Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 17. Darstellung der Ebene durch Spuren. Gerade und Punkte in der Ebene. Tafelneigung einer Ebene.

dann um die Kante 14, die ein Lot zur zweiten Tafel ist, als Achse um den Winkel α drehen. Der Aufriß verändert dabei nicht seine Gestalt, bleibt also ein Quadrat, das gegen die Achse um den Winkel α gedreht ist. Die Grundrißpunkte verschieben sich dabei parallel zur Achse; sie liegen senkrecht unter den zugehörigen Aufrißpunkten.

II. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zu der ersten Tafel drehen wir den Würfel um das durch die Ecke 1 gehende erste Tafellot um den Winkel β (Fig. 65 b). Der Grundriß erfährt dadurch keine Änderung in seiner Gestalt, er wird um den Punkt 1′ um Winkel β gedreht. Die Eckpunkte bewegen sich bei der vorgenommenen Drehung parallel zur Grundebene. Ihre Aufrisse liegen demnach auf den durch die Aufrißpunkte in der Stellung a) gezogenen Parallelen zur Achse. Sie ergeben sich durch Hinaufloten aus dem Grundriß.

III. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zur zweiten Tafel drehen wir endlich den Würfel um das durch Eckpunkt 1 gehende zweite Tafellot um den Winkel γ (Fig. 65 c). Der Aufriß erleidet dadurch nur eine Drehung um γ um den Punkt 1″; seine Gestalt bleibt erhalten. Da sich die Eckpunkte des Würfels bei der Drehung parallel zur zweiten Tafel bewegen, so bleiben ihre zweiten Abstände erhalten. Ihre Grundrisse verschieben sich mithin nur parallel zur Achse, liegen also auf Parallelen zur Achse. Die Grundrisse der Ecken finden wir schließlich aus ihren Aufrissen durch Herunterloten.

Aufgabe 2. a) Ein regelmäßig-sechsseitiges Prisma (einen geraden Zylinder), b) eine regelmäßig-nseitige Pyramide (Kegel) aus einer einfachen Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung überzuführen und darzustellen.

Anmerkung. Ein einfacheres Verfahren zur Darstellung eines Körpers in allgemeiner Lage lehrt § 22.

§ 17. Darstellung der Ebene durch Spuren. Gerade und Punkte in der Ebene. Tafelneigung einer Ebene.

1) Eine unbegrenzte Ebene $\mathfrak{E}$ (Fig. 66) kann nicht wie Punkt und Gerade durch Projektion auf die Bildebenen dargestellt werden. Denn man bekäme im allgemeinen als ihre Projektion wieder die Bildebene. Man pflegt deshalb eine solche Ebene, da sie durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist, durch ihre **Spuren** e_1 und e_2 auf den Projektionsebenen, das sind ihre Schnittgeraden mit den Projektionsebenen, darzustellen (Fig. 67). Die Schnittgerade e_1

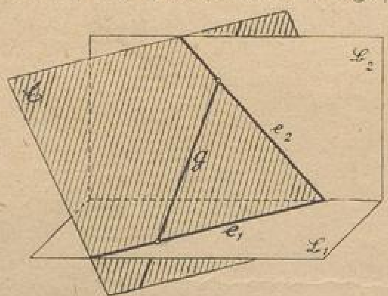

Fig. 66.

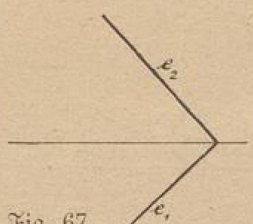

Fig. 67.

heißt die **erste**, e_2 die **zweite Spur**. Die beiden Spuren treffen sich in einem Punkte auf der Achse (Grund?).

Übungen. Stelle eine Ebene $\mathfrak{E}$ im Schrägbilde dar und zeichne daneben ihre Spuren in senkrechter Projektion, wenn $\mathfrak{E}$

a) zur ersten Bildebene senkrecht steht und schief zur zweiten ist;
b) zur zweiten Bildebene senkrecht steht und schief zur ersten ist;
c) zu einer Bildebene, etwa $\mathfrak{B}_2$, parallel ist;
d) zur Achse parallel ist;
e) zur Achse senkrecht ist.

Wie verlaufen die Spuren paralleler Ebenen? (Schrägbild!)

2) Gerade in der Ebene.

Liegt eine Gerade g (Fig. 66) in einer Ebene (e_1, e_2), so kann sie die Bildebenen nur in den Spuren der Ebene $\mathfrak{E}$ durchstoßen, und die Durchstoßpunkte sind zugleich die Spurpunkte der Geraden. Daraus ergibt sich:

Eine Gerade liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn ihre Spurpunkte in den gleichnamigen Spuren der Ebene liegen. Umgekehrt geht eine Ebene durch eine Gerade, wenn ihre Spuren durch die gleichnamigen Spurpunkte der Geraden hindurchgehen (Fig. 66).

Aufgabe 1. Von einer in der Ebene $\mathfrak{E} = (e_1 e_2)$ liegenden Geraden g ist die erste Projektion g_1 gegeben. Die zweite Projektion g_2 zu bestimmen.

Zur Lösung s. Fig. 72.

g_1 schneidet e_1 in G und die Achse in A_x. Der zweite Spurpunkt liegt senkrecht über A_x auf e_2. Zeichnung!

Aufgabe 2. Die Spuren der Ebene zu zeichnen, die durch zwei sich schneidende Gerade $g = (g_1, g_2)$ und $h = (h_1, h_2)$ bestimmt ist.

Die erste Spur e_1 (Fig. 68) der gesuchten Ebene muß durch die ersten Spurpunkte G_1 und H_1 von g und h gehen, ebenso e_2 durch G_2 und H_2. Die gefundenen Spuren e_1 und e_2 müssen sich auf der Achse treffen.

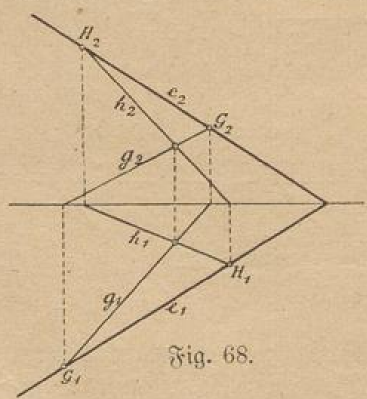

Fig. 68.

Aufgabe 2a. Löse Aufg. 2 für den Fall, daß die gegebenen Geraden parallel sind.

Anmerkung. Liegt ein Spurpunkt einer Geraden nicht auf der Zeichenfläche, so benutzt man eine Hilfsgerade, die die beiden gegebenen Geraden schneidet.

Aufgabe 3. Die Schnittlinie zweier durch ihre Spuren (e_1, e_2) und (f_1, f_2) gegebenen Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ zu bestimmen.

Aus dem Schrägbilde (Fig. 69) erkennt

man, daß die Schnittpunkte G_1 und G_2 der gleichnamigen Spurgeraden zugleich die Spurpunkte der gesuchten Schnittgeraden g sind. Lösung s. Fig. 70 (vgl. § 12, Aufg. 2).

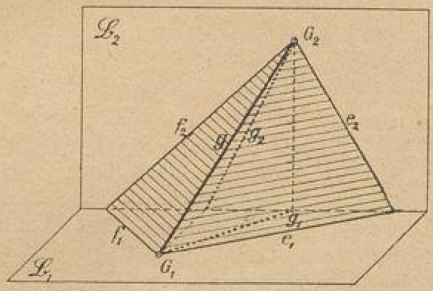

Fig. 69.

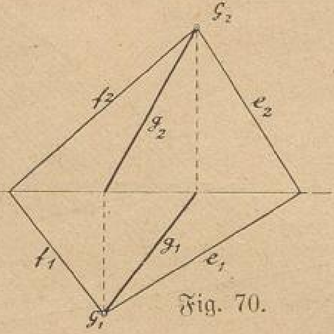

Fig. 70.

Stehen die beiden Ebenen E und F senkrecht zur ersten Bildebene, so ist auch die Schnittgerade g senkrecht (L. I. § 72, 3b) zu ihr (Fig. 71).

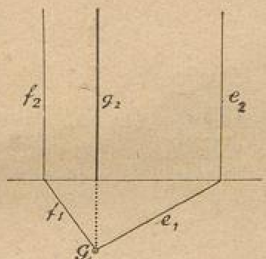

Fig. 71.

3) Punkte in der Ebene.

Als Bindeglied zwischen Punkt und Ebene benutzt man die Gerade. **Ein Punkt liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn er auf einer in ihr beliebig gezogenen Geraden liegt und umgekehrt.**

Aufgabe 4. Von einem auf der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist die erste Projektion P_1 gegeben. Die zweite Projektion zu bestimmen (Fig. 72).

Durch P_1 zieht man die Gerade g_1, die man als erste Projektion einer durch P in E gezogenen Geraden betrachtet, bestimmt nach Aufg. 1 ihren Aufriß g_2 und erhält durch Hinaufloten den Aufriß P_2.

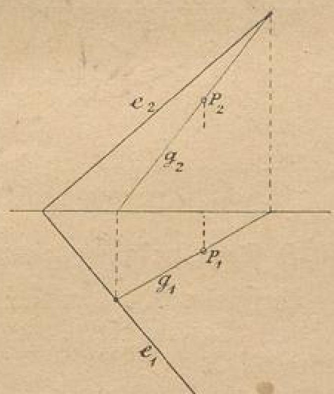

Fig. 72.

Wie kann man also feststellen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt oder nicht?

In der Regel benutzt man zur Vereinfachung der Konstruktion nicht eine beliebige Gerade der Ebene, sondern eine **Tafelparallele,** d. h. eine Gerade, die entweder der ersten Tafel B_1 **(erste Tafelparallele)** oder der zweiten Tafel B_2 **(zweite Tafelparallele)** parallel ist.

In Fig. 74 ist die Aufg. 4 mit Hilfe der ersten Tafelparallelen gelöst. Die durch P gehende erste Tafelparallele t (s. das Schrägbild Fig. 73) hat als erste Projektion t_1 eine Parallele zu e_1 (L. I. § 71, 1), als zweite t_2 eine Parallele zur Achse. Wo liegt ihre erste Spur? Löse die Aufgabe auch mit Hilfe der zweiten Tafelparallelen.

Welche Sätze gelten für die Projektionen der Tafelparallelen einer Ebene?

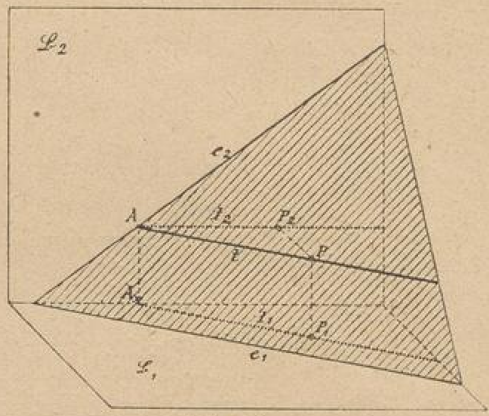

Fig. 73.

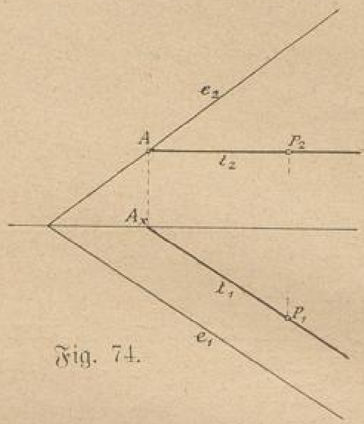

Fig. 74.

Aufgabe 5. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch eine Gerade (g_1, g_2) und einen Punkt (P_1, P_2) hindurchgeht (Fig. 75).

Die Aufgabe wird auf Aufg. 2 zurückgeführt, indem man durch Punkt P eine Gerade legt, die die gegebene Gerade in einem Punkte $Q = (Q_1, Q_2)$ schneidet. Am bequemsten benutzt man eine Tafelparallele, z. B. die Parallele zur zweiten Bildebene t_1, t_2 (zweite Spurparallele).

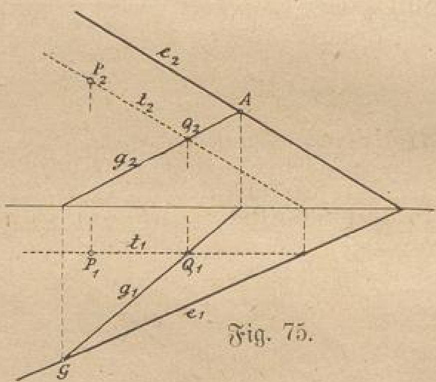

Fig. 75.

Aufgabe 6. Die Spuren einer beliebigen Ebene zu zeichnen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1, P_2) geht.

Aufgabe 7. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1. P_2) geht und einer gegebenen Ebene (e_1, e_2) parallel ist.

4) Tafelneigung einer Ebene.

Aufgabe 8. Den Neigungswinkel einer Ebene $E = (e_1, e_2)$ mit der ersten Tafel (die e r s t e T a f e l n e i g u n g) zu bestimmen (Fig. 76 und 77).

Um die erste Tafelneigung α_1 zu erhalten, schneide man die Ebene E durch eine zur ersten Spur e_1 senkrechte H i l f s e b e n e H. Aus dieser wird durch die Ebene E und die beiden Bildebenen das rechtwinklige Dreieck BA_xA, das sog. **Neigungsdreieck,** herausgeschnitten. Dieses denke man sich um A_xA als Achse gedreht, bis es in die zweite Tafel fällt (B_0A_xA). Dann ist $\sphericalangle\, A_xB_0A = \alpha_1$ die gesuchte Tafelneigung.

Lösung. Man fälle (Fig. 77) von dem beliebigen Punkte A der Spur e_2 auf die Achse das Lot AA_x, ebenso von A_x auf die erste Spur e_1 das Lot A_xB und beschreibe um A_x mit A_xB als Radius

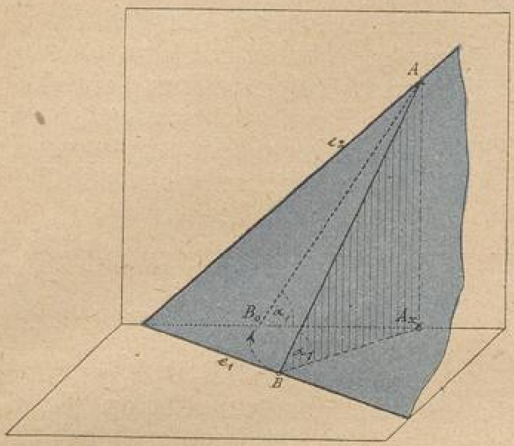

Fig. 76.

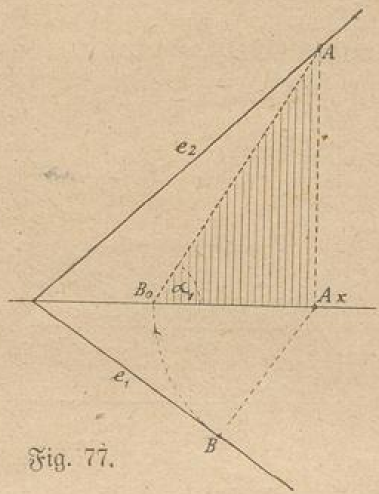

Fig. 77.

den Kreis, der die Achse in B_0 trifft. Dann ist $\sphericalangle AB_0A_x = \alpha_1$. Bestimme entsprechend die zweite Tafelneigung α_2.

Aufgabe 9 (Umkehrung von 8). Von einer Ebene $\mathfrak{E}$ ist die erste Spur e_1 und ihre erste Tafelneigung α_1 gegeben. Die zweite Spur der Ebene zu bestimmen.

§ 18. Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene.

1) Aufgabe 1. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit einer Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ zu bestimmen (Fig. 78).

Die Lösung für die wichtige Aufgabe findet man am besten an der Hand eines Schrägbildes. Durch g lege man eine zur ersten Bildebene senkrechte Hilfsebene $\mathfrak{H}$. Ihre erste Spur h_1 fällt mit g_1 zusammen, ihre zweite h_2 steht senkrecht zur Achse. Da die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ die Gerade g enthält, so liegt der Schnittpunkt S von g mit der gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ auch auf der Schnittgeraden s der Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Der Aufriß S_2 von S ergibt sich daher als Schnittpunkt von g_2 mit s_2. Den Grundriß S_1 des Durchdringungspunktes erhält man endlich durch Herunterloten auf $g_1 = s_1$. Zeichnung!

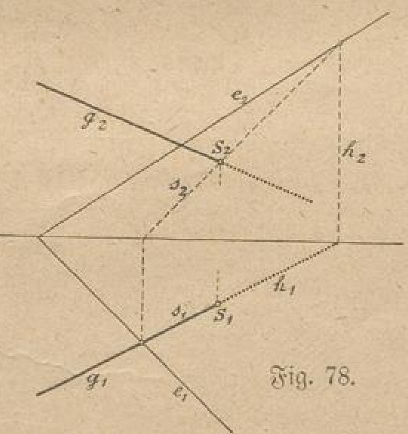

Fig. 78.

Aufgabe 2. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit der Ebene eines Parallelogramms ABCD zu bestimmen.