Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 12. Darstellung der Geraden.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

2) Wird die Grundebene in der früher angegebenen und auch aus der Fig. 34 ersichtlichen Weise in die Aufrißebene heruntergeklappt (Fig. 35), so fallen nach 1) die Lote P_1P_x und P_2P_x in eine Gerade. Wir erhalten damit den einfachen, aber sehr wichtigen Satz:

Grund- und Aufriß eines Punktes liegen stets auf einer Senkrechten zur Achse.

Umgekehrt können nur dann je ein Punkt der ersten und zweiten Bildebene die Bilder eines und desselben Raumpunktes sein, wenn ihre Lote auf die Bildachse denselben Fußpunkt haben.

3) Übungen. a) Warum ist ein Punkt des Raumes durch seine Projektion auf *eine* feste Ebene nicht bestimmt? Welche Angaben wären noch erforderlich, um seine Lage völlig zu bestimmen?

b) Wie liegen (Fig. 36 und 37) Grund- und Aufriß zur Bildachse, wenn der abzubildende Punkt 1. im I.; 2. im II.; 3. im III.; 4. im IV. Raumviertel liegt?

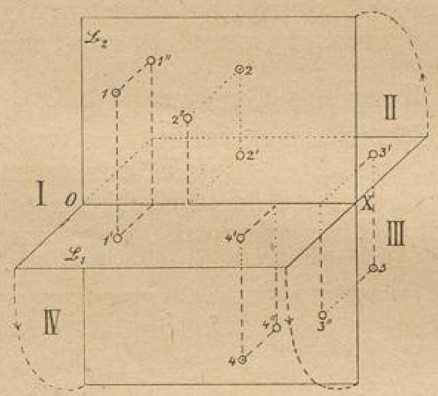

Fig. 36.

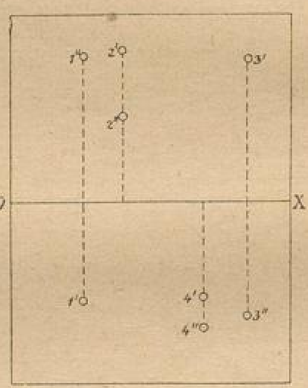

Fig. 37.

c) Wo liegt P, wenn 1. sein Grundriß P_1; 2. sein Aufriß P_2 auf der Bildachse liegt?

d) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß den gleichen Abstand von der Achse haben? (Halbierungsebene; zwei Möglichkeiten!)

e) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß 1. über der Achse; 2. unter der Achse zusammenfallen? (Vgl. d.)

§ 12. Darstellung der Geraden.

1 a) Projizieren wir (Fig. 38) die Gerade g, die B_1 im Punkte G und B_2 im Punkte A durchstößt, auf die beiden Bildebenen, so erhalten wir als ihre *erste Projektion* (*Grundriß*) die Gerade g_1, als *zweite Projektion* (*Aufriß*) g_2. Die Projektionen einer Geraden sind im allgemeinen wieder Gerade. Denn sie ergeben sich als Schnittgerade der projizierenden Ebenen, die die Gesamtheit aller projizierenden Lote umfassen, mit den Bildebenen. Aus ihren Projektionen g_1 und

g_2 ergibt sich umgekehrt die ursprüngliche Gerade g als Schnitt der durch g_1 und g_2 zu den zugehörigen Bildebenen gelegten Normalebenen.

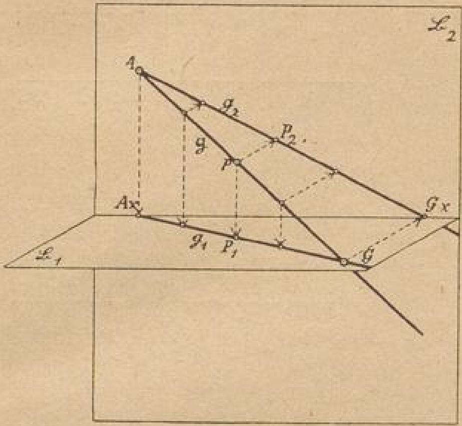

Fig. 38.

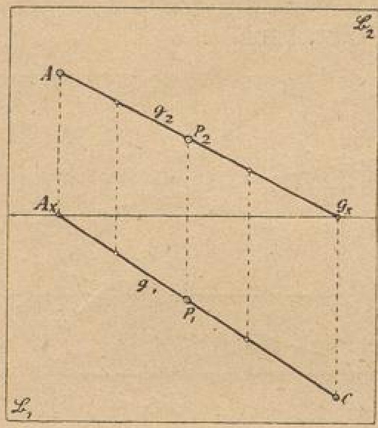

Fig. 39.

Nach Vereinigung der Grundebene mit der Bildebene gewinnen wir für die Gerade g (Fig. 38) die in Fig. 39 gegebene Darstellung. Die Bilder desselben Punktes P liegen auf einer Senkrechten zur Achse ($P_1P_2 \perp OX$).

b) Der Punkt G, in dem g die Grundrißebene durchstößt, heißt die **erste Spur** oder **Grundrißspur** der Geraden, entsprechend der Punkt A ihre **zweite Spur** oder **Aufrißspur.** Jeder dieser Spurpunkte fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, z. B. G mit seiner ersten Projektion G_1. Die zweite Projektion G_x von G liegt auf der Achse, ebenso die erste A_x von A. Die Grundrißspur G der Geraden g liegt daher (Fig. 38 und 39) senkrecht unter (oder über) dem Schnittpunkte G_x ihrer zweiten Projektion g_2 mit der Achse; ihre Aufrißspur dagegen senkrecht über (oder unter) dem Schnittpunkte A_x ihrer ersten Projektion g_1 mit der Achse. Löse danach die

Aufgabe 1. Die Spuren einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden zu bestimmen (Fig. 38).

Umgekehrt sind durch die Spuren G und A einer Geraden g auch ihre Projektionen g_1 und g_2 bestimmt.

Aufgabe 2. Gegeben sind die Spuren G und A einer Geraden g. Ihre Projektionen g_1 und g_2 zu finden.

Man lote (Fig. 39) die Spuren auf die Achse und verbinde den Fußpunkt A_x des Lotes von A mit G und den Fußpunkt G_x des Lotes von G mit A.

2) Gerade in besonderer Lage zu den Bildebenen.

Bei den folgenden in besonderer Lage befindlichen Geraden sind die Spuren zu bestimmen oder ihre Lage anzugeben. Zur Erleichterung der Anschauung und des Verständnisses ist stets zuerst ein Schrägbild anzufertigen.

a) g iſt ſchief zu beiden Bildebenen und durchſtößt $\mathfrak{B}_1$ hinter der Achſe, ſo daß nur die zweite Spur ſichtbar iſt (Fig. 40 und 41). In welchem Raumviertel liegt die von den Spuren begrenzte Strecke AG der Geraden?

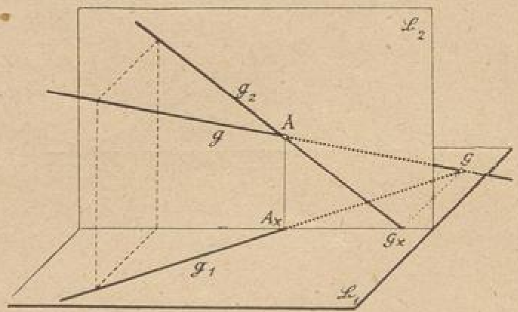

Fig. 40.

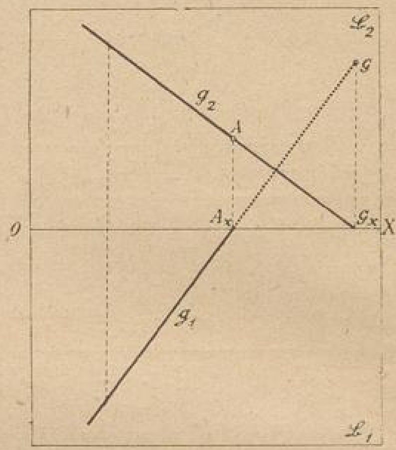

Fig. 41.

b) g iſt parallel zu $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$) und ſchief zu $\mathfrak{B}_2$ ($\mathfrak{B}_1$). Vgl. Fig. 42 und 43. Die zweite Projektion g_2 iſt der Achſe parallel. Wo liegt G_x (A_x)?

c) g iſt parallel zu $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Zeichnung! Wo liegen die Spuren G und A von g?

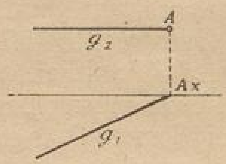

Fig. 42.

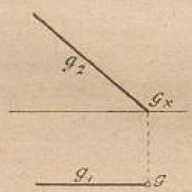

Fig. 43.

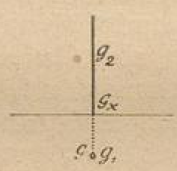

Fig. 44.

Fig. 45.

d) g iſt ſenkrecht zu $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$). S. Fig. 44. g_1 ſchrumpft in dieſem Falle in einen Punkt zuſammen, der mit der erſten Spur G von g zuſammenfällt. Wo liegt die zweite Spur A?

e) g liegt in $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$). S. Fig. 45.

3a) Gerade und Punkt.

Ein Punkt P (Fig. 38 und 39) **liegt dann und nur dann auf einer Geraden, wenn ſeine Projektionen P_1 und P_2 auf den entſprechenden Projektionen der Geraden liegen, alſo P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2.**

Umgekehrt geht eine Gerade dann und nur dann durch einen Punkt P, wenn ihre Projektionen durch die entſprechenden Projektionen des Punktes gehen.

b) Für die Beurteilung der **Lage zweier Geraden** ergibt ſich aus a) der wichtige Satz:

Schneiden ſich zwei Gerade (g und l, Fig. 46), ſo liegen die Schnittpunkte S_1 und S_2 ihrer gleichnamigen Projektionen auf einem Lot (S_1S_2) zur Achſe und umgekehrt.

Rückt der Schnittpunkt P der Geraden g und l ins Unendliche, so rücken damit auch seine Projektionen ins Unendliche. Was folgt daraus für die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden?[1])

Aufgabe. Zu einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden durch einen Punkt P (P_1P_2) die Parallele zu zeichnen. Lösung!

Liegen (Fig. 47) die Schnittpunkte der Projektionen zweier Geraden g und l nicht senkrecht untereinander, so haben die Geraden im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam. Die Projektionen stellen also **zwei windschiefe Gerade** dar.

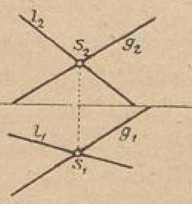

Fig. 46.

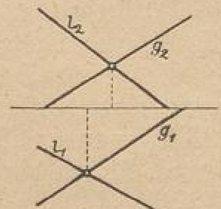

Fig. 47.

In welchem Ausnahmefalle können die Schnittpunkte der Projektionen zweier windschiefer] Geraden senkrecht untereinander liegen?

§ 13. Bestimmung der Tafelneigungen einer Geraden und der wahren Länge einer Strecke.

1) Aufgabe. Die Neigungswinkel einer Geraden g mit den Bildebenen zu bestimmen.

Da GA_x (s. Schrägbild Fig. 48) die Projektion von g auf $\mathfrak{B}_1$ ist, ist $\sphericalangle AGA_x$ der Neigungswinkel γ_1 von g mit der ersten Tafel oder Bildebene. Um γ_1 zu finden, denken wir uns das Dreieck GA_xA um GA_x in die erste Bildebene umgelegt, so daß es in die Lage des Dreiecks GA_xA_0 kommt. Wir erhalten dann zur Bestimmung von γ_1 die folgende Konstruktion: Man errichte (Fig. 49) auf GA_x in A_x das Lot $A_xA_0 = A_xA$ und verbinde A_0 mit G. Alsdann ist $\sphericalangle A_0GA = \gamma_1$.

Entsprechend finden wir den Neigungswinkel γ_2 mit der zweiten Bildebene.

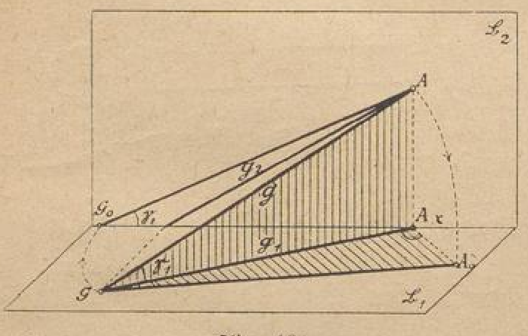

Fig. 48.

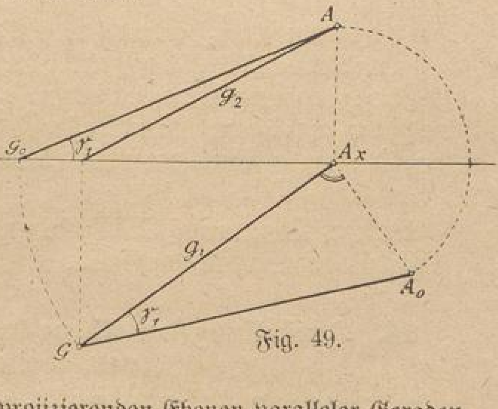

Fig. 49.

[1]) Beachte auch, daß die entsprechenden projizierenden Ebenen paralleler Geraden parallel sind.