Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 15. Darstellung von Körpern in einfacher Stellung. Abwicklung.

Wir erhalten daher die zweite Projektion der Schnittlinie mn mit dem Dreieck dadurch, daß wir die Punkte m′ und n′ von 1′2′ und 2′3′ hinaufloten. Der Schnittpunkt S_2 von g_2 mit m″n″ ist der Aufriß des gesuchten Durchstoßpunktes. Seine erste Projektion S_1 ergibt sich durch Herunterloten auf g_1.

Sichtbarkeit. Die Dreiecksfläche denken wir uns undurchsichtig. Um nun festzustellen, welches Stück der Geraden g durch das Dreieck z. B. im Grundriß, also für ein senkrecht über der Grundrißebene befindliches Auge, verdeckt erscheint, beachten wir, daß n′ (o′) die erste Projektion sowohl des auf der Dreiecksseite gelegenen Punktes n, als auch des auf der Geraden g gelegenen Punktes o ist. Da o″ unter n″ liegt, geht die Seite 23 über g hinweg. Mithin ist die Strecke S_1n′ von oben nicht sichtbar.

Aufgabe 5. Die Schnittlinie zweier sich schneidender Dreiecke (Vierecke), deren Projektionen gegeben sind, zu bestimmen (Fig. 56). Lösung nach Aufg. 4.

§ 15. Darstellung von Körpern in einfacher Stellung. Abwicklung.

Aufgabe 1. Einen auf der Grundebene ruhenden Würfel (Kantenlänge a = 5 cm), von dem zwei Seitenflächen der Aufrißebene parallel sind, in senkrechter Projektion zu zeichnen (Fig. 57).

Grundriß und Aufriß sind je ein Quadrat mit der Seite a.

Aufgabe 2. Der in Fig. 57 gezeichnete Würfel soll um die Kante 26 um den Winkel α = 30° gedreht und in der neuen Lage dargestellt werden (s. Fig. 58).

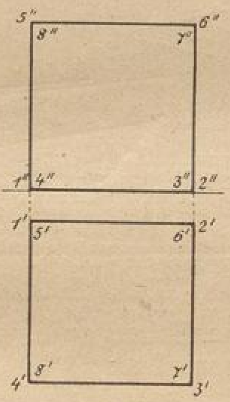

Fig. 57.

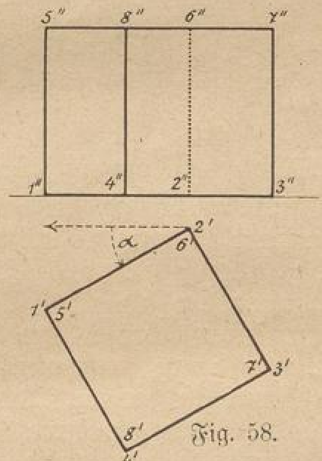

Fig. 58.

Aufgabe 3. Eine regelmäßig-achtseitige Säule, die auf einem quadratischen Sockel steht, darzustellen (Maßstab 1 : 10). Grundkante des Sockels a = 50 cm, der Säule b = 15 cm, Höhe entsprechend h = 15 cm und l = 80 cm.

Aufgabe 4. Eine regelmäßig-fünfseitige Pyramide, die mit der Grundfläche auf der Grundebene steht und deren Grundkante a und Höhe h gegeben sind, darzustellen. Ferner soll der im Abstande x von der Spitze zur Grundfläche parallele Schnitt und die Abwicklung des Körpers gezeichnet werden.

Der Grundriß des Körpers (Fig. 59) ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seite a. Die Verbindungsstrecken seiner Ecken mit dem Mittelpunkte S_1, der ersten Projektion der Spitze S, sind die Grundrisse der Seitenkanten. Zur Gewinnung des Aufrisses fälle man von S_1 auf die Achse das Lot und verlängere es um h bis S_2, der zweiten Projektion der Spitze, und verbinde S_2 mit den zweiten Projektionen der Ecken der Grundfläche. Denkt man sich die Ober-

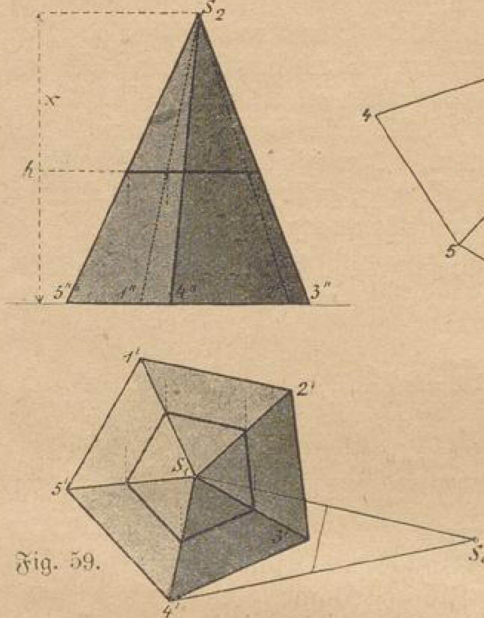

Fig. 59.

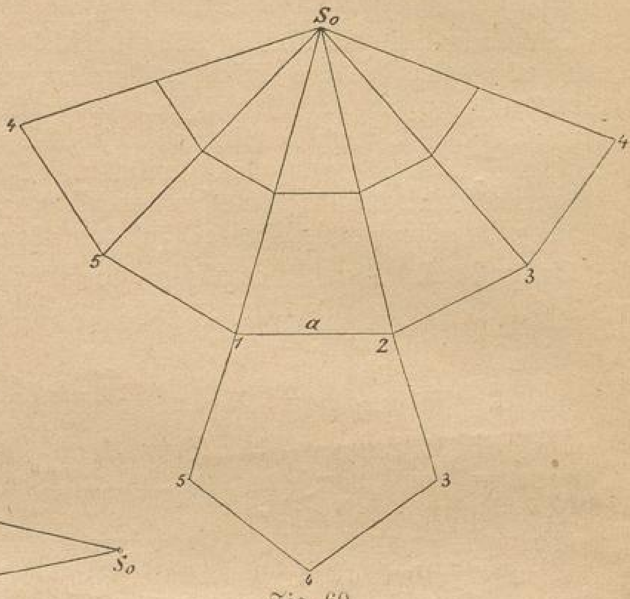

Fig. 60.

fläche des Körpers abgelöst und längs einer Seitenkante und der Grundkanten bis auf 1 2 aufgeschnitten, so erhält man durch Ausbreiten in eine Ebene das Netz des Körpers (Fig. 60), das im vorliegenden Falle aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit einem anhängenden Fünfeck besteht. Die Konstruktion des Netzes erfordert die Ermittlung der Länge der Seitenkante. Diese ergibt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ($4' S_1 S_0$), dessen eine Kathete gleich dem großen Radius des Fünfecks ($4' S_1$) und dessen andere Kathete die gegebene Höhe ist. Das auf der Grundebene senkrecht stehende Dreieck wird zur bequemen Konstruktion um $4' S_1$ in die Grundebene umgelegt (Fig. 59). Mit Hilfe des Netzes ist ein Modell des Körpers anzufertigen.

Aufgabe 5. Die Normalbilder eines auf der Grundebene stehenden a) geraden Zylinders mit Achsenschnitt und Querschnitt, b) geraden Kegels mit Achsenschnitt und Querschnitt, c) einer auf der Grundebene ruhenden Kugel zu zeichnen.

a) Der Grundriß (Fig. 61) ist ein mit der Grundfläche des Zylinders zusammenfallender Kreis. Der Aufriß ist ein zur Achse senkrechtes Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Durchmesser des Grundkreises und dessen andere gleich der Höhe des Körpers ist. Welche Projektionen hat der Achsenschnitt 1 2 3 4 und der zur Grundfläche parallele Schnitt Q im Grund- und Aufriß? Eine Mantellinie, z. B.

1 4, erscheint in der ersten Projektion als Punkt, in der zweiten als Lot zur Achse.

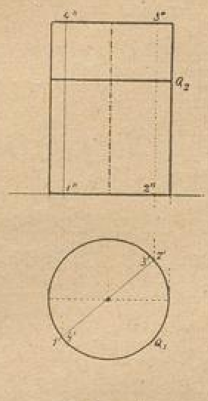

Fig. 61.

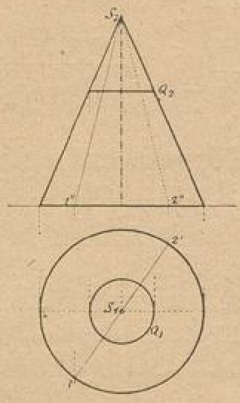

Fig. 62.

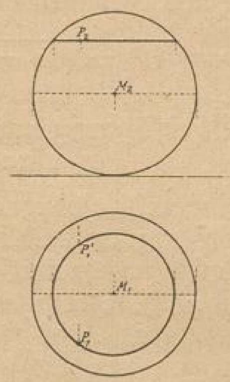

Fig. 63.

b) Welche Projektionen ergibt der Kegel? (Fig. 62). Welche der Achsenschnitt 1 2 S und der Parallelschnitt Q? Jeder Radius des Grundkreises, z. B. $1' S_1$, ist zugleich Projektion einer zugehörigen Seitenlinie (1 S).

c) Die Projektionsstrahlen (Fig. 63), die die Kugelfläche berühren, bilden eine die Kugel berührende Zylinderfläche. Die beiden Projektionen sind größte Kreise mit dem Radius der Kugel, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf einem Lot zur Achse liegen; sie sind gleichzeitig die Projektionen der zu den Bildebenen parallelen größten Kreise. Wie stellt sich ein zur Grundebene paralleler Schnittkreis dar? Wie findet man zum Aufriß P_2 des auf dem Schnittkreis gelegenen Punktes P den Grundriß P_1?

Aufgabe 6. Den Mantel des in Fig. 61 dargestellten Zylinders abzuwickeln.

Anleitung. Um die Länge eines Kurvenstücks als gerade Strecke annähernd darzustellen (zu rektifizieren), gibt man dem Stechzirkel eine so kleine Öffnung, daß das zwischen den Spitzen liegende Kurvenstück als geradlinig angenommen werden kann, trägt diese Strecke so oft auf einer Geraden ab, wie sie in dem vorliegenden Kurvenstück enthalten ist, und fügt das übrigbleibende Stück hinzu.

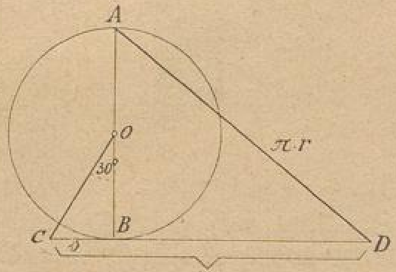

Fig. 64.

Von besonderer Wichtigkeit ist die **Rektifikation**[1]) **der Kreislinie.** Will man den halben Umfang des Kreises in Fig. 64 sehr angenähert haben, so

[1]) Zusammensetzung des lat. rectus (gerade) und facere (machen).

zeichne man den Durchmesser AB, trage im Mittelpunkte O einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die in B gezeichnete Tangente in C trifft, und verlängere CB = s bis D, so daß CD = 3r wird. Alsdann ist der halbe Umfang sehr angenähert gleich

$$AD = \sqrt{4r^2 + (3r - s)^2} = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}141533\ldots r.^{1)}$$

§ 16. Überführung von Körpern aus einfacher Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung.

Die Normalprojektionen von Körpern in einfacher Stellung geben zumeist wenig anschauliche Bilder, weil dabei im allgemeinen die Projektionen mehrerer Kanten und Flächen zusammenfallen (vgl. z. B. Fig. 57). Jedoch kann der Körper leicht durch mehrfache Verschiebung parallel zu den Bildebenen (Tafeln) und mehrfache Drehungen um Achsen, die zu einer Bildebene senkrecht sind, sog. Tafellote, in eine allgemeinere Stellung übergeführt werden, in der wir sehr anschauliche Bilder von dem Körper erhalten.

Aufgabe 1. Ein Würfel soll aus einer einfachen Anfangsstellung durch Parallelverschiebung zu den Tafeln und durch Drehung um Tafellote in eine allgemeinere Stellung übergeführt und seine Projektion gezeichnet werden (Fig. 65).

I. Wir gehen von der in Fig. 65a gekennzeichneten einfachen

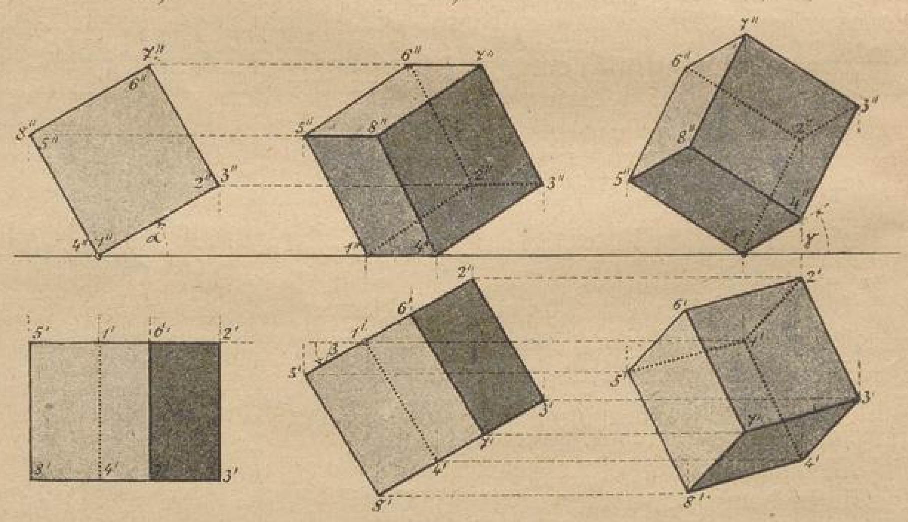

Fig. 65.

Stellung des Würfels aus, die sich aus der Frontstellung ergibt, wenn wir den Körper parallel zur zweiten Tafel verschieben und ihn

---

1) Statt 3,1415927 ... r. Der Fehler ist also kleiner als $\frac{6}{100000} = \frac{3}{50000}$ des Durchmessers. $s = r\,\mathrm{tg}\ 30° = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.