



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 83. Das Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz mit Ausgleichung von
Helmert

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

werden können. Dazu gehören auch Reste regelmässiger Teilungsfehler und anderer systematischer Einflüsse, die eigentlich durch das Messverfahren eliminiert sein sollten.

Auf diese Weise wird das vollständige mittlere Fehlerquadrat einer Richtung dargestellt durch:

$$M^2 = \frac{\mu^2}{n} + \frac{\tau^2}{r} + v^2 \quad (22)$$

Um v^2 kennen zu lernen wurde ein Durchschnittswert von M^2 aus den Widersprüchen der Dreiecksabschlüsse oder aus älteren Netzausgleichungen und zum Teil aus der Vergleichung von Stationsergebnissen verschiedener Epochen entnommen, μ^2 und τ^2 aber nach Möglichkeit geschätzt. Nach S. 55, 56, 89, 109, 110, 125 der citierten Veröffentlichung sind solche Ermittlungen $v^2 = 0,19$, $0,43$, $0,09$, $0,18$, $0,09$, $0,15$, $0,09$

$$\text{Im Mittel } v^2 = 0,17 \text{ oder } v = \pm 0,4'' \quad (23)$$

Dieser Netzfehler $v = \pm 0,4''$ ist ein verhältnismässig hoher Wert!

Noch eine Eigentümlichkeit wird auf S. 37 hinzugefügt: Wenn auf derselben Station Messungen aus verschiedenen Jahren mit einander zu verbinden waren, so wurde zunächst M^2 für jede Epoche für sich berechnet. Dafür sprach das Auftreten grosser Differenzen selbst in den besten Messungen *verschiedener Jahre*, wobei es allerdings unaufgeklärt blieb, was die Gründe solcher Änderungen mit der Zeit sein mögen.

§. 83. Das Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz mit Ausgleichung von Helmert.

Aus der Veröffentlichung des geodätischen Instituts von 1893 (Citat s. oben S. 283) entnehmen wir von S. 87—95 das „Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz“, welches in unserer nachfolgenden Fig. 1. dargestellt ist, und wir führen die Hauptmomente der Richtungsausgleichung vor, welche nach der neuen Helmertschen Gewichtstheorie (im vorigen § 82.) gemacht ist.

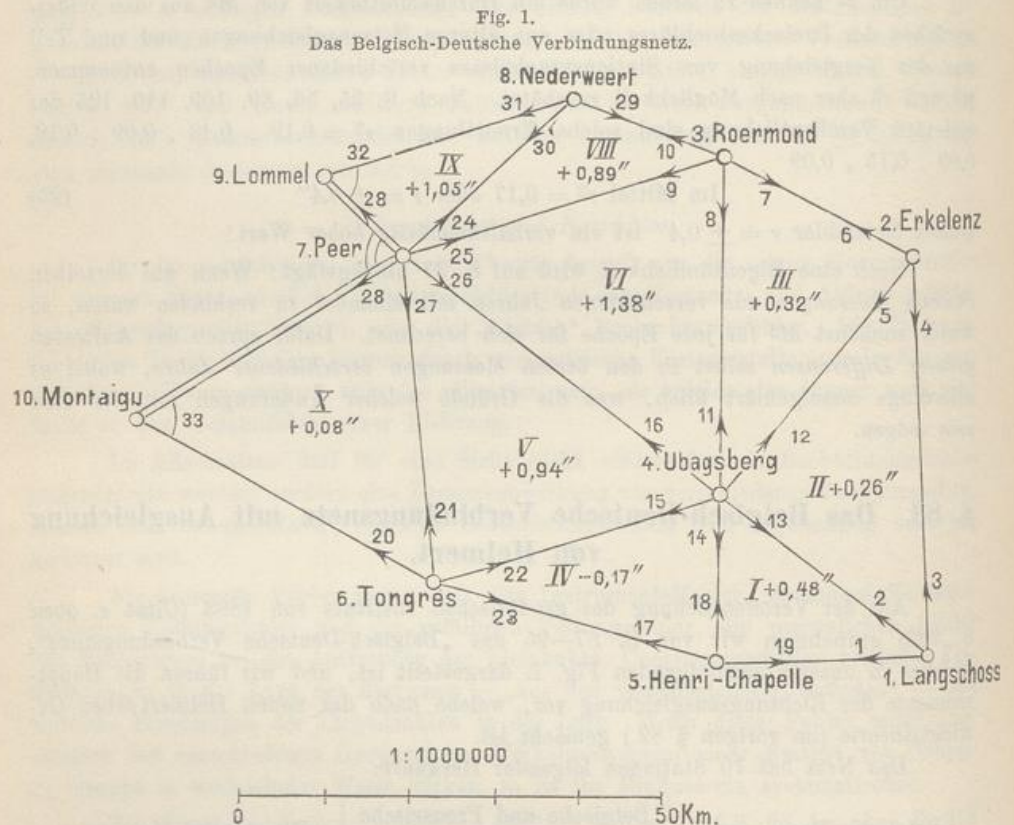
Das Netz hat 10 Stationen folgender Herkunft:

Belgische Messungen	Belgische und Preussische Messungen	Preussische Messungen
Nederweert Lommel Peer Montaigu Tongres	Roermond Ubagsberg Henri-Chapelle	Erkelenz Langschoss
$M_B = \frac{0,89''}{\sqrt{2}} = \pm 0,63''$	$M_B = \pm 0,73''$, $M_F = \frac{\pm 0,79''}{\pm 0,66''}$	$M_P = \frac{0,73''}{\sqrt{2}} = \pm 0,52''$

Die hier sofort beigesetzten mittleren Winkelfehler $\pm 0,89''$ und $\pm 0,73$ sind aus Dreiecksschlüssen der Belgischen Triangulierung und des neueren rheinischen Dreiecksnetzes des geodätischen Institutes im Allgemeinen ermittelt, und geben den mittleren Fehler einer im Netz ausgeglichenen Belgischen Richtung oder Preussischen Richtung bzw. $= \pm 0,63''$ und $\pm 0,52''$, während die Vergleichen auf den An-

schluss-Stationen grössere Beträge ergaben, nämlich $\pm 0,73''$ für Belgien, und $+ 0,79''$ für Preussen 1861, $\pm 0,66''$ für Preussen 1869.

Aus solchen Erwägungen wurde für Belgien im Allgemeinen $M = \pm 0,64''$, $M^2 = \pm 0,41$ angenommen, und für Preussen die M^2 nach der Theorie der Gleichung (22) im vorigen § 82. S. 291 im einzelnen bestimmt, was auf S. 89—90 der Veröffentlichung selbst nachzusehen ist.



Als Gewichtseinheit ist derjenige Wert $p = \frac{1}{q}$ genommen, welcher zu dem mittleren Fehlerquadrat $M^2 = 0,17$ einer in das Netz eingehenden Richtung gehört, also:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{p} = \frac{M^2}{0,17} = \left(\frac{M}{0,412} \right)^2 = \text{Gewichts-Reciproke} \\ p &= \frac{0,17}{M^2} = \left(\frac{0,412}{M} \right)^2 = \text{Gewicht einer Richtung} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

So sind die Gewichte p bemessen, welche in dem vollständigen Abrisse der Netzausgleichung auf S. 293 angegeben sind.

Das Netz ist nicht ein völlig freies, sondern ein auf den 3 Stationen Lommel, Peer und Montaigu festgebundenes Netz, wodurch die Bedingungsgleichungen in jener nordwestlichen Gegend beeinflusst werden.

Ehe darauf eingegangen wird, ist zu den „beobachteten Richtungen“ eine Bemerkung zu machen bei den Stationen Lommel und Montaigu, weil in dem Abrisse

Ausgleichungs-Abriss des Belgisch-Deutschen Verbindungsnetzes.

No.	Ziel- punkt	vor der Ausgleichung			nach der Ausgleichung			
		mittl. Fehler M	$q = \frac{1}{p}$ $= \left(\frac{M}{0,412}\right)^2$	beobachtete Richtung A	Netz- verbess. v	ausgegliche Richtung $A + v - v_1$ u.s.w.	$v \sqrt{p}$ $= \frac{0,412 v}{M}$	$v^2 p$ $= \frac{v^2}{q}$
1. Langschoss.								
1	H. Ch.	$\pm 0,79''$	3,7	$0^\circ 0' 0,00''$	$+1,30''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,67''$	0,45
2	Ub.	0,34	0,7	$37 39 39,16$	$-0,29$	$37 39 37,57$	0,35	0,12
3	Er.	0,34	0,7	$89 38 19,68$	$+0,04$	$89 38 18,42$	0,05	0,00
2. Erkelenz.								
4	La.	$\pm 0,32''$	0,6	$0^\circ 0' 0,00''$	$+0,27''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,35''$	0,12
5	Ub.	0,41	1,0	$42 11 47,80$	$-0,29$	$42 11 47,24$	0,29	0,08
6	Ro.	0,41	1,0	$117 3 49,47$	$-0,16$	$117 3 49,04$	0,16	0,03
3. Roermond.								
7	Er.	$\pm 0,34''$	0,7	$0^\circ 0' 0,00''$	$+0,26''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,31''$	0,10
8	Ub.	0,34	0,7	$64 6 33,96$	$-0,06$	$64 6 33,64$	0,07	0,00
9	Pe.	0,37	0,8	$140 18 33,79$	$-0,15$	$140 18 33,38$	0,17	0,03
10	Ne.	0,37	0,8	$182 4 19,06$	$-0,24$	$182 4 18,56$	0,14	0,02
4. Ubagsberg.								
11	Ro.	$\pm 0,34''$	0,7	$0^\circ 0' 0,00''$	$+0,07''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,08''$	0,01
12	Er.	0,34	0,7	$41 1 27,05$	$-0,06$	$41 1 26,92$	0,07	0,00
13	La.	0,34	0,7	$126 51 1,84$	$-0,10$	$126 51 1,67$	0,12	0,01
14	H. Ch.	0,49	1,4	$183 39 50,22$	$+0,45$	$183 39 50,60$	0,37	0,14
15	To.	0,37	0,8	$255 2 35,84$	$+0,16$	$255 2 35,93$	0,17	0,03
16	Pe.	0,37	0,8	$309 6 7,89$	$-0,30$	$309 6 7,52$	0,33	0,11
5. Henri-Chapelle.								
17	To.	$\pm 0,47''$	1,3	$0^\circ 0' 0,00''$	$+0,50''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,44''$	0,19
18	Ub.	0,47	1,3	$76 53 13,63$	$-0,53$	$76 53 12,60$	0,46	0,21
19	La.	0,47	1,3	$162 24 47,82$	$+0,03$	$162 24 47,35$	0,03	0,00
6. Tongres.								
20	Mo.	$\pm 0,64''$	2,4	$0^\circ 0' 0,00''$	$+0,58''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,37''$	0,14
21	Pe.	0,64	2,4	$55 26 16,96$	$+0,35$	$55 26 16,73$	0,22	0,05
22	Ub.	0,64	2,4	$134 41 43,47$	$-1,22$	$134 41 41,67$	0,77	0,59
23	H. Ch.	0,64	2,4	$166 25 45,66$	$+0,28$	$166 25 45,36$	0,18	0,03
7. Peer.								
24	Ne.	$\pm 0,73''$	3,1	$0^\circ 0' 0,00''$	$+0,04''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,02''$	0,00
25	Ro.	0,70	2,9	$28 32 11,13$	$+0,56$	$28 32 11,65$	0,33	0,11
26	Ub.	0,70	2,9	$81 26 24,22$	$-1,10$	$81 26 23,08$	0,64	0,41
27	To.	0,43	1,1	$128 7 30,03$	$-0,01$	$128 7 29,98$	0,97	0,01
28	Mo.	0,34	0,7	$192 34 27,58$	$+0,13$	$192 34 27,67$	0,16	0,03
28	Lo.	0,34	0,7	$267 43 23,04$	$+0,13$	$267 43 23,13$	0,16	0,03
75° 8' 55,46"								
8. Nederweert.								
29	Ro.	$\pm 0,64''$	2,4	$0^\circ 0' 0,00''$	$+0,56''$	$0^\circ 0' 0,00''$	$0,36''$	0,13
30	Pe.	0,64	2,4	$109 42 5,72$	$-0,76$	$109 42 4,40$	0,48	0,23
31	Lo.	0,64	2,4	$137 11 35,79$	$+0,21$	$137 11 35,44$	0,13	0,02
9. Lommel.								
32	Ne.	$\pm 0,00''$..	$0^\circ 0' 0,00''$		$0^\circ 0' 0,00''$		
32	Pe.	0,90	4,8	$60 13 54,99$	$-1,93''$	$60 13 58,06$	$0,87''$	0,76
10. Montaigu.								
33	Pe.	$\pm 0,00''$..	$0^\circ 0' 0,00''$		$0^\circ 0' 0,00''$		
33	To.	0,71	3,0	$60 6 48,90$	$+0,01''$	$60 6 48,91$	$0,01''$	0,00
4,19								

$$m = \sqrt{\frac{4,19}{11}} = \pm 0,62''$$

S. 293 für 32 und 33 nicht eigentlich Richtungen, sondern Winkel eingesetzt sind, indem z. B. auf Montaignu die Richtung von Peer als fest und fehlerfrei betrachtet und nur die Richtung nach Tongres als fehlerhaft mit den Gewichtsreciproken $q = 3,0$ eingeführt ist. Warum das so angeordnet ist, hängt wahrscheinlich mit den Gewichtsuntersuchungen zusammen; rein formell betrachtet hätte die Sache auch so gemacht werden können, dass zwei Messungsrichtungen Montaignu-Peer und Montaignu-Tongres mit Gewichtsreciproken je $= 1,5$ angesetzt würden, und ähnlich auf Lommel.

Auf der Station Peer ist der Winkel zwischen Montaignu und Lommel unabänderlich fest gegeben $= 75^{\circ} 8' 55,46''$, was in den beobachteten Richtungen A auf S. 293 bereits dadurch ausgedrückt ist, dass die Richtungen Peer-Montaignu und Peer-Lommel mit dieser Differenz in Ansatz gebracht sind. (Man kann sich etwa denken, die Stationsausgleichung auf Peer sei nach § 78. gemacht.) Damit nun durch die Netzausgleichung dieser Anschlusswinkel nicht nochmals geändert werde, sind die Richtungsverbesserungen Peer-Montaignu und Peer-Lommel beide *gleich* anzunehmen und deswegen mit derselben Nummer 28 und 28 bezeichnet.

Nach diesem zu den Bedingungsgleichungen übergehend, betrachten wir zuerst das Netz als völlig frei, und dann wäre bei $p = 10$ Punkten und $l = 18$ Linien hin und her, nach den Regeln von (17) S. 176, $l - 2p + 3 = 1$ Seitengleichung und $l - p + 1 = 9$ Dreiecksgleichungen (mit $180^{\circ} + \text{Excess}$) zu berücksichtigen. Diese 10 Gleichungen sind jedenfalls da, aber es kommt wegen des Anschlusses im Nordwesten noch eine Zwangsseitengleichung hinzu, so dass im Ganzen 11 Bedingungsgleichungen auftreten werden.

Betrachten wir zuerst die 9 Dreiecksschlüsse, so werden dieselben ganz ebenso gemacht, wie früher bei den kleinen Beispielen S. 178 und S. 189. Z. B. das erste Dreieck I. giebt:

$$\begin{array}{rcl} (1,2) & = & 37^{\circ} 39' 39,16'' \\ (13,14) & = & 56 \quad 48 \quad 48,38 \\ (18,19) & = & 85 \quad 31 \quad 34,19 \\ \hline & & 180^{\circ} 00' \quad 0,73'' \\ \text{soll } 180^{\circ} + \text{Excess} & & 1,25 \\ \hline \text{Widerspruch } W & = & + 0,48'' \end{array}$$

Also die zugehörige Bedingungsgleichung:

$$\text{I. } -v_1 + v_2 - v_{13} + v_{14} - v_{18} + v_{19} + 0,48'' = 0 \quad (\text{a})$$

Die übrigen Dreiecksschlussgleichungen werden ebenso gebildet:

$$\begin{array}{rcl} \text{II. } -v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_{12} + v_{13} + 0,26'' & = & 0 \quad (\text{b}) \\ \text{III. } -v_5 + v_6 - v_7 + v_8 - v_{11} + v_{12} + 0,32'' & = & 0 \quad (\text{c}) \\ \text{IV. } -v_{14} + v_{15} - v_{17} + v_{18} - v_{22} + v_{23} - 0,17'' & = & 0 \quad (\text{d}) \\ \text{V. } -v_{15} + v_{16} - v_{21} + v_{22} - v_{26} + v_{27} + 0,94'' & = & 0 \quad (\text{e}) \\ \text{VI. } -v_8 + v_9 + v_{11} - v_{16} - v_{25} + v_{26} + 1,38'' & = & 0 \quad (\text{f}) \\ \text{VIII. } -v_9 + v_{10} - v_{24} + v_{25} - v_{29} + v_{30} + 0,89'' & = & 0 \quad (\text{h}) \\ \text{IX. } +v_{24} - v_{23} - v_{30} + v_{31} + v_{32} + 1,05'' & = & 0 \quad (\text{i}) \\ \text{X. } -v_{20} + v_{21} - v_{27} + v_{28} + v_{33} + 0,08'' & = & 0 \quad (\text{k}) \end{array}$$

Die Widersprüche $+ 0,48''$ zu I., $+ 0,26''$ zu II. u. s. w. sind auch in dem Netzbilde Fig. 1. S. 292 in den betreffenden Dreiecken eingeschrieben.

Übergehend zu den Seitengleichungen haben wir für das Centralsystem Ubagsberg, als Sinusrechnung durch die Dreiecke I, II, III, VI, V, IV die Bedingung:

$$\frac{\sin(2,3) \sin(5,6) \sin(8,9) \sin(26,27) \sin(22,23) \sin(18,19)}{\sin(1,2) \sin(4,5) \sin(7,8) \sin(25,26) \sin(21,22) \sin(17,18)} = 1$$

Die Ausrechnung ist ebenso wie schon früher auf S. 180 und S. 192, weshalb wir hier nur einen Teil der Ausrechnung schreiben:

		Diff. für 10"
(2,3) = 51° 58' 40,52"	$\log \sin(2,3) = 9.896\,4014$	165
(5,6) = 74 52 1,67	" " (5,6) = 9.984\,6727	57
.		
	$\log \text{Zähler} = 9.449\,8818$	

Ebenso	$\log \text{Nenner} = 9.449\,8995$	
	$w = -177$	

Also die lineare Seitengleichung zunächst in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale:

$$\begin{aligned} +1,65(v_3 - v_2) + 0,57(v_6 - v_5) + \dots - 2,73(v_2 - v_1) - 17,7 &= 0 \\ +1,65 v_3 - 4,38 v_2 \dots - 17,7 &= 0 \end{aligned} \quad (g')$$

Diese streng zu erfüllende Bedingungsgleichung wollen wir noch mit 2 dividieren, wodurch sie nun, voll ausgeschrieben, wird:

$$\left. \begin{aligned} +1,37 v_1 - 2,19 v_2 + 0,82 v_3 + 1,16 v_4 - 1,45 v_5 + 0,29 v_6 + 0,51 v_7 \\ - 0,77 v_8 + 0,26 v_9 + 0,25 v_{17} - 0,33 v_{18} + 0,08 v_{19} + 0,20 v_{21} \\ - 1,91 v_{22} + 1,71 v_{23} + 0,79 v_{25} - 1,79 v_{26} + 1,00 v_{27} - 8,85 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Der Umstand, dass wir die ursprüngliche Gleichung (g') mit 2 dividiert haben, um die endgültige Gleichung (g) zu erhalten, beruht auf dem Wunsche, die Coefficienten aller Bedingungsgleichungen möglichst einander *gleich* zu machen, und da alle vorhergehenden Gleichungen (a) bis (k) die Coefficienten = 1 (nämlich +1 oder -1) hatten, war es angezeigt, auch die Coefficienten in (g') noch etwas zu verkleinern, doch ist das nur eine Sache der Rechenbequemlichkeit, und von Willkür abhängig, ob man in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, oder wie hier in halben solchen Einheiten rechnen will (vgl. den späteren § 84. und 85.).

Man könnte für die Seitengleichung (g'), d. h. für deren wichtiges Absolutglied -17,7 auch noch eine Kontrollrechnung nach dem Legendreschen Satze machen, wie in (8) S. 181, doch sei davon jetzt nicht die Rede.

Dagegen wollen wir nun die andere, nämlich die *Zwangs*-Seitenberechnung zum Anschluss an die *beiden* Grundlinien Lommel-Peer und Peer-Montaigu vornehmen.

Als unabänderlich sind gegeben:

Lommel-Peer	Peer-Montaigu
$\log s_1 = 4.155\,0338\cdot4$	$\log s_2 = 4.570\,5942\cdot6$

Wir rechnen nach der sogenannten Additamentenmethode (in unserem III. Bande Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890, S. 240-243) und berechnen das logarithmische Additament einer Seite s nach der Formel $\frac{\mu}{6 r^2} s^2$, wo $\mu = 0,43429$ und r der Erdhalbmesser in unserem Falle für 51° 10' Breite $\log r = 6.80495$, dieses giebt:

$$\frac{\mu}{6 r^2} s_1^2 = \dots \quad 3\cdot6 \qquad \frac{\mu}{6 r^2} s_2^2 = \dots \quad 24\cdot6$$

Diese Werte von den obigen $\log s_1$ und $\log s_2$ abgezogen geben:

$$\log s_1' = 4.155\,0334\cdot 8 \quad \log s_2' = 4.570\,5918\cdot 0 \quad (3)$$

$$\log \frac{s_1'}{s_2'} = 9.584\,4416\cdot 8$$

und nun besteht nach dem Anblick des Netzbildes Fig. 1. S. 292 folgende Gleichung:

$$\frac{s_1' \sin(32) \sin(29,30) \sin(8,9) \sin(15,16) \sin(20,21)}{s_2' \sin(30,31) \sin(9,10) \sin(16,11) \sin(21,22) \sin(33)} = 1$$

Die Ausrechnung giebt zunächst in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale:

$$1,21 v_{32} - 0,75 (v_{30} - v_{29}) + 0,52 (v_9 - v_8) + \dots - 2,36 (v_{10} - v_9) \dots - 6,2 = 0$$

Wenn man wieder halbiert und nach den Nummern der v ordnet und zusammenfasst, bekommt man die vollständige lineare Zwangsanschluss-Seitengleichung:

$$\left. \begin{aligned} &+ 0,26 v_8 - 1,44 v_9 + 1,18 v_{10} + 0,86 v_{11} + 0,76 v_{15} - 1,62 v_{16} \\ &+ 0,73 v_{20} - 0,93 v_{21} + 0,20 v_{22} - 0,38 v_{29} - 1,65 v_{30} + 2,03 v_{31} \\ &- 0,61 v_{32} + 0,61 v_{33} + 3,10 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Nun besitzen wir in (a) (b) ... (l) die richtige Anzahl von 11 linearen Bedingungsgleichungen, welche zuvörderst in eine Tabelle, ähnlich wie früher in (12) S. 182 oder S. 194—195 geordnet werden müssen. Zur Raumersparung sind wir genötigt, diese Tabelle hier nur anzudeuten:

		1	2	3	4	5	6	7	8	..
$\frac{1}{p} = q =$		3,7	0,7	0,7	0,6	1,0	1,0	0,7	0,7	..
1	a	-1	+1
2	b	.	-1	+1	-1	+1
3	c	-1	+1	-1	+1	..
4	d
5	e
6	f	-1	..
7	g	+1,37	-2,19	+0,82	+1,16	-1,45	+0,29	+0,51	-0,77	..
..

Es folgt die Berechnung der Summen $\left[\frac{a a}{p} \right]$ u. s. w. als Coefficienten der Normalgleichungen (5) S. 126, z. B.:

$$\left[\frac{a a}{p} \right] = [q a a] = 3,7 + 0,7 \dots = + 9,1$$

$$\left[\frac{a b}{p} \right] = [q a b] = - 0,7 \dots = - 1,4$$

$$\left[\frac{a c}{p} \right] = [q a c] = \dots = 0$$

$$\left[\frac{a g}{p} \right] = [q a g] = - 1,37 \times 3,7 - 2,19 \times 0,7 \dots = - 6,07$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{g g}{p} \right] &= [q g g] = 1,37^2 \times 3,7 + 2,19^2 \times 0,7 + 0,82^2 \times 0,7 \\ &= 7,00 + 3,36 + 0,47 \dots = 42,70 \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots$$

Nachdem so alle Coefficienten ohne Schwierigkeiten ausgerechnet sind, bildet man die Normalgleichungen (5) S. 126, welche in abgekürzter Schreibweise (nach S. 80 unten) sich so darstellen:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	w
+ 9,1	- 1,4	.	- 2,7	.	.	- 6,07	+ 0,48
	+ 4,4	- 1,7	.	.	.	- 0,05	+ 0,26
		+ 4,8	.	.	- 1,4	+ 0,84	.	.	.	- 0,42	+ 0,32
			+ 9,6	- 3,2	.	+ 7,92	.	.	.	+ 0,13	- 0,17
				+ 10,4	- 3,7	+ 1,23	.	.	- 3,5	+ 0,80	+ 0,94
					+ 8,8	- 6,73	- 3,7	.	.	+ 0,57	+ 1,38
						+ 42,70	+ 2,08	.	- 0,62	- 1,81	- 8,85
							+ 14,5	- 5,5	.	+ 1,52	+ 0,89
								+ 13,4	- 0,7	+ 5,90	+ 1,05
									+ 9,6	- 2,15	+ 0,08
										+ 31,97	- 3,10

Die Auflösung dieser Normalgleichungen giebt:

$$\begin{array}{lll}
 k_1 = + 0,0010 & k_5 = - 0,3748 & k_9 = - 0,2897 \\
 k_2 = - 0,1459 & k_6 = - 0,2942 & k_{10} = - 0,1082 \\
 k_3 = - 0,2329 & k_7 = + 0,2569 & k_{11} = + 0,1849 \\
 k_4 = - 0,3213 & k_8 = - 0,3025 &
 \end{array}$$

Mit diesen Werten k berechnet man die Verbesserungen v nach den Formeln (3) S. 120, wobei man der Tabelle (4) nach Vertikalspalten folgt, z. B.:

$$p_1 v_1 = -k_1 + 1,37 k_7 = -0,001 + 0,352 = + 0,351$$

dabei ist $\frac{1}{p_1} = q_1 = 3,7$

also $v_1 = + 1,30''$, wie es bereits auf S. 293 eingeschrieben ist.

Übrigens macht man diese Ausrechnung aller v selbst tabellarisch, wie früher S. 194—195 gezeigt worden ist, weshalb dazu nun nichts weiter bemerkt wird. Die Ausrechnung der verbesserten Richtungen durch Zufügung der v zu den gemessenen Richtungen ist auch auf der Abriss-Tabelle S. 293 bereits gemacht, und es wäre dazu nur zu bemerken, dass die ausgeglichenen Richtungen $A + v$ nochmals in jedem Satze so verschoben wurden, dass der Satz wieder mit $0^\circ 0' 0''$ beginnt, was rein formelle Änderung ist.

Das nächste ist nun, auch die ausgeglichenen Winkel als Differenzen der Richtungen auszuziehen, die 9 Dreiecke auf $180^\circ 0' 0'' + \text{Excess}$ zu erproben und alle Dreiecksseiten auszurechnen. Anleitung dazu ist nicht nötig, da solche Ausrechnungen bereits auf S. 183—184 und auf S. 196—197 durchgenommen sind; die Dreiecksseiten können in unserem Falle im Anschluss an die Basisseiten (2) bzw. (3) nach der „Additamentenmethode“ oder auch nach dem Legendreschen Satze berechnet werden.

Folgendes sind hiefür die Ergebnisse, nur mit Nummern nach Fig. 1. S. 292 bezeichnet:

1. $\log s = 4.415\ 6477$	19.	15. $\log s = 4.546\ 5598$	22.
2. „ 4.491 6525	13.	16. „ 4.676 9917	26.
3. „ 4.663 3423	4.	17. „ 4.534 6840	23.
5. „ 4.650 8960	12.	20. „ 4.610 2294	33.
6. „ 4.423 9849	7.	21. „ 4.592 9508	27.
8. „ 4.591 5057	11.	24. „ 4.429 2849	30.
9. „ 4.579 5859	25.	28. „ 4.570 5943	(33.)
10. „ 4.284 9536	29.	28. „ 4.155 0338	(32.)
14. „ 4.279 0039	18.	31. „ 4.490 4037	32.

Mehr Interesse bietet die Verteilung der v und die aus den v zu ziehenden Genauigkeitsberechnungen. Wir haben in dem Gesamtabriss S. 293 ausser den v selbst auch die $v\sqrt{p}$ und die v^2p nebst der Summe $[v^2p]$ ausgerechnet, welche den mittleren Gewichtseinheitsfehler giebt:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2p]}{11}} = \pm 0,62'' \quad (5)$$

(Man hat dazu auch die Probe $-[wk]$, welche ausgerechnet ebenfalls sehr nahe $= 4,2$ giebt übereinstimmend mit $[v^2p] = 4,19$).

Dieses $m = \pm 0,62''$ ist zu vergleichen mit der ursprünglichen Festsetzung $M = 0,412''$ bei (1) als Gewichtseinheitsfehler vor der Ausgleichung, und das Verhältnis $0,62 : 0,41 = 1,5$ pflegt in solchen Fällen als Massstab für die Güte der Genauigkeitsschätzung vor der Ausgleichung genommen zu werden. In unserem Falle sind also bei 1,5 die Fehler im Allgemeinen nach der Ausgleichung um 50 % grösser als vor der Ausgleichung erwartet war, und ein ähnliches Verhältnis pflegt sich in solchen Fällen in der Regel einzustellen und gilt noch als befriedigend, während ein erheblich grösserer Wert des Verhältnisses $m : M$ als 1,5 vielleicht Veranlassung geben könnte, die Ausgleichung mit neuen Gewichtsannahmen zu wiederholen. —

Auch abgesehen von diesem Verhältnis $m : M$, welches im Allgemeinen gilt, bietet die Abrisstabelle von S. 293 noch Stoff zu Überlegungen, ob in den einzelnen Richtungsfällen die Schätzungen gut waren. Es sind nämlich die $v\sqrt{p}$ die auf die Gewichtseinheit $p = 1$ reduzierten Fehler, und man wird deshalb nun nachsehen, welche $v\sqrt{p}$ erheblich grösser als $0,41''$ sind? Doppelt so gross als $0,41''$ oder noch grösser sind nur die zwei Fälle v_{27} und v_{32} , welche nun etwa Veranlassung zu näherer Untersuchung geben könnten, von welcher aber hier, wo wir das Ganze nur als formelles Schulbeispiel durchgenommen haben, nicht die Rede sein kann.

Überblicken wir zum Schluss nochmals im Ganzen die neue Helmertsche Theorie der Netzausgleichung, so finden wir darin Fortschritte gegen früher in mehr als einer Hinsicht. Zuvörderst ist die Theorie mit den *Richtungsgewichten* $1:q$ eine Vervollkommenung der früheren roheren Annahmen von „Anschnittszahlen“ als Gewichten, und in solchen Fällen, welche bei der Längengradmessung die Regel waren, bei welchen nämlich bereits strenge Ausgleichungen nach Bessels Theorie mit den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$... in bequemster Weise zur Verfügung bereit

lagen, war die neue Theorie der q ausgezeichnet am Platze. Wenn aber künftig die $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. für den Zweck der q besonders auszurechnen sein werden, wird die Bequemlichkeit des neuen Verfahrens vermindert, während die sonstigen Vorzüge bestehen bleiben.

Das zweite unterscheidende Merkmal der neuen Theorie gegen frühere Verfahren ist die Einführung des *Netzrichtungsfehlers* r in der Gleichung (22) S. 291, welcher im Mittel zu $r = \pm 0,4''$ gefunden wurde; und es ist nur zu fragen, mit welchem Grade von Zuverlässigkeit ein solches r wohl im einzelnen Falle eingeführt werden kann? —

§ 84. Günstigste Wahl der Seitengleichung im Viereck.

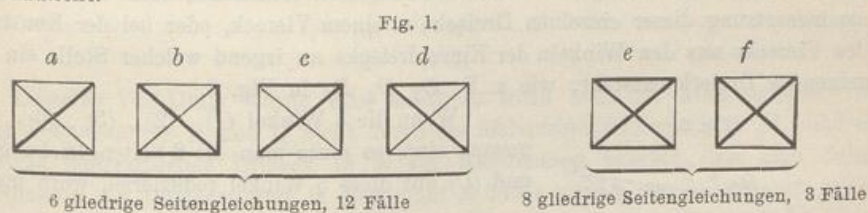
Am Schlusse von § 58. S. 178 haben wir eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Vierecke kurz erwähnt und auf den Schluss dieses Kapitels verschoben, so dass wir nun diese Sache zu behandeln haben.

Ebenso wie die Winkelsummen-Bedingungen in verschiedenen Formen ausgedrückt werden konnten (s. § 57. Gleichungen (14)–(17) S. 167, so kann auch die Bedingung übereinstimmender Seitenberechnung in einem Viereck in verschiedenen Formen festgelegt werden, und es ist für die Schärfe der Rechnung nicht gleichgültig, welche von diesen Formen gewählt wird.

Eine erste Regel, welche sich von selbst darbietet, lautet, man soll die *spitzen* Winkel, welche bei Schnittpunktsbestimmungen auftreten, unmittelbar in die Seitengleichungen einführen; man erhält dadurch grosse Cotangenten als Coefficienten.

Eine erste tiefergehende Untersuchung dieser Frage wurde von *Zachariae* angestellt in dem Werke „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten“, aus dem Dänischen ins Deutsche übersetzt von *Lamp*, S. 152 u. ff. Wir haben hierüber in der „Zeitschr. für Verm. 1880“ S. 65–73 berichtet und noch einige Ergebnisse hinzu gewonnen, wie im Folgenden dargelegt wird:

Das Wesen der Seitengleichung im Viereck besteht darin, dass, bei Annahme einer beliebigen Seite als Basis, jede andere Seite auf allen möglichen Wegen aus dieser Basis übereinstimmend erhalten werden muss, man hat daher zunächst so viele Formen von Seitengleichungen, als die Zahl der Kombinationen der 6 Seiten zu zweien beträgt, nämlich $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$. Diese 15 Fälle sind durch Fig. 1. a, b, c, d, e, f veranschaulicht.



a bis d enthalten je 3 Kombinationen, nämlich die Verbindung von je 2 solchen Seiten, welche einen Winkelpunkt gemeinsam haben, e und f enthalten zusammen 3 Fälle, nämlich die Verbindungen von je 2 Gegenseiten und die Diagonalenkombination doppelt.