Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 20. Umlegung ebener Figuren und Bestimmung ihrer wahren Gestalt. Affinität.

II, deren Kantenlängen gegeben sind, liegt der eine (I) mit einer Seitenfläche, der andere (II) nur mit der Kante $\overline{12}$ in der Grundebene und stützt sich mit einer Fläche auf die Kante $\overline{34}$ des ersten. Man soll die Projektionen des zweiten Quaders zeichnen (Fig. 88).

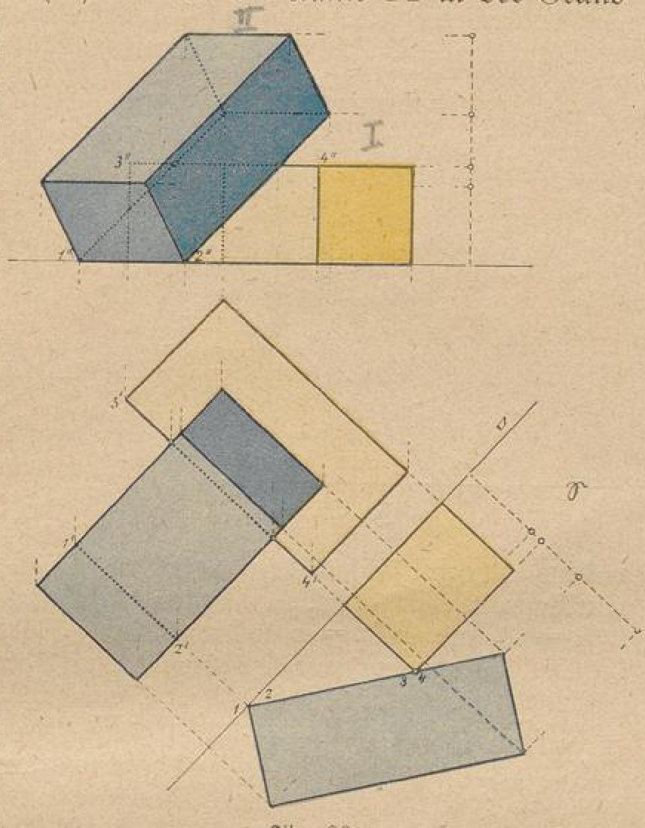

Fig. 88.

Wir wählen eine zu den Kanten $\overline{12}$ und $\overline{34}$ senkrechte dritte Bildebene S, die die Grundrißebene in der Spur s schneidet, und legen S, um die Zeichnung in derselben Zeichenebene ausführen zu können, um ihre Spur s in die Grundebene um. Da die Kantenlängen beider Körper gegeben sind, so können wir mit Hilfe des Grundrisses von I und aus der Lage der Kante $\overline{12}$ von II die Projektion der beiden Quader auf S leicht zeichnen. Wie kann daraus der Grundriß und Aufriß von II gefunden werden?

§ 20. Umlegung ebener Figuren und Bestimmung ihrer wahren Gestalt. Affinität.

1 a) Um die wahre Gestalt einer durch ihre Projektionen gegebenen ebenen Figur zu erhalten, denken wir uns die Ebene, in der die Figur liegt, um eine Spur (z. B. e_1) als Achse in die zugehörige Bildebene (B_1) umgelegt und bestimmen dann in der sich ergebenden Lage die ebene Figur.

Die Lösung dieser Aufgabe beruht, da eine ebene Figur durch die Lage ihrer Eckpunkte bestimmt ist, auf der Lösung der folgenden

Grundaufgabe: Einen in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gegebenen Punkt $P = (P_1, P_2)$ in die Grundebene umzulegen, d. h. man soll die Lage P_0 bestimmen, die P erhält, wenn die Ebene E um e_1 als Achse in die erste Bildebene umgeklappt wird.

Denken wir uns an der Hand des Schrägbildes (Fig. 89) die Ebene

$\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ um e_1 gedreht, dann beschreibt der in $\mathfrak{E}$ gelegene Punkt P einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht zu e_1 ist. Mithin fällt P nach vollendeter Umlegung auf die Verlängerung des von P_1 auf e_1 gefällten Lotes P_1B. Die Entfernung $P_0B = PB$, der **Drehungs-**

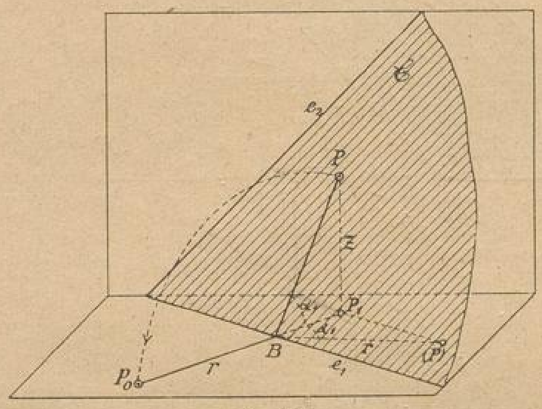

Fig. 89.

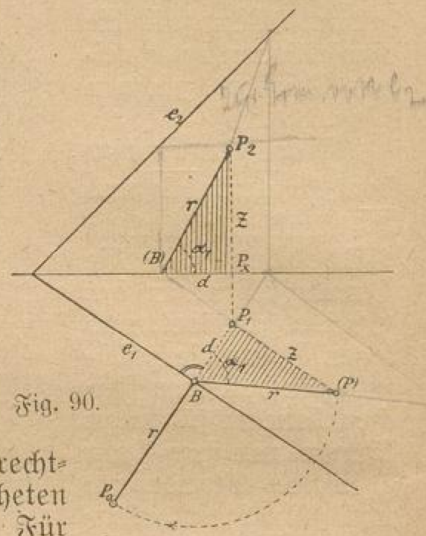

Fig. 90.

radius r, ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks PP_1B, dessen Katheten $P_1B = d$ und $PP_1 = z$ bekannt sind. Für die Ermittlung von r wird das Dreieck um BP_1 in die erste Bildebene umgeklappt, so daß man das schraffierte Dreieck $P_1(P)B$ erhält. $\sphericalangle P_1B(P) = \alpha_1$ ist die erste Tafelneigung der Ebene $\mathfrak{E}$.

Für die Konstruktion des Drehungsradius r merken wir uns den Satz: Der Drehungsradius eines in die erste Bildebene umgelegten Punktes P ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich dem Abstande der ersten Projektion des Punktes P von der Umdrehungsachse und dessen andere Kathete gleich seinem ersten Tafelabstand ist.

Zur Lösung (Fig. 90) fälle man von P_1 auf e_1 das Lot P_1B und beschreibe mit dem Drehungsradius r um B den Kreis, der das über B verlängerte Lot P_1B in P_0 trifft.[1]) Der Drehungsradius r kann auch aus dem Dreieck $P_2(B)P_x$, wo $(B)P_x = BP_1$ ist, bestimmt werden, was bei vielen Anwendungen bequemer ist.

Für die Lösung der Aufg. ist die Angabe der zweiten Spur e_2 nicht erforderlich. Wie kann diese bestimmt werden, wenn e_1, P_1 und P_2 gegeben ist? (Spurparallele!)

Aufgabe 1. Die wahre Größe des Winkels zweier sich schneidender Geraden g und h, deren Projektionen (g_1, g_2) und (h_2, h_2) gegeben sind, zu ermitteln.

---

[1]) Daß die Punkte P_1BP_0 scheinbar nicht auf einer Geraden liegen, beruht auf einer lehrreichen optischen Täuschung.

Zeichne die erste Spur der durch g und h bestimmten Ebene und lege um sie den Scheitel des Winkels in die erste Bildebene um.

Aufgabe 2. Von einem in Grund- und Aufriß gegebenen Walmdach die wahren Größen der Dachflächen und ihre Neigungswinkel mit der Grundebene zu bestimmen (Fig. 91).

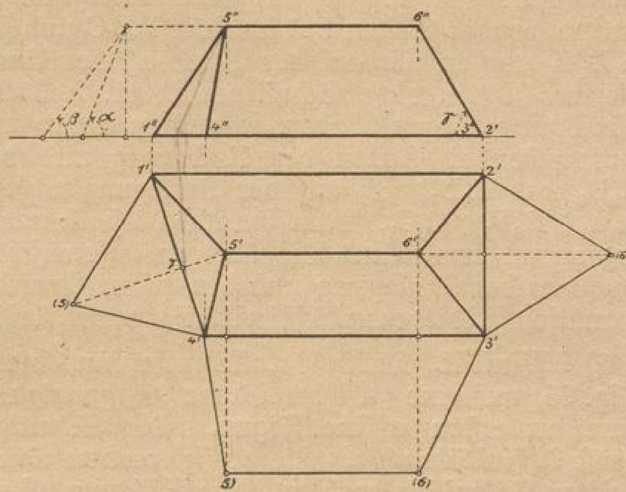

Fig. 91.

Das Trapez 1'2'3'4' bildet die erste Projektion der vier Traufkanten. Die Firstlinie $\overline{5\,6}$ verläuft parallel und symmetrisch zu den Traufkanten $\overline{1\,2}$ und $\overline{4\,3}$. Die wahre Größe des Dachdreiecks 145 erhält man durch Umlegung um die Traufkante $\overline{1\,4}$ in die Grundebene, wobei nur die Umlegung des Punktes 5 zu ermitteln ist. Der Winkel $5\,7\,5' = \alpha$ ist der Neigungswinkel der Dachfläche. Wie findet man die gesuchten Größen für die übrigen Dachflächen?

b) **Aufgabe 3.** Die wahre Gestalt $A_0B_0C_0$ eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC durch Umlegung in die Grundebene zu bestimmen (Fig. 92).

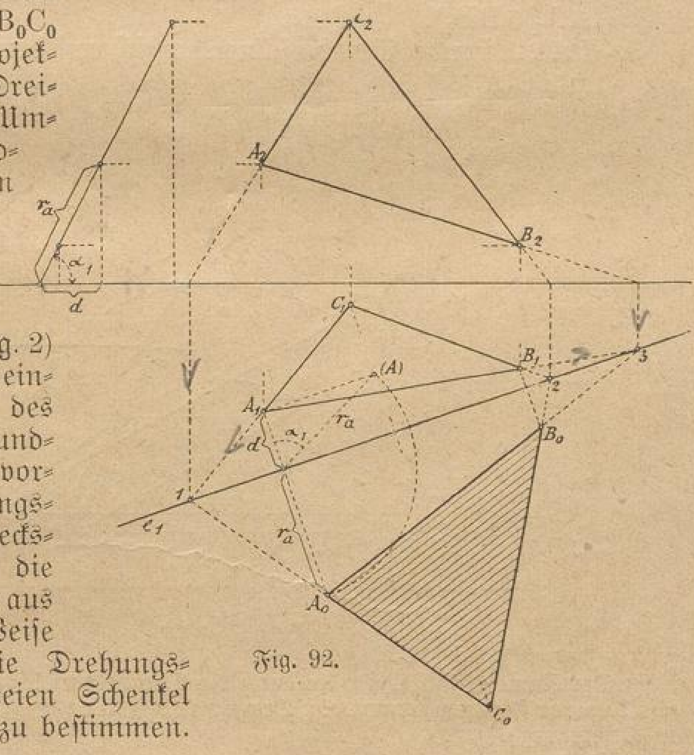

Fig. 92.

Man ermittle zunächst die Grundrißspur e_1 der Dreiecksebene (§ 17, Aufg. 2) und lege dann die einzelnen Eckpunkte des Dreiecks nach der Grundaufgabe um. Es ist vorteilhaft, den Neigungswinkel α_1 der Dreiecksebene gegen $\mathfrak{B}_1$ an die Bildachse in der aus Fig. 92 ersichtlichen Weise anzutragen und die Drehungsradien auf dem freien Schenkel von α_1 gleichzeitig zu bestimmen.

Zwischen der Umlegung $A_0B_0C_0$ des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ besteht eine einfache geometrische Beziehung (Verwandtschaft), die eine genauere und wesentlich bequemere Lösung aller ähnlichen Aufgaben ermöglicht. Die Verlängerungen entsprechender Seiten des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ müssen sich auf der Spur e_1, der Umlegungsachse schneiden (Grund?). Da diese Schnittpunkte (1, 2, 3) bei der Umlegung um die Spur e_1 liegen bleiben, so müssen daher auch die Verlängerungen entsprechender Seiten der Umlegung und des Grundrisses (z. B. A_0B_0 und A_1B_1) sich auf der Umlegungsachse schneiden. Ferner ist $A_0A_1 \parallel B_0B_1 \parallel C_0C_1$. Man braucht deshalb nur einen Punkt der Umlegung zu ermitteln. Die übrigen lassen sich dann auf Grund der zwischen der Umlegung und der ersten Projektion bestehenden Verwandtschaft, die man Affinität[1]) nennt, leicht finden.

2) Affinität. Durch Parallelprojektion einer ebenen Figur (ABC, Fig. 93) auf eine zu ihrer Ebene (𝔈) geneigte Ebene (𝔅) ergibt sich eine zur ersten **affine Figur.** Die Schnittgerade beider Ebenen heißt **Affinitätsachse.** Die projizierenden Strahlen (AA_1, BB_1, CC_1) heißen **Affinitätsstrahlen,** ihre Richtung (AA_1) **Affinitätsrichtung.** Zwischen zwei affinen Figuren, z. B. ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 93), bestehen folgende Beziehungen:

1. Jedem Punkte der einen Figur entspricht ein Punkt der andern (A_1 und A).
2. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel ($AA_1 \parallel BB_1$).
3. Entsprechende Gerade schneiden sich auf der Affinitätsachse (CA und C_1A_1).

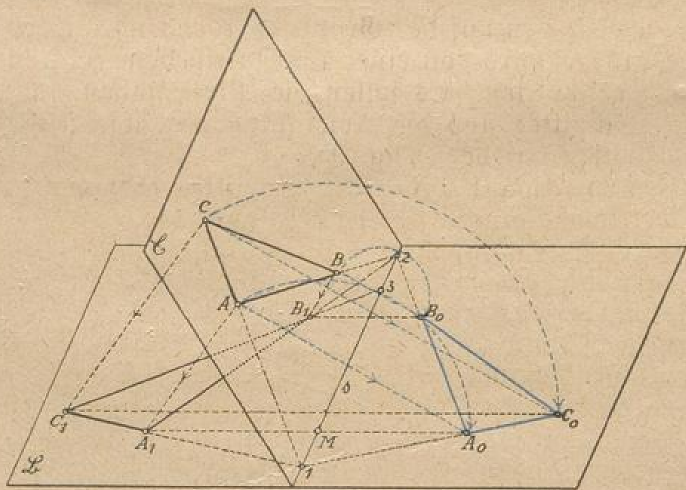

Fig. 93.

[1]) Der Name Affinität für die durch die Parallelprojektion herstellbare Verwandtschaft ebener Figuren stammt von Leonhard Euler (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg).

Diese Eigenschaften bleiben auch erhalten, wenn die Ebene E um die Spur s in die Ebene B umgelegt wird, so daß $\triangle$ ABC die Lage $A_0B_0C_0$ annimmt (Beweis!). $\triangle A_0B_0C_0$ kann auch als Parallelprojektion von ABC aufgefaßt werden (Beweis!). Damit haben wir den Satz:

Die Umlegung einer ebenen Figur und ihre erste Projektion sind affine Gebilde mit ihrer ersten Spur als Affinitätsachse.

Eine Affinität ist bestimmt durch die Achse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P′.

Aufgabe. Zu dem Dreieck ABC (Fig. 94) in seiner Ebene das affine Dreieck zu zeichnen, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P′ gegeben sind.

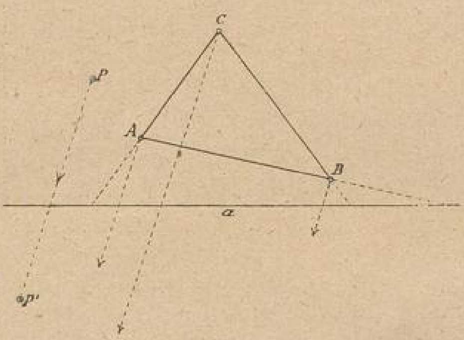

Fig. 94.

Bemerkung. Betrachten wir $A_1B_1C_1$ in Fig. 93 als Grundfigur eines Prismas, dessen Seitenkanten die Affinitätsstrahlen sind, so können wir ABC als schiefen Schnitt durch den Körper und $A_0B_0C_0$ als die Umlegung des Schnittes ansehen. Denken wir uns nun noch den Schnitt senkrecht auf die Bildebene B projiziert, so ist die Grundfigur nicht nur mit der senkrechten Projektion des Schnittes, sondern auch mit dessen Umlegung für die Spur der Schnittebene als Affinitätsachse affin.

§ 21. Darstellung ebener Körperschnitte. Abwicklung.

1) Aufgabe 1. Ein auf der Grundebene stehendes gerades vierseitiges Prisma wird von einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $E = (e_1, e_2)$ geschnitten. Es sollen die Projektionen und die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des schief abgeschnittenen Prismas ermittelt werden (Fig. 95).

Die erste Projektion 1′2′3′4′ des Schnittes fällt mit dem Grundriß des Körpers zusammen, während die zweite 1″2″3″4″ in die zweite Spur der Schnittebene fällt (Grund?). Die wahre Gestalt des Schnittes 1 2 3 4 finden wir durch Umlegung sämtlicher Eckpunkte in die Grundrißebene. Die Umlegung (1) von 1 liegt auf der von 1′ zur Umlegungsachse e_1 gezogenen Senkrechten, und zwar im Abstande des zugehörigen Drehungsradius r von e_1. Dieser kann, da der von e_2 und der x-Achse gebildete Winkel α_1 gleich der ersten Tafelneigung der Schnittebene ist, unmittelbar aus dem Aufriß entnommen werden, $r = \overline{X1''}$.

Um (1) zu erhalten, beschreiben wir um X mit $\overline{X1''} = r$ als Radius den Kreis, der die Bildachse in (1″) trifft und loten diesen Punkt auf die von 1′ zu e_1 gezogene Senkrechte herunter. Entsprechend können wir die Umlegungen der anderen Punkte gewinnen. Einfacher und