen der zugehörigen Seitenkanten ab, die sich unmittelbar aus dem Aufriß ergeben, und verbinden die aufeinander folgenden Endpunkte.

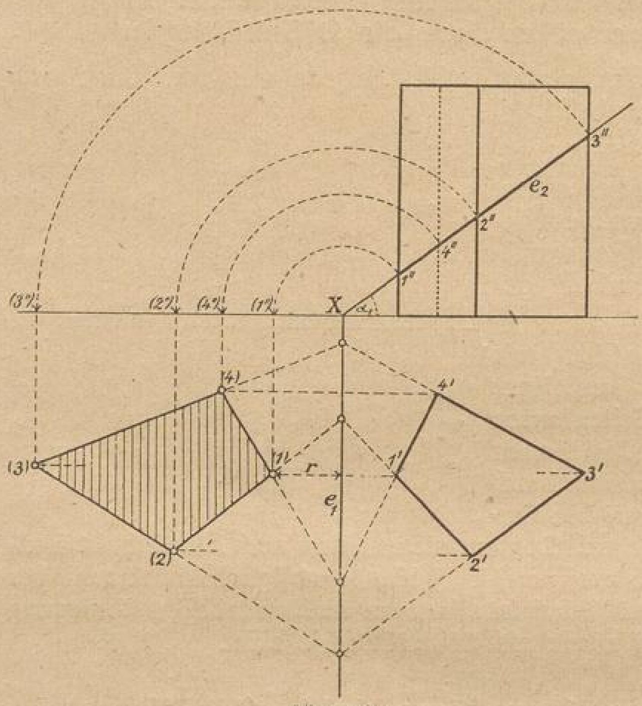


Fig. 95a.

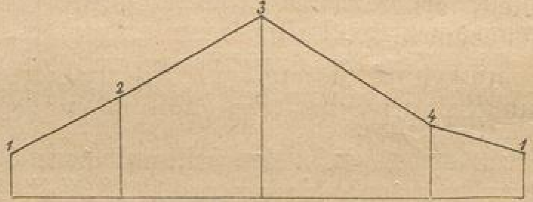


Fig. 95 b.

Aufgabe 2. Den Schnitt eines regelmäßig-sechsseitigen Prismas, das auf der Grundebene steht,

a) mit einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $\mathfrak{E}$,

b) mit einer beliebigen schiefen Ebene $\mathfrak{E}$ zu bestimmen,

ferner die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des Mantels samt der Schnittlinie zu zeichnen.

Bemerkung zu b). Die zweiten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur werden recht bequem mit Hilfe von ersten Spurparallelen (s. § 17, 3) bestimmt. Die Lösung kann durch Benutzung einer zu e_1 senkrechten Seitenebene sehr vereinfacht werden (vgl. Aufg. 4).

Aufgabe 3. Den Schnitt eines geraden Kreiszylinders, dessen Grundkreis in der ersten Bildebene liegt, mit einer zu $\mathfrak{B}_2$ senkrechten Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ zu bestimmen und den Zylindermantel samt der Schnittlinie in die Ebene auszubreiten (Fig. 96).

Wir führen die Aufgabe auf die entsprechende für das Prisma (s. Aufg. 1) zurück, indem wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, z. B. 12, teilen und die zugehörigen Mantellinien zeichnen. Die Schnittfigur ist eine Ellipse (§ 8 Anm. 2), deren erste Projektion in den Grundkreis und deren zweite in die Spur e_2 fällt. Die Gestalt der Ellipse in wahrer Größe ergibt sich wie beim Prisma durch Umlegung (Affinität!).

Denken wir uns den Zylinder längs einer Mantellinie (z. B. der durch 1 gehenden) aufgeschnitten und in die Zeichenebene ausgebreitet, so ergibt sich ein Rechteck, dessen Grundseite gleich dem Umfang des Grundkreises[1]) und dessen Höhe gleich der Zylinderhöhe ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten,

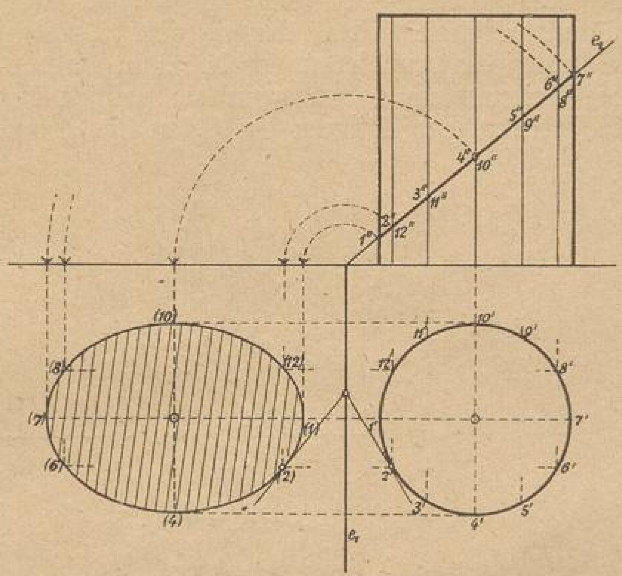


Fig. 96.

teilen wir die Grundseite wieder in 12 gleiche Teile, tragen auf den zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien die zugehörigen Höhen der Ellipsenpunkte ab und verbinden die Endpunkte durch einen freien Kurvenzug.

2) Aufgabe 4. Den Schnitt einer auf B_1 stehenden regelmäßig-sechsseitigen Pyramide mit einer Ebene $E = (e_1, e_2)$ und seine wahre Gestalt zu bestimmen, ferner den Mantel der Pyramide samt Schnittlinie in die Zeichenebene auszubreiten.

I. Lösung. Man bestimmt zunächst nach § 18 Aufg. 1 die zweiten Projektionen der Schnittpunkte, der Seitenkanten mit E und findet durch Herunterloten die zugehörigen ersten Projektionen. Dadurch erhalten wir die Projektionen der Schnittfigur. Ihre wahre Gestalt finden wir durch Umlegung, wobei mit Vorteil die affine Verwandtschaft zwischen Grundriß und Umlegung verwertet werden kann. Wie ergibt sich die Abwicklung des Mantels der Pyramide?

Die Umlegung ebener Figuren geht (ohne Benutzung affiner Beziehungen!) am einfachsten vonstatten, wenn ihre Ebene wie bei Aufg. 1 auf einer Bildebene senkrecht steht. Auf diesen einfachen Fall läßt sich der allgemeine mit beliebiger Ebene leicht zurückführen. Zugleich gestaltet sich dadurch die Bestimmung der Schnittfigur erheblich bequemer.

II. Lösung (Fig. 97). Wir nehmen eine zur ersten Spur e_1 senkrechte dritte Bildebene (Seitenebene) S zu Hilfe. Ihre erste

[1]) S. Rektifikation des Kreises § 15.

Spur s_1 ist dann zu e_1, ihre zweite s_2 zur Bildachse senkrecht. Projizieren wir die Pyramide auf die Seitenebene $\mathfrak{S}$, so müssen die Projektionen der Schnittfigur, da auch $\mathfrak{S} \perp \mathfrak{E}$ ist, auf ihrer Schnittgeraden mit $\mathfrak{E}$ liegen. Die Drehungsradien der Ecken der Schnittfigur projizieren sich dabei in wahrer Größe. Legen wir nun die Seitenebene $\mathfrak{S}$ um s_1 in die Zeichenebene um, so bewegen sich die dritten Projektionen der Ecken der Schnittfigur in Kreisbahnen,

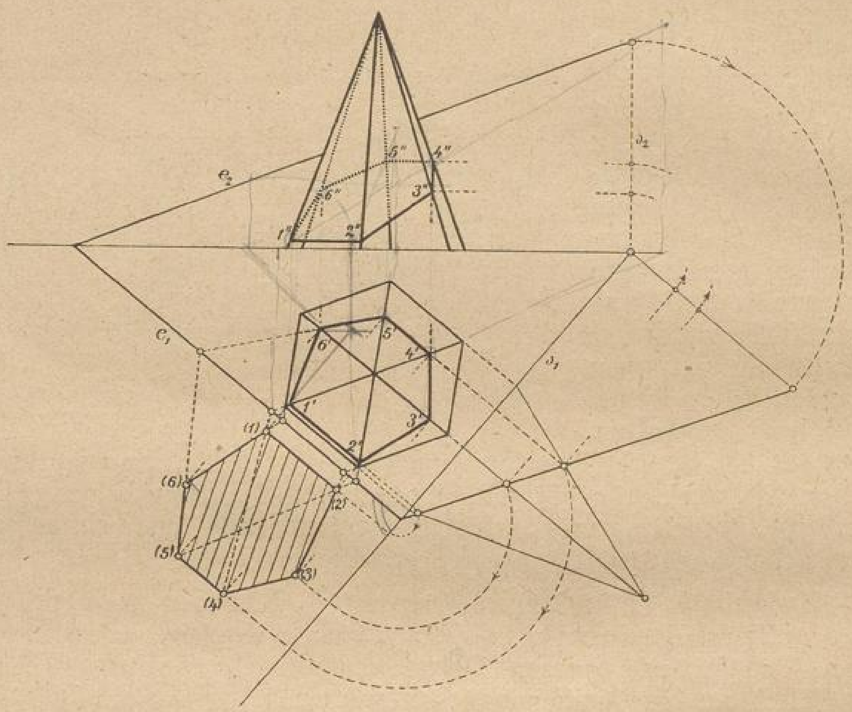


Fig. 97.

die zu s_1 senkrecht sind, liegen also nach der Umklappung mit ihren entsprechenden ersten Projektionen auf je einer Senkrechten zu s_1. Danach gestaltet sich die Lösung der Aufgabe kurz folgendermaßen:

Aus den dritten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur gewinnt man genau wie aus dem Aufriß ($\mathfrak{S}$ als Aufrißebene betrachten!) ihre ersten Projektionen, aus diesen durch Hinaufloten ihre zweiten Projektionen. Die Bestimmung der wahren Größe der Schnittfigur erfolgt entsprechend wie bei Aufg. 1.

3a) **Aufgabe 5.** Den Schnitt eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis in $\mathfrak{B}_1$ liegt, mit einer zu $\mathfrak{B}_2$ senkrechten Ebene $\mathfrak{E}$ zu bestimmen. Ferner soll die Schnittfigur in wahrer Größe und die Abwicklung des Mantels nebst Schnittkurve gezeichnet werden.

1. Geht $\mathfrak{E}$ durch die Spitze S des Kegels, so ist der Schnitt ein Dreieck.

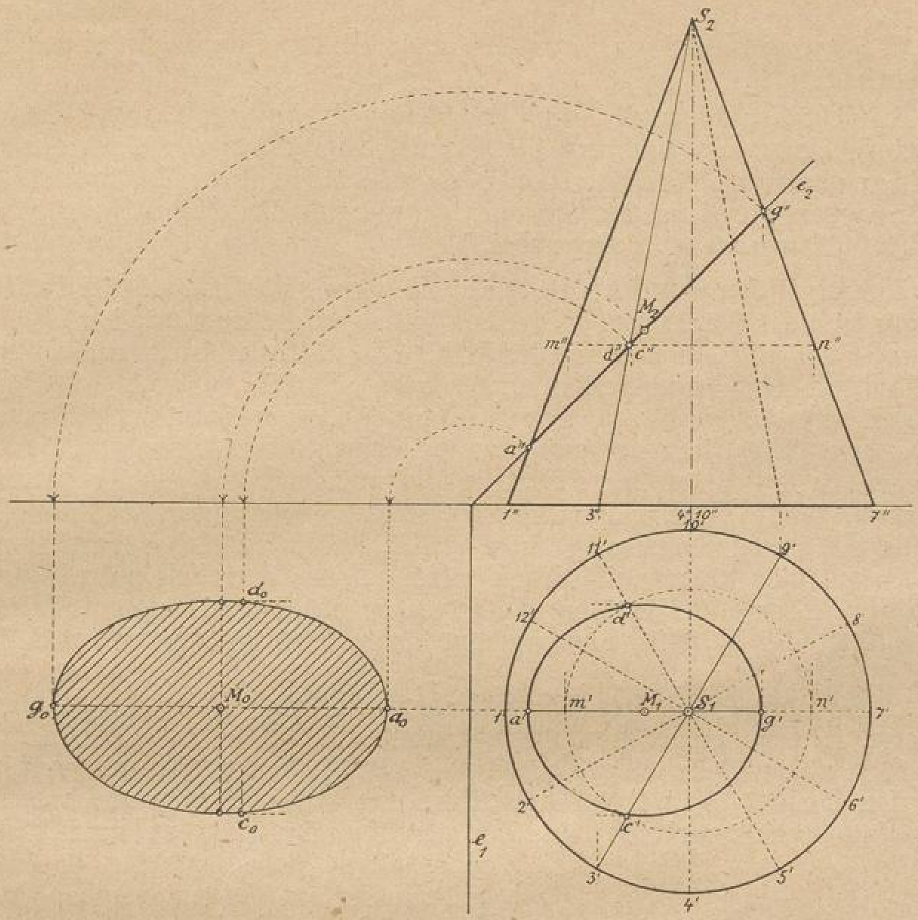


Fig. 98a.

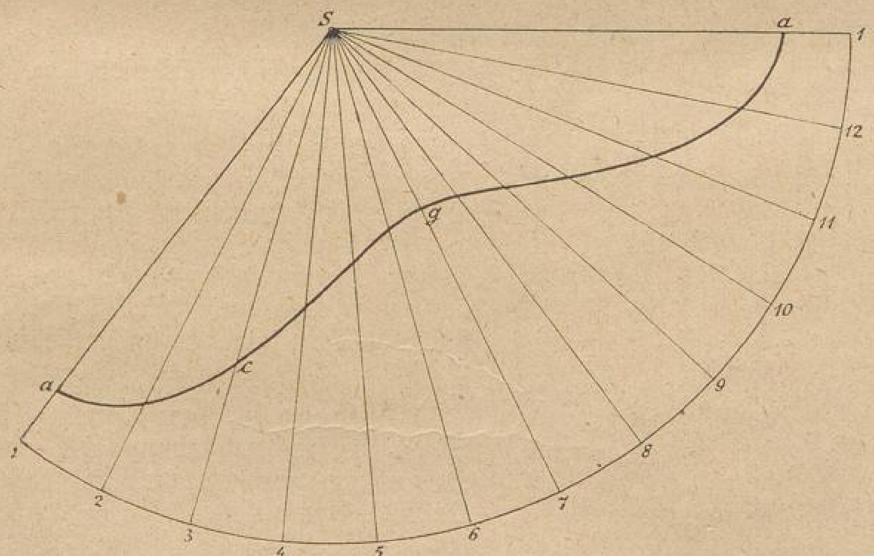


Fig. 98b.

2. Ist E parallel zur Grundebene, so ist der Schnitt ein Kreis[1]) (Darstellung!).

3. Geht E nicht durch S und ist schief zu B_1, so sind drei Fälle zu unterscheiden. Je nachdem die Schnittebene E keiner Seitenlinie, einer oder zwei Seitenlinien parallel ist (also alle schneidet, eine oder zwei nicht schneidet), ergibt sich als Schnittkurve eine **Ellipse, Parabel** oder **Hyperbel.**[1])

I. **Elliptischer Schnitt** (Fig. 98a). Die zweite Projektion der Schnittfigur ist die auf e_2 liegende Strecke a″g″. Zur Bestimmung der ersten Projektion und der wahren Größe der Schnittkurve durch Umlegung teilen wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl, z. B. 12, gleicher Teile und ziehen die zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien. Die erste Projektion des auf einer beliebigen Mantellinie, z. B. S3, liegenden Punktes c der Schnittkurve können wir in doppelter Weise finden. Entweder zeichnen wir die beiden Projektionen der Mantellinie S3, deren zweite a″g″ in c″ trifft, und loten diesen Punkt auf $S_1 3$ herunter, oder wir ziehen durch c″ die Parallele m″n″ zur Achse, die den Aufriß des durch c gehenden zur Grundebene parallelen Schnittkreises darstellt, und zeichnen diesen im Grundriß, wo er $S_1 3'$ in c′ trifft.

Die wahre Größe der Ellipse finden wir durch Umlegung wie in Aufg. 1. Wie erhält man ihren Mittelpunkt M?

Der abgewickelte Kegelmantel (Fig. 98b) ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Mantellinie und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten, ziehen wir die zu den Endpunkten der übertragenen Bogenstücke gehörigen Radien und ermitteln auf ihnen den Punkt der Schnittkurve, z. B. $Sc = S_2 m''$.

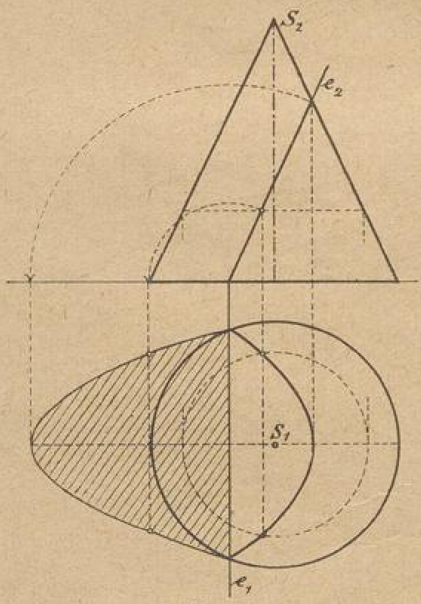


Fig. 99.

II. **Parabolischer Schnitt** (Fig. 99). Lösung wie im Fall I.

III. **Hyperbolischer Schnitt** (Fig. 100). Der Einfachheit halber nehmen wir hier die Schnittebene E parallel B_2 an. E schneidet auch die über die Spitze S erweiterte Kegelfläche, so daß wir eine aus zwei Ästen bestehende Schnittkurve erhalten. Lösung s. Fig.

b) Aufgabe 6. Den Schnitt einer zu B_2 senkrechten Ebene mit einer Kugel zu zeichnen und in wahrer Größe darzustellen.

[1]) Vgl. L. I. § 2; II. § 51–53.

Aufgabe 7. Die Erdkugel samt Gradnetz abzubilden, wenn ihre Achse zu B_1 senkrecht steht.

Die erste Projektion, das Bild der oberen Halbkugel, heißt die orthographische Polarprojektion, die zweite, das Bild der vorderen Halbkugel, die orthographische Äquatorialprojektion der Erdkugel. Wie bilden sich bei den beiden Projektionen die Breiten- und Längenkreise ab? Welche Teile erleiden die stärkste Verzerrung?

§ 22.

Zurückdrehung ebener Gebilde (Umkehrung der Aufgabe der Umlegung).

1) Unter „Zurückdrehen" (Zurückschlagen) eines ebenen Gebildes oder Punktes versteht man die Umkehrung der Aufgabe der Umlegung.

Grundaufgabe. Von einem in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist seine Umlegung P_0 und die erste Spur gegeben. Es sind seine Projektionen zu bestimmen.

Die Lösung (s. Fig. 90) nimmt den umgekehrten Verlauf wie die der Grundaufgabe § 20.

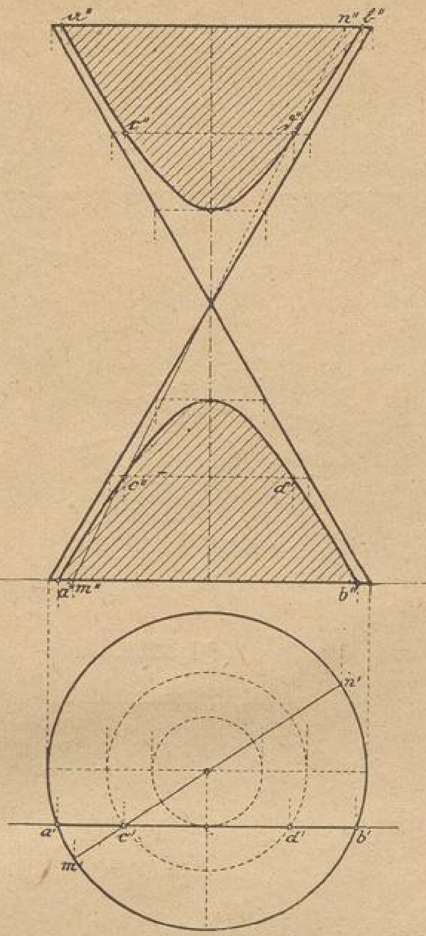


Fig. 100.

Aufgabe 1. Von einem in der Ebene E gelegenen Quadrat, deren erste Spur e_1 und erste Tafelneigung α_1 gegeben sind, (Vieleck) ist die Umlegung in die Grundebene gegeben. Die Projektionen der Figur zu zeichnen.

Aufgabe 2. In einer zu B_2 senkrechten und zu B_1 schiefen Ebene $E = (e_1, e_2)$ liegt ein Kreis, von dem die Umlegung seines Mittelpunktes M und der Radius r gegeben sind. Seine Projektionen zu zeichnen.

Die erste Projektion ist eine Ellipse. Wie liegen ihre große und kleine Achse?

2) Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide liegt mit einer Seitenfläche 1 2 S, die gegeben ist, in der Grundebene. Die Projektionen des Körpers zu zeichnen (Fig. 101).

Das gegebene Seitendreieck 1 2 S fällt mit seinem Grundriß $1'2'S_1$ zusammen. Um die erste Projektion der Grundfläche zu ermitteln, zeichnen wir diese in wahrer Größe an die Grundseite $1'2'$, be-

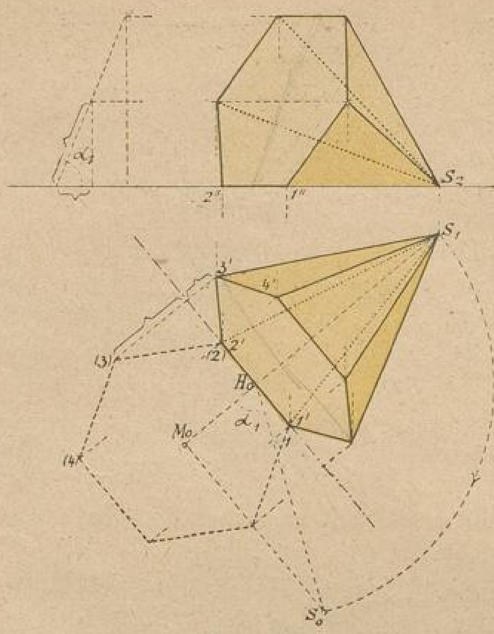


Fig. 101.

stimmen den Neigungswinkel α_1 der Seitenfläche mit der Grundfläche und drehen diese um 1′2′ als Achse für den Winkel α_1 als ihre erste Tafelneigung zurück. Wie ergeben sich die Aufrisse der nicht in der Grundebene gelegenen Punkte des Körpers?

Aufgabe 4. Ein auf der Grundebene ruhendes *regelmäßiges Dodekaeder* darzustellen (Fig. 102).

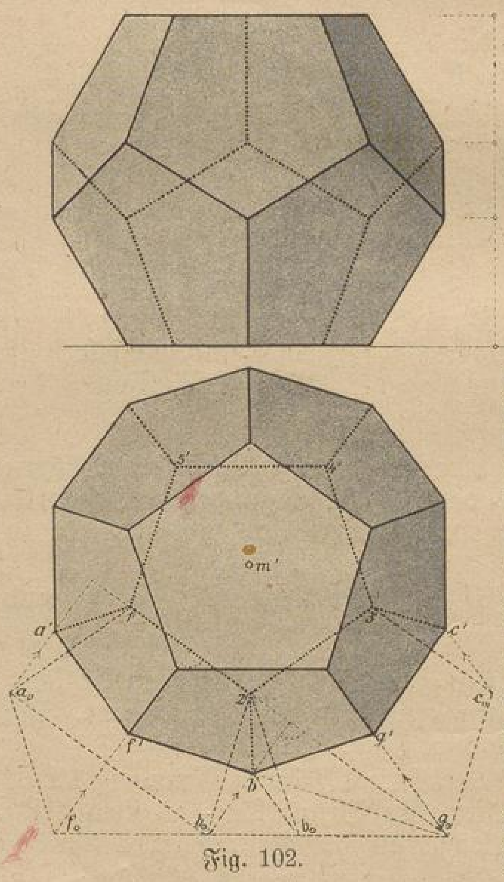


Fig. 102.

An die Seiten des in der Grundebene liegenden Fünfecks 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ zeichnen wir die angrenzenden Seitenflächen, z. B. I, II, des Körpers in wahrer Größe und suchen ihre ersten Projektionen dadurch zu bestimmen, daß wir die Fünfecke hochklappen, bis je zwei zu einem Eckpunkt des Fünfecks gehörende Kanten, z. B. $2'b_0$ und $2'b_0$, in b zusammenfallen. Dabei bewegen sich die drei freien Eckpunkte der hochgeklappten Fünfecke (a_0, f_0, b_0 von I; b_0, g_0, c_0 von II) in Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht zu den zugehörigen festliegenden Seiten und deren Projektionen daher senkrechte Strecken zu diesen sind. Bezeichnen wir mit a′, f′ und b′ die ersten Projektionen der Punkte a, f und b, so sind demnach a_0a', f_0f', b_0b' senkrecht zur Seite 1′ 2′ oder ihrer Verlängerung, ebenso b_0b', g_0g', c_0c' senkrecht zur Seite 2′ 3′ oder ihrer Verlängerung. Die erste Projektion b′ des Punktes b ist also der Schnittpunkt der von b_0 auf 1′ 2′ und von b_0 auf 2′ 3′ gefällten Lote. Die entsprechenden Punkte a, c′, d′, e′, liegen auf dem um den Mittelpunkt m′ des Fünfecks 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ mit dem

Radius m'b' beschriebenen Kreise, ferner auf den durch die Eckpunkte des Fünfecks gehenden Radien.

Zur Ermittlung der ersten Projektionen f', g', h', i', k' der äußersten Ecken f_0, g_0, h_0, i_0, k_0 genügt es ebenfalls, einen Bildpunkt, z. B. f', zu bestimmen (Grund?). Wir finden ihn leicht auf Grund der zwischen Umlegung und Projektion bestehenden Affinität. Die Seiten f_0b_0 und b_0g_0 bilden eine Gerade (Beweis!), von der beim Hochklappen des Fünfecks I der Punkt g_0 liegen bleibt. Weil b' schon gefunden ist, haben wir nur die Verlängerung von g_0b' mit dem von f_0 auf 1' 2' gefällten Lote zum Schnitt zu bringen.

Damit ist die erste Projektion der unteren Hälfte der Oberfläche des Dodekaeders gefunden. Die Projektion der oberen Hälfte der Oberfläche kann nun leicht hinzugefügt werden. Welche Ecken bestimmen die Seiten zweier regelmäßiger Zehnecke?

Für den Aufriß des Körpers hat man nur die ersten Tafelabstände der Ecken zu bestimmen, s. Fig. Genauigkeitsproben!

Setze das in Fig. 102 dargestellte regelmäßige Dodekaeder in schiefe Parallelprojektion für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$.

§ 23. Durchdringung zweier Körper, insbesondere ebenflächiger Körper.

1 a) Wenn zwei Körper einander durchschneiden („durchdringen"), so sind zwei Fälle möglich:

I. Der eine durchbohrt den andern (Fig. 109). Man spricht dann von einer Durchbohrung oder vollständigen Durchdringung. Die Schnittfigur der beiderseitigen Oberflächen der Körper, die Durchdringungsfigur, besteht aus zwei getrennten geschlossenen Figuren, bei zwei ebenflächigen Körpern oder Vielflachen aus zwei Raumvielecken.

II. Der eine Körper dringt in den andern ein oder er schneidet aus ihm ein seitliches Stück heraus (Fig. 106). In diesem Falle hat man es mit einer Eindringung oder einer unvollständigen Durchdringung zu tun. Die Durchdringungsfigur wird nur von einer geschlossenen Figur, bei Vielflachen von einem räumlichen Vieleck gebildet.

b) Die Seiten der **Durchdringungsfigur zweier Vielflache** sind die Schnittlinien, in denen sich die begrenzenden Flächen der Körper schneiden, ihre Ecken die Schnittpunkte, in denen die unverlängerten Kanten eines jeden der beiden Körper die Flächen des andern treffen. Dementsprechend kann die Durchdringungsfigur entweder durch Ermittlung der Seiten (Flächenverfahren) oder der Ecken (Kantenverfahren) gefunden werden. Das **Kantenverfahren** ist im allgemeinen das einfachere und wird deshalb in der Regel angewandt. Es besteht darin, daß man die beiderseitigen Schnittpunkte der unverlängerten Kanten eines Vielflachs mit den Flächen des andern bestimmt und die so erhaltenen Eckpunkte der Durchdringungsfigur in richtiger Reihenfolge verbindet. Dabei ist, da jede Seite der Durchschnittfigur der Schnitt zweier Ebenen ist, die wichtige Regel zu beachten, daß je zwei Eckpunkte dann und nur dann zu verbinden sind, wenn sie in einer und derselben Fläche sowohl des ersten als auch des zweiten Körpers liegen.

Die Bestimmung der Durchdringungsfigur von zwei Vielflachen kommt also bei der Anwendung des Kantenverfahrens auf die wiederholte Anwendung der schon früher behandelten Aufgabe (§ 14, Aufg. 4) hinaus, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene, die durch ein in ihr liegendes Vieleck gegeben ist, zu finden.

Eine Seite der Durchschnittfigur ist nur dann sichtbar, wenn die beiden Körperflächen, deren Schnitt sie ist, sichtbar sind.

Die Durchdringungsaufgaben spielen eine wichtige Rolle in den praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie, namentlich im Hoch- und Maschinenbau.

2) Der Anschaulichkeit halber beginnen wir mit einigen einfachen Beispielen, von denen die beiden ersten Durchdringungen darstellen, wie sie bei zusammengesetzten Dächern vorkommen.

Aufgabe 1. Die Durchdringung zweier gerader dreiseitiger Prismen, die mit je einer Seitenfläche auf der Grundebene ruhen, zu bestimmen (Fig. 103).

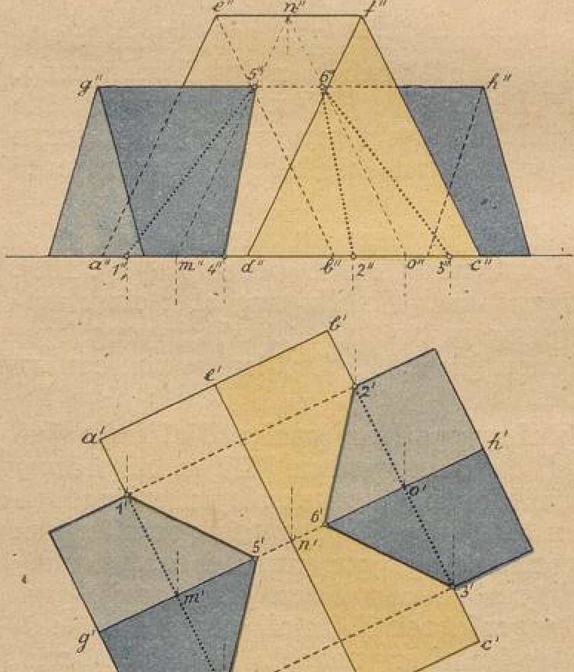


Fig. 103.

Die Punkte 1′2′3′4′ sind die Grundrisse der Einstoßpunkte der beiderseitigen in der Grundebene liegenden Kanten des einen Prismas in die Seitenflächen des anderen. Ihre Aufrisse liegen auf der Achse. Da die zur Grundebene nicht parallelen Kanten jedes der beiden Körper außerhalb der Projektionen der Flächen des anderen liegen, so brauchen nur noch die oberen Kanten (Firstkanten) untersucht zu werden. Wie der Aufriß zeigt, trifft die Firstkante ef des Prismas II keine Fläche des ersten. Dagegen trifft die Firstkante gh des Prismas I die Seitenflächen adfe und bcfe von II. Um die Einstoßpunkte zu finden, legen wir durch gh die Lotebene zu B_1, die den Aufriß der Seitenfläche adfe in m'' n'' und den der Seitenfläche bcfe in o'' n'' schneidet. Die Schnittpunkte 5'' und 6'' von g'' h'' mit m'' n'' und o'' n'' sind die gesuchten Einstoßpunkte im Aufriß. Ihre Grundrisse erhalten wir durch Herunterloten. Welches sind die beiden Vielecke der Durchdringungsfigur?

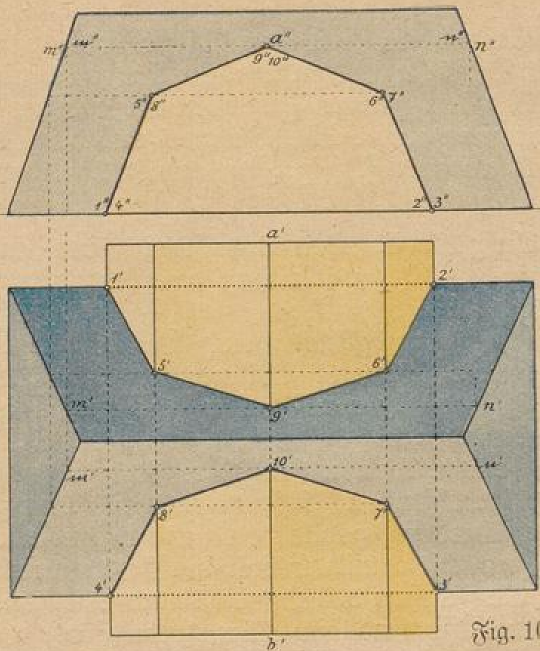


Fig. 104.

Aufgabe 2. Die Durchdringung eines *dreiseitigen schiefabgeschnittenen Prismas* (I), dessen obere Flächen die Form eines Walmdaches besitzen, mit einem *halben regelmäßig-achtseitigen Prisma* (II) zu finden. Fig. 104.

Die beiden Prismen ruhen je mit einer Seitenfläche auf der Grundebene. Die Seitenkanten des ersten sind parallel, die des zweiten senkrecht zur Aufrißebene. Die Aufrisse der Seitenkanten des zweiten Prismas schrumpfen daher im Aufriß in Punkte zusammen, z. B. ist a'' der Aufriß der Firstkante a' b'. Um ihre Einstoßpunkte in die Seitenflächen von I zu finden, legen wir durch ab am einfachsten eine B_1 parallele Hilfsebene (zweite Lotebene), die die vordere und hintere Seitenfläche von I im Aufriß in den zur Achse parallelen Strecken m'' n'' und m'' n'', die zusammenfallen, schneidet. Wie findet man daraus die Schnittlinien im Grundriß und daraus die Grundrisse der Einstoßpunkte 9 und 10?

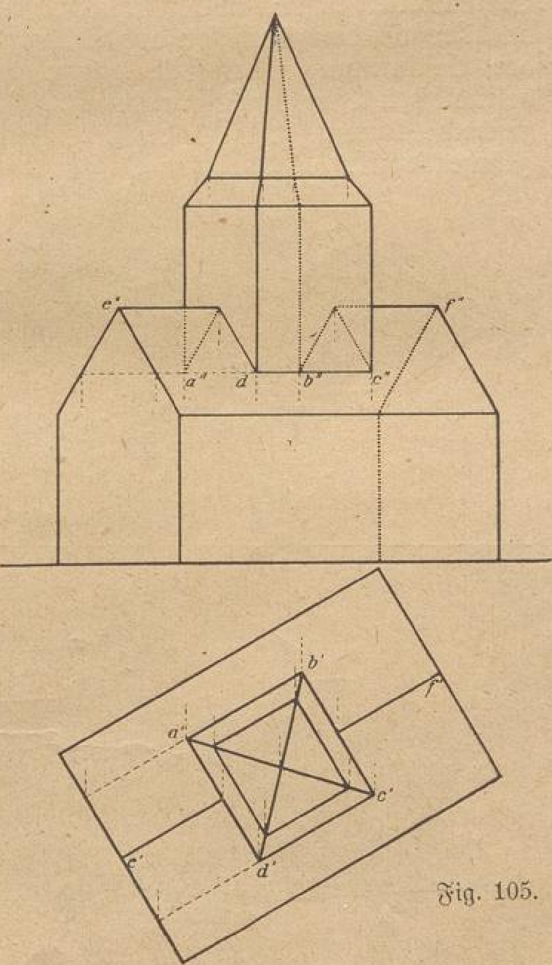


Fig. 105.

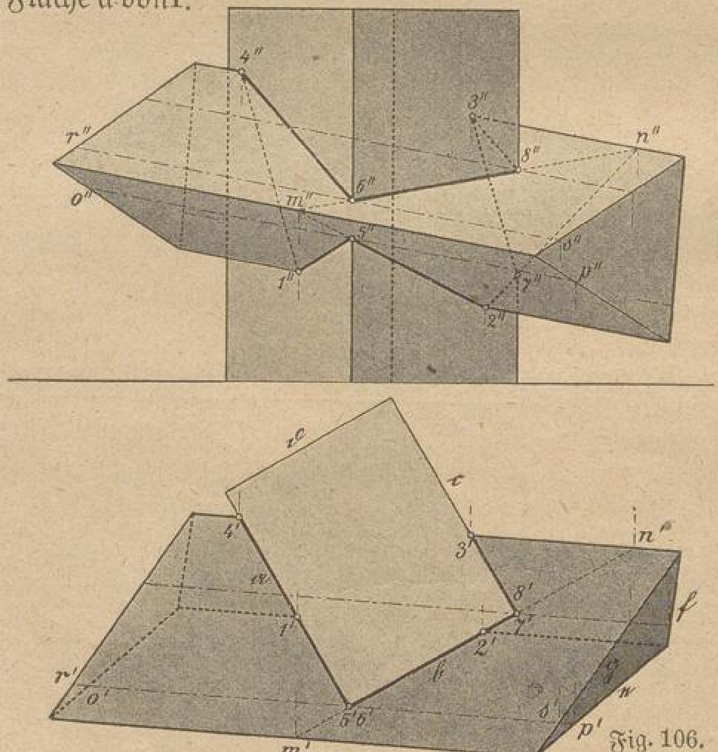
Aufgabe 3. Den Durchschnitt einer prismatischen Dachfläche mit einem quadratischen Turme zu finden (Fig. 105).

Wir benutzen als Hilfsebenen die ersten Lotebenen durch die Grundkanten ab und cd des Turmes und durch die Firstkante ef des Daches. Das Weitere s. Fig. Aus was für Körpern ist der Turmhelm entstanden?

Aufgabe 4. Den Durchschnitt eines auf der Grundebene stehenden Quaders (I) mit einem dreiseitigen Prisma (II) zu bestimmen (Fig. 106).

Um mit möglichst wenig Bezeichnungen auszukommen, hauptsächlich aber um nach Bestimmung der Ecken der Durchdringungsfigur rasch und sicher feststellen zu können, welche Ecken miteinander zu verbinden sind, bezeichnen wir jede Seitenfläche der beiden Körper mit einem kleinen deutschen Buchstaben, den wir an die Grundkante der betreffenden Fläche setzen. Die von zwei Flächen, z. B. a und b des Quaders, gebildete Kante bezeichnen wir dann mit (ab).

Zunächst ermitteln wir die Einstoßpunkte der Kanten des Prismas in die Flächen des Quaders und erhalten die Punkte 1, 2, 3, 4. Ihre Grundrisse sind die Schnittpunkte der Grundkanten von I mit den Seitenkanten von II in der Grundebene; ihre Aufrisse liegen senkrecht darüber auf den Aufrissen der Seitenkanten von II. Gleichzeitig mit der Bestimmung jeder Ecke tragen wir in einem neben der Figur befindlichen Verzeichnis ein, durch welche Kante und Fläche jede Ecke zustande kommt, z. B. 1 durch Schnitt der Kante (ef) von II mit Fläche a von I.



	I	II
1	a	ef
2	b	ef
3	c	fg
4	a	fg
5	ab	e
6	ab	g
7	bc	f
8	bc	g

Fig. 106.

Die Schnittpunkte der Kanten von I, von denen nur die Kanten (ab) und (bc) in Betracht kommen, mit den Flächen von II können auf verschiedene Weise gewonnen werden. Entweder legen wir durch die Grundkante der Fläche b die Lotebene zu B_1, die II in dem Dreieck mn2 schneidet. Die Schnittpunkte der Seiten dieses Dreiecks im Aufriß mit den Aufrissen der Seitenkanten von I sind die zweiten Projektionen ihrer Einstoßpunkte in II. Oder wir legen durch (ab) und (bc) als Hilfsebenen erste Lotebenen, die zu den Seitenkanten von II parallel sind und daher die Seitenflächen von II in je zwei Seitenlinien schneiden. Die durch die Kante (ab) von I gelegte erste Lotebene schneidet z. B. die Seitenflächen von I in den Seitenlinien op und rs, deren Schnittpunkte mit der Kante (ab) ihre Einstoßpunkte 5 und 6 in das Prisma ergeben.

Die Reihenfolge, in der die konstruierten Ecken der Durchdringungsfigur zu verbinden sind, ist bei der einfachen Lage der gegebenen Körper leicht zu übersehen. Sichere Auskunft gibt in allen Fällen die in dem Verzeichnis gegebene Übersicht über die Entstehung der einzelnen Ecken. Aus ihr geht hervor, daß nach der unter 1b) angegebenen Regel die Reihenfolge der zu verbindenden Punkte, wenn man von 1 ausgeht, 1 4 6 8 3 7 2 5 lautet. Da bei dem in der Regel angegebenen Verfahren kein Punkt übriggeblieben ist, folgt ohne weiteres, daß nur eine Schnittfigur vorhanden ist.

3) Bei Durchdringungen von **Prismen und Pyramiden,** die mit einer Grundfläche in der ersten Bildebene liegen, kann die Ermittlung der Schnittfigur dadurch bedeutend vereinfacht werden, daß man statt der Lotebenen eine Reihe von Hilfsebenen benutzt, deren Schnittlinien mit den Flächen der Körper möglichst einfache sind. Das sind

1. bei zwei Pyramiden Ebenen, die durch beide Spitzen gehen;
2. bei Pyramide und Prisma Ebenen, die durch die Spitze der Pyramide parallel zu Seitenkanten des Prismas gelegt sind;
3. bei zwei Prismen Ebenen, die parallel den beiden Seitenkanten sind.

Diese Hilfsebenen, die durch die Seitenkanten jedes Körpers gelegt werden, schneiden die Flächen des anderen in Erzeugenden[1]) (Seitenlinien), deren Schnittpunkte mit den zugehörigen Kanten Punkte der Durchdringungsfigur sind.

Zum leichteren Verständnis dieser praktisch sehr wichtigen Durchdringungsaufgaben lösen wir erst die folgenden beiden vorbereitenden Aufgaben.

Aufgabe 5. Den Schnitt einer Geraden g mit einer auf der Grundebene stehenden Pyramide zu bestimmen (Fig. 107a und b).

Der Anschaulichkeit halber gehen wir von dem Schrägbilde Fig. 107a aus. Die durch die Spitze S und die Gerade g gelegte Hilfsebene H

[1]) Das sind Linien, durch die wir uns die Mantelfläche erzeugt denken können!

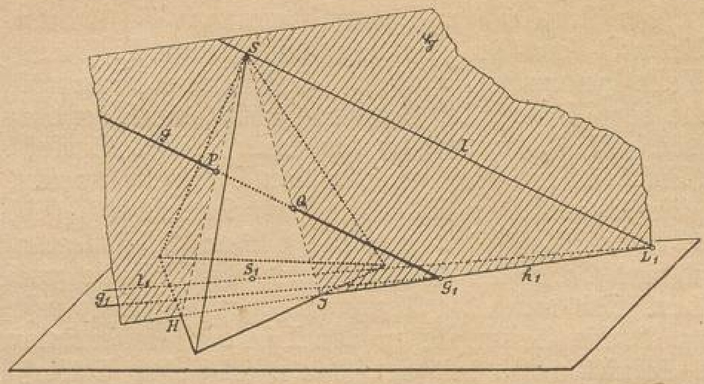


Fig. 107a.

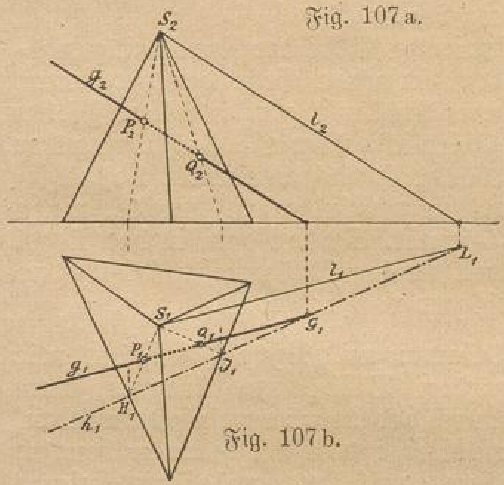


Fig. 107b.

schneidet die Pyramide in den Seitenlinien SH und SI, deren Schnittpunkte mit g, P und Q die gesuchten Einstoßpunkte von g in den Körper sind. Die Punkte H und I sind die Schnittpunkte der ersten Spur h_1 von $\mathfrak{H}$ mit den Grundkanten der Pyramide, so daß unsere Aufgabe nur darauf hinausläuft, die erste Spur h_1 von $\mathfrak{H}$ zu finden. Zunächst muß h_1 durch den ersten Spurpunkt G_1 von g hindurchgehen. Ziehen wir durch S zu g die Parallele l, so liegt l in $\mathfrak{H}$ und daher auch der erste Spurpunkt L_1 von l auf h_1. Die durch L_1G_1 gezogene Gerade ist die gesuchte erste Spur von $\mathfrak{H}$.

Löse danach die Aufgabe in gerader Parallelprojektion (Fig. 107 b).

Aufgabe 6. Den Schnitt einer Geraden g mit einem Prisma zu bestimmen.

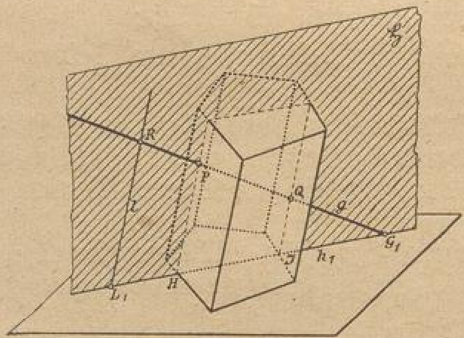


Fig. 108.

Wir legen (s. Schrägbild Fig. 108) durch g die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ parallel den Seitenkanten des Prismas. Ihre erste Spur h_1, deren wir nur zur Zeichnung bedürfen, finden wir dadurch, daß wir durch einen beliebigen Punkt R von g die Parallele l zu den Seitenkanten des Prismas ziehen, deren erster Spurpunkt L_1 ist. Die durch L_1 und G_1 bestimmte Gerade ist h_1. Wie erhalten wir nun die Einstoßpunkte P und Q?

Lösung der Aufgabe in gerader Parallelprojektion!

Aufgabe 7. Die Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma zu finden (Fig. 109).

Die Körper stehen mit einer Grundfläche auf der ersten Bildebene. Lösung im Anschluß an die Aufg. 5 und 6.

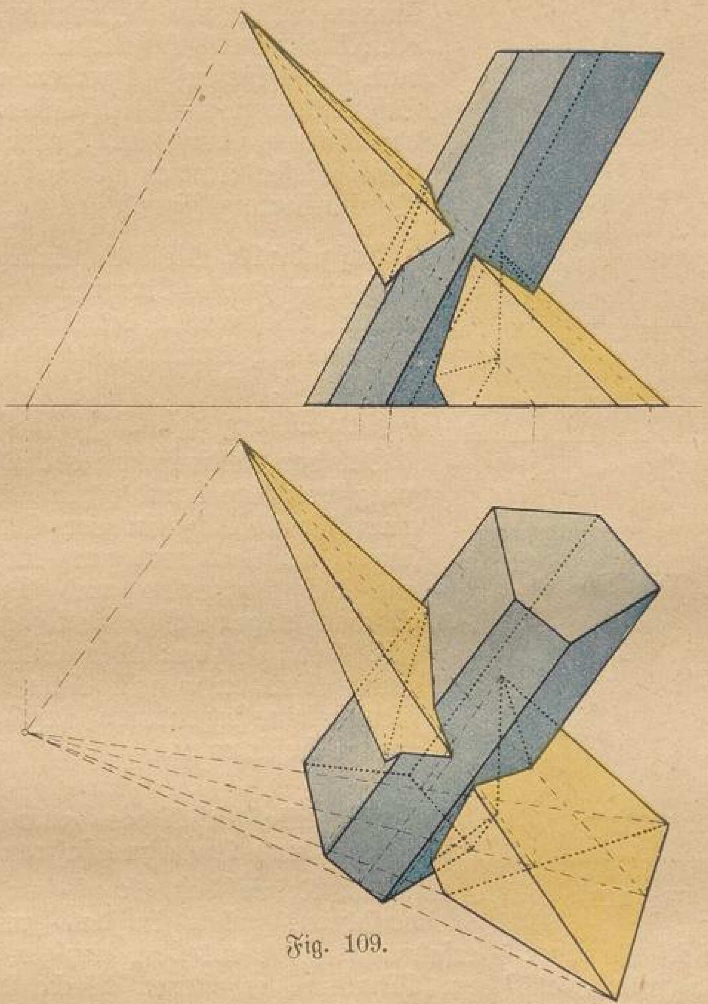


Fig. 109.

Aufgabe 8. Die Durchdringung zweier Prismen, die eine Grundfläche in der ersten Bildebene haben, zu bestimmen.

Die Hilfsebenen haben parallele Spuren! Lösung im Anschluß an Aufg. 6.

Aufgabe 9. Die Durchdringung zweier Pyramiden zu finden.

Wir lösen die Aufgabe für eine quadratische und eine regelmäßige achtseitige Pyramide, deren Achsen zusammenfallen und die sich so durchdringen, daß ihre Seitenflächen die Dachflächen eines gotischen Turmhelms bilden. Ihre Grundflächen sind parallel B_1. Lösung s. Fig. 110. Was ist in der Zeichnung noch hinzugefügt? Zu welchem Zwecke?

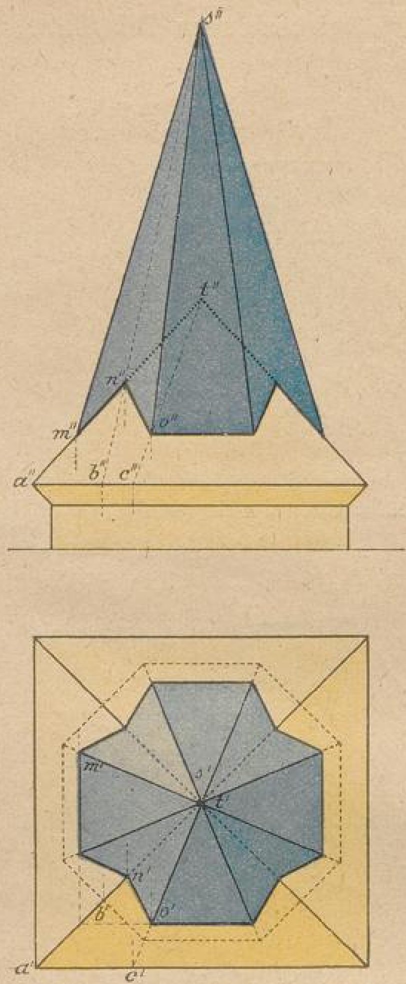


Fig. 110.

4) Die **Durchdringungsfigur zweier krummflächiger Körper** besteht aus einer oder mehreren Kurven. Einzelne Punkte können wir dadurch bestimmen, daß wir die Körper durch Hilfsebenen (oder andere Hilfsflächen) schneiden und ihre Schnittkurven mit den Flächen der beiden Körper ermitteln. Jeder Schnittpunkt dieser Kurven ist ein Punkt der Durchdringungsfigur.

Aufgabe 10. Die rechtwinklige Durchdringung zweier kongruenter Halbzylinder zu bestimmen, die mit der Schnittfläche auf der Grundebene ruhen (Kreuzgewölbe).

Zur Lösung vgl. Aufgabe 2.

Bei der Bestimmung der Durchdringung von Kegel und Zylinder, die mit einer Grundfläche in der Grundebene liegen, verfährt man ganz entsprechend wie bei Pyramide und Prisma in gleicher Lage. Löse erst die beiden Hilfsaufgaben: Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem auf der Grundebene stehenden a) Kegel, b) Prisma zu bestimmen.

§ 24. Geschichtliches zum Grund- und Aufrißverfahren.

Die Keime des Grund- und Aufrißverfahrens gehen in das graue Altertum zurück. Genaueres erfahren wir erst aus dem einzigen uns über diesen Gegenstand aus dem Altertume erhaltenen Buche des römischen Baumeisters Vitruvius Pollio, „De architectura", das dem Kaiser Augustus gewidmet ist. In diesem z. T. nach griechischen Quellen bearbeiteten Werke spricht er von Grund- und Aufriß unter dem Namen „Ichnographie und Orthographie".[1])

Die einfachen Regeln dieser Kunst wurden in der Praxis von Geschlecht zu Geschlecht vererbt und gelangten in den Bauhütten des Mittelalters, besonders in Anwendung auf den Steinschnitt, zu hoher Blüte. Kein Geringerer als Albrecht Dürer hat in seinem klassischen Büchlein „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt" (Nürnberg, 1525 und 1538) die Regeln der mittelalterlichen Rißkunst zusammengestellt.

Auch später bildete noch das wichtigste Anwendungsgebiet der „Rißkunst"

[1]) Der erste Teil des Wortes stammt von ichnos (griech.) Spur, Fußtritt. Vgl. das deutsche Wort „Riß"!

der Steinschnitt[1].) Aufgaben über ihn behandelten Desargues, 1593—1662 (Coupe des pierres, 1640) und Frézier, 1682—1772 (La théorie et la practique de la coupe des pierres et des bois, Straßburg 1738/39). Dieser benutzt Grund- und Aufriß und behandelt besonders Durchdringungen und Abwicklungen.

Dennoch blieb die wissenschaftliche Begründung und Entwicklung des Verfahrens dem großen französischen Geometer G. Monge (Géométrie descriptive, Paris 1798) vorbehalten. Dadurch, daß er die Schnittgerade der beiden Bildtafeln als Achse benutzte und um sie die eine in die andere umlegte, setzte er Grund- und Aufriß in eine feste Beziehung. Punkte, Gerade und Ebenen, ferner gekrümmte Linien und Flächen stellte er durch ihre Projektionen oder Spuren dar und hat durch die Behandlung von Aufgaben die Hauptverfahren der darstellenden Geometrie begründet und vollständig entwickelt. Vgl. § 1.

Anmerkung. In dem oben erwähnten Büchlein von Dürer findet man z. B. die Kegelschnitte, Schraubenlinien, Körper wie Dodekaeder, Ikosaeder in Grund- und Aufriß nebst Abwicklung so dargestellt, wie man sie nicht anders in einem guten neueren Buch erwarten kann. Um das überaus lehrreiche Buch weiteren Kreisen zugänglich zu machen, hat der Maler Hans Thoma eine Neuherausgabe im Verlage der süddeutschen Monatshefte veranlaßt und sie mit einem Vorwort versehen unter dem Titel „Albrecht Dürers Unterweisung der Messung um einiges gekürzt und dem neueren Sprachgebrauch angepaßt", herausgeg. von Alfred Peltzer.

Dritter Abschnitt.

Schattenbestimmung der Parallelprojektion.

§ 25. Allgemeines. Hauptsätze über Schatten von Strecken bei Parallelbeleuchtung.

1 a) Von einer Zeichnung fordern wir mit Recht, daß sie eine deutliche Vorstellung von dem abgebildeten Gegenstande bei dem Beschauer hervorrufe. Durch die bisherigen Darstellungen, die bloße Linearzeichnungen (Name!) sind, wird das nicht immer erreicht. Dagegen lassen sich Lage und Gestalt eines Körpers aus seiner Darstellung leichter erkennen und der gezeichnete Körper besser anschaulich auffassen, wenn wir ihn uns beleuchtet denken und die Schatten, die er auf die Bildebene oder auf einen anderen Körper wirft, in die Zeichnung mit aufnehmen.

[1]) Die Kunst des Steinschnitts ist uralt. 1. Kön. 6, 7 heißt es vom Tempelbau Salomos: „Und da das Haus gesetzet ward, waren die Steine zuvor ganz zugerichtet, daß man keinen Hammer, noch Beil, noch irgend ein eisern Werkzeug im Bauen hörte."