Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 21. Darstellung ebener Körperschnitte. Abwicklung.

Diese Eigenschaften bleiben auch erhalten, wenn die Ebene $\mathfrak{E}$ um die Spur s in die Ebene $\mathfrak{B}$ umgelegt wird, so daß $\triangle$ ABC die Lage $A_0B_0C_0$ annimmt (Beweis!). $\triangle A_0B_0C_0$ kann auch als Parallelprojektion von ABC aufgefaßt werden (Beweis!). Damit haben wir den Satz:

Die Umlegung einer ebenen Figur und ihre erste Projektion sind affine Gebilde mit ihrer ersten Spur als Affinitätsachse.

Eine Affinität ist bestimmt durch die Achse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P′.

Aufgabe. Zu dem Dreieck ABC (Fig. 94) in seiner Ebene das affine Dreieck zu zeichnen, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P′ gegeben sind.

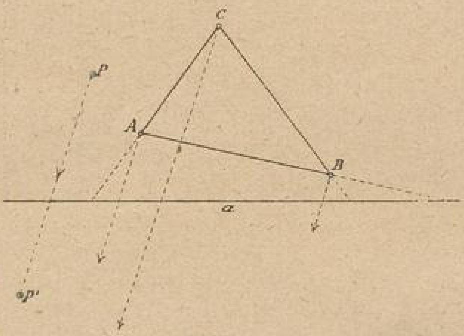

Fig. 94.

Bemerkung. Betrachten wir $A_1B_1C_1$ in Fig. 93 als Grundfigur eines Prismas, dessen Seitenkanten die Affinitätsstrahlen sind, so können wir ABC als schiefen Schnitt durch den Körper und $A_0B_0C_0$ als die Umlegung des Schnittes ansehen. Denken wir uns nun noch den Schnitt senkrecht auf die Bildebene $\mathfrak{B}$ projiziert, so ist die Grundfigur nicht nur mit der senkrechten Projektion des Schnittes, sondern auch mit dessen Umlegung für die Spur der Schnittebene als Affinitätsachse affin.

§ 21. Darstellung ebener Körperschnitte. Abwicklung.

1) Aufgabe 1. Ein auf der Grundebene stehendes gerades vierseitiges Prisma wird von einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ geschnitten. Es sollen die Projektionen und die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des schief abgeschnittenen Prismas ermittelt werden (Fig. 95).

Die erste Projektion 1′2′3′4′ des Schnittes fällt mit dem Grundriß des Körpers zusammen, während die zweite 1″2″3″4″ in die zweite Spur der Schnittebene fällt (Grund?). Die wahre Gestalt des Schnittes 1 2 3 4 finden wir durch Umlegung sämtlicher Eckpunkte in die Grundrißebene. Die Umlegung (1) von 1 liegt auf der von 1′ zur Umlegungsachse e_1 gezogenen Senkrechten, und zwar im Abstande des zugehörigen Drehungsradius r von e_1. Dieser kann, da der von e_2 und der x-Achse gebildete Winkel α_1 gleich der ersten Tafelneigung der Schnittebene ist, unmittelbar aus dem Aufriß entnommen werden, $r = \overline{X1''}$.

Um (1) zu erhalten, beschreiben wir um X mit $\overline{X1''} = r$ als Radius den Kreis, der die Bildachse in (1″) trifft und loten diesen Punkt auf die von 1′ zu e_1 gezogene Senkrechte herunter. Entsprechend können wir die Umlegungen der anderen Punkte gewinnen. Einfacher und schneller kommen wir jedoch zum Ziele durch Benutzung der zwischen den Figuren (1) (2) (3) (4) und 1′2′3′4′ bestehenden Affinität (s. Bem. § 20).

Um die Abwicklung des Mantels des schief abgeschnittenen Prismas zu erhalten, tragen wir auf einer Geraden die Seiten der Grundfigur nacheinander auf, errichten in den Endpunkten die Lote und tragen auf ihnen die Längen der zugehörigen Seitenkanten ab, die sich unmittelbar aus dem Aufriß ergeben, und verbinden die aufeinander folgenden Endpunkte.

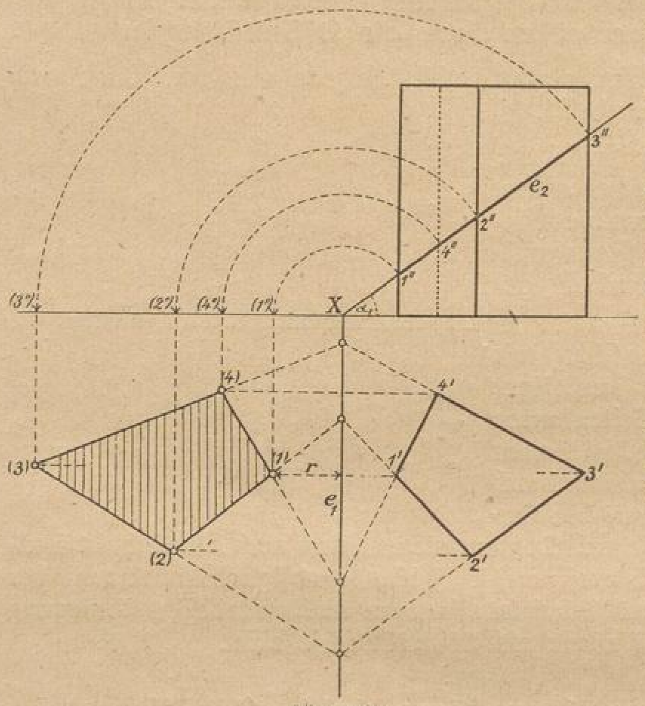

Fig. 95 a.

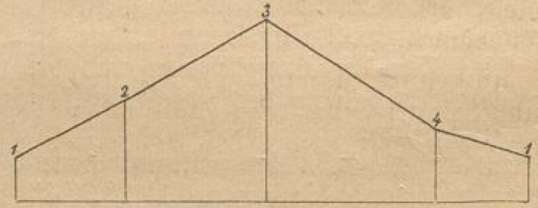

Fig. 95 b.

Aufgabe 2. Den Schnitt eines regelmäßig-sechsseitigen Prismas, das auf der Grundebene steht,

a) mit einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene E,

b) mit einer beliebigen schiefen Ebene E zu bestimmen,

ferner die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des Mantels samt der Schnittlinie zu zeichnen.

Bemerkung zu b). Die zweiten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur werden recht bequem mit Hilfe von ersten Spurparallelen (s. § 17, 3) bestimmt. Die Lösung kann durch Benutzung einer zu e_1 senkrechten Seitenebene sehr vereinfacht werden (vgl. Aufg. 4).

Aufgabe 3. Den Schnitt eines geraden Kreiszylinders, dessen Grundkreis in der ersten Bildebene liegt, mit einer zu B_2 senkrechten Ebene $E = (e_1, e_2)$ zu bestimmen und den Zylindermantel samt der Schnittlinie in die Ebene auszubreiten (Fig. 96).

Wir führen die Aufgabe auf die entsprechende für das Prisma (s. Aufg. 1) zurück, indem wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, z. B. 12, teilen und die zugehörigen Mantellinien zeichnen. Die Schnittfigur ist eine Ellipse (§ 8 Anm. 2), deren erste Projektion in den Grundkreis und deren zweite in die Spur e_2 fällt. Die Gestalt der Ellipse in wahrer Größe ergibt sich wie beim Prisma durch Umlegung (Affinität!).

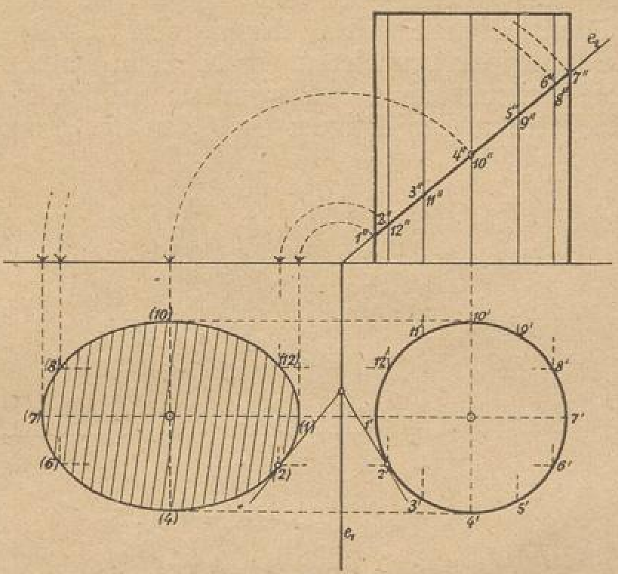

Fig. 96.

Denken wir uns den Zylinder längs einer Mantellinie (z. B. der durch 1 gehenden) aufgeschnitten und in die Zeichenebene ausgebreitet, so ergibt sich ein Rechteck, dessen Grundseite gleich dem Umfang des Grundkreises[1]) und dessen Höhe gleich der Zylinderhöhe ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten, teilen wir die Grundseite wieder in 12 gleiche Teile, tragen auf den zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien die zugehörigen Höhen der Ellipsenpunkte ab und verbinden die Endpunkte durch einen freien Kurvenzug.

2) Aufgabe 4. Den Schnitt einer auf B_1 stehenden regelmäßig-sechsseitigen Pyramide mit einer Ebene $E = (e_1, e_2)$ und seine wahre Gestalt zu bestimmen, ferner den Mantel der Pyramide samt Schnittlinie in die Zeichenebene auszubreiten.

I. Lösung. Man bestimmt zunächst nach § 18 Aufg. 1 die zweiten Projektionen der Schnittpunkte, der Seitenkanten mit E und findet durch Herunterloten die zugehörigen ersten Projektionen. Dadurch erhalten wir die Projektionen der Schnittfigur. Ihre wahre Gestalt finden wir durch Umlegung, wobei mit Vorteil die affine Verwandtschaft zwischen Grundriß und Umlegung verwertet werden kann. Wie ergibt sich die Abwicklung des Mantels der Pyramide?

Die Umlegung ebener Figuren geht (ohne Benutzung affiner Beziehungen!) am einfachsten vonstatten, wenn ihre Ebene wie bei Aufg. 1 auf einer Bildebene senkrecht steht. Auf diesen einfachen Fall läßt sich der allgemeine mit beliebiger Ebene leicht zurückführen. Zugleich gestaltet sich dadurch die Bestimmung der Schnittfigur erheblich bequemer.

II. Lösung (Fig. 97). Wir nehmen eine zur ersten Spur e_1 senkrechte dritte Bildebene (Seitenebene) S zu Hilfe. Ihre erste

[1]) S. Rektifikation des Kreises § 15.

Spur s_1 ist dann zu e_1, ihre zweite s_2 zur Bildachse senkrecht. Projizieren wir die Pyramide auf die Seitenebene S, so müssen die Projektionen der Schnittfigur, da auch $S \perp E$ ist, auf ihrer Schnittgeraden mit E liegen. Die Drehungsradien der Ecken der Schnittfigur projizieren sich dabei in wahrer Größe. Legen wir nun die Seitenebene S um s_1 in die Zeichenebene um, so bewegen sich die dritten Projektionen der Ecken der Schnittfigur in Kreisbahnen,

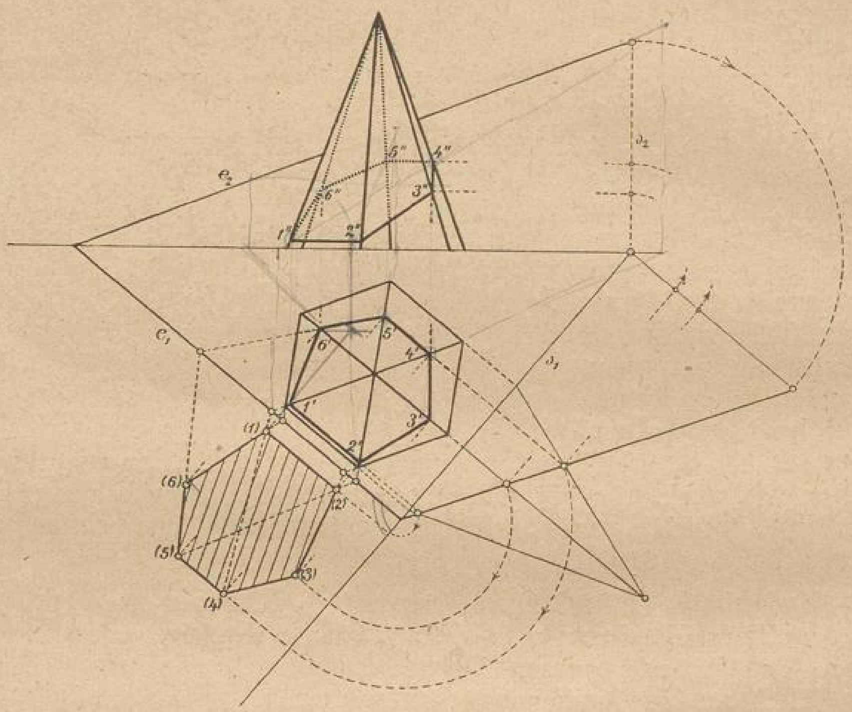

Fig. 97.

die zu s_1 senkrecht sind, liegen also nach der Umklappung mit ihren entsprechenden ersten Projektionen auf je einer Senkrechten zu s_1. Danach gestaltet sich die Lösung der Aufgabe kurz folgendermaßen:

Aus den dritten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur gewinnt man genau wie aus dem Aufriß (S als Aufrißebene betrachten!) ihre ersten Projektionen, aus diesen durch Hinaufloten ihre zweiten Projektionen. Die Bestimmung der wahren Größe der Schnittfigur erfolgt entsprechend wie bei Aufg. 1.

3a) **Aufgabe 5.** Den Schnitt eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis in B_1 liegt, mit einer zu B_2 senkrechten Ebene E zu bestimmen. Ferner soll die Schnittfigur in wahrer Größe und die Abwicklung des Mantels nebst Schnittkurve gezeichnet werden.

1. Geht E durch die Spitze S des Kegels, so ist der Schnitt ein Dreieck.

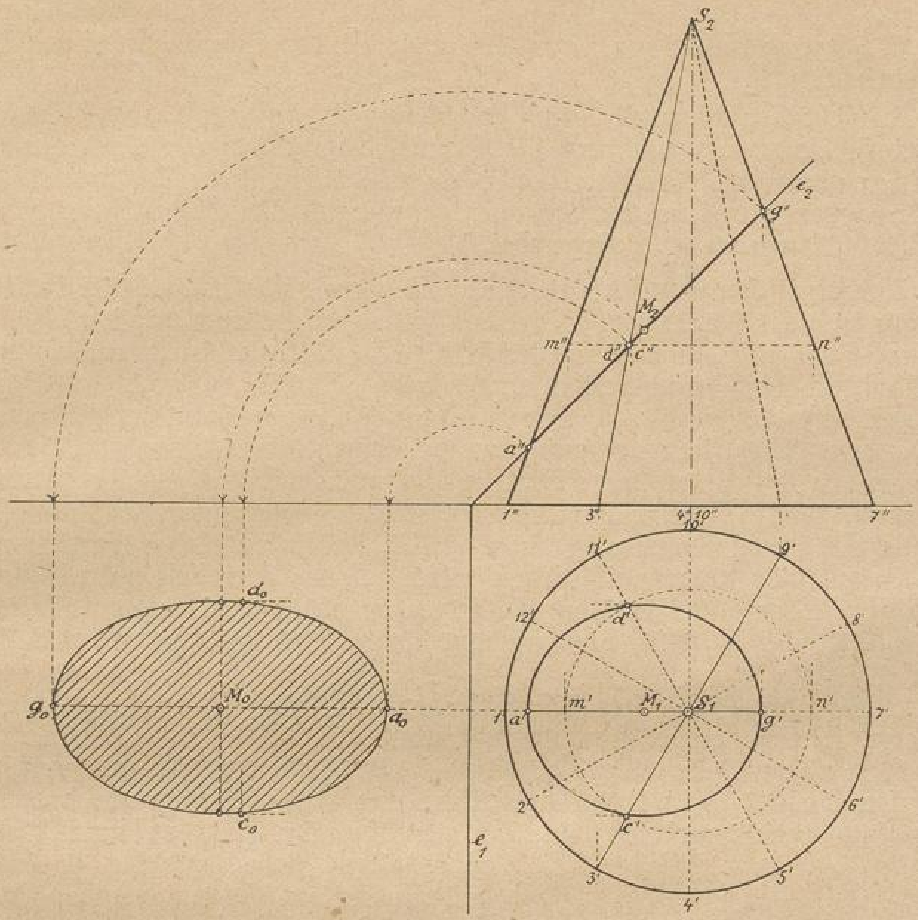

Fig. 98a.

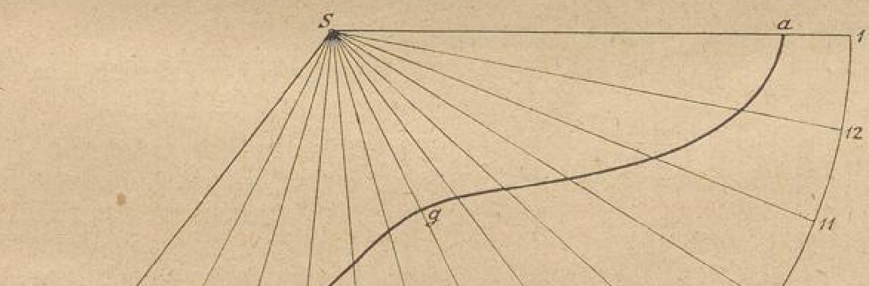

Fig. 98b.

2. Ist E parallel zur Grundebene, so ist der Schnitt ein **Kreis**[1]) (Darstellung!).

3. Geht E nicht durch S und ist schief zu B_1, so sind **drei Fälle** zu unterscheiden. Je nachdem die Schnittebene E **keiner** Seitenlinie, **einer** oder **zwei Seitenlinien parallel** ist (also **alle** schneidet, **eine** oder **zwei nicht** schneidet), ergibt sich als Schnittkurve eine **Ellipse, Parabel** oder **Hyperbel.**[1])

I. **Elliptischer Schnitt** (Fig. 98a). Die zweite Projektion der Schnittfigur ist die auf e_2 liegende Strecke $a''g''$. Zur Bestimmung der ersten Projektion und der wahren Größe der Schnittkurve durch Umlegung teilen wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl, z. B. 12, gleicher Teile und ziehen die zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien. Die erste Projektion des auf einer beliebigen Mantellinie, z. B. S3, liegenden Punktes c der Schnittkurve können wir in doppelter Weise finden. **Entweder** zeichnen wir die beiden Projektionen der Mantellinie S3, deren zweite $a''g''$ in c'' trifft, und loten diesen Punkt auf $S_1 3$ herunter, **oder** wir ziehen durch c'' die Parallele $m''n''$ zur Achse, die den Aufriß des durch c gehenden zur Grundebene parallelen Schnittkreises darstellt, und zeichnen diesen im Grundriß, wo er $S_1 3'$ in c' trifft.

Die wahre Größe der Ellipse finden wir durch Umlegung wie in Aufg. 1. Wie erhält man ihren Mittelpunkt M?

Der abgewickelte Kegelmantel (Fig. 98b) ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Mantellinie und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten, ziehen wir die zu den Endpunkten der übertragenen Bogenstücke gehörigen Radien und ermitteln auf ihnen den Punkt der Schnittkurve, z. B. $Sc = S_2m''$.

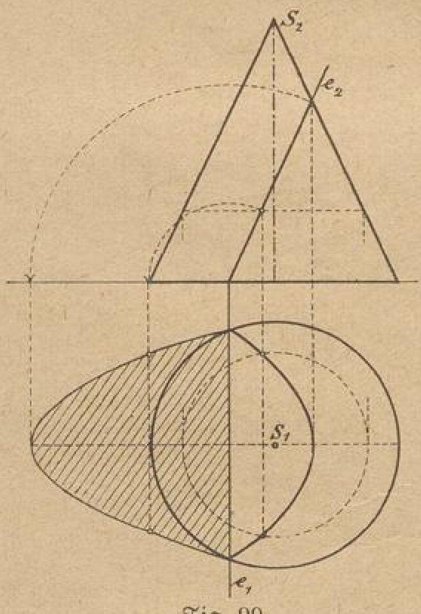

Fig. 99.

II. **Parabolischer Schnitt** (Fig. 99). Lösung wie im Fall I.

III. **Hyperbolischer Schnitt** (Fig. 100). Der Einfachheit halber nehmen wir hier die Schnittebene E parallel B_2 an. E schneidet auch die über die Spitze S erweiterte Kegelfläche, so daß wir eine aus zwei Ästen bestehende Schnittkurve erhalten. Lösung s. Fig.

b) Aufgabe 6. Den Schnitt einer zu B_2 senkrechten Ebene mit einer **Kugel** zu zeichnen und in wahrer Größe darzustellen.

[1]) Vgl. L. I. § 2; II. § 51—53.

Aufgabe 7. Die Erdkugel samt Gradnetz abzubilden, wenn ihre Achse zu B_1 senkrecht steht.

Die erste Projektion, das Bild der oberen Halbkugel, heißt die orthographische Polarprojektion, die zweite, das Bild der vorderen Halbkugel, die orthographische Äquatorialprojektion der Erdkugel. Wie bilden sich bei den beiden Projektionen die Breiten- und Längenkreise ab? Welche Teile erleiden die stärkste Verzerrung?

§ 22.

Zurückdrehung ebener Gebilde (Umkehrung der Aufgabe der Umlegung).

1) Unter „Zurückdrehen" (Zurückschlagen) eines ebenen Gebildes oder Punktes versteht man die Umkehrung der Aufgabe der Umlegung.

Grundaufgabe. Von einem in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist seine Umlegung P_0 und die erste Spur gegeben. Es sind seine Projektionen zu bestimmen.

Die Lösung (s. Fig. 90) nimmt den umgekehrten Verlauf wie die der Grundaufgabe § 20.

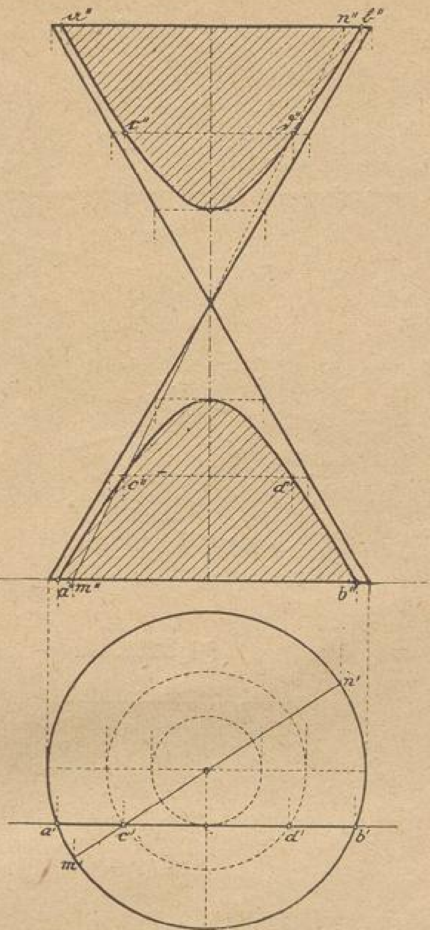

Fig. 100.

Aufgabe 1. Von einem in der Ebene E gelegenen Quadrat, deren erste Spur e_1 und erste Tafelneigung α_1 gegeben sind, (Vieleck) ist die Umlegung in die Grundebene gegeben. Die Projektionen der Figur zu zeichnen.

Aufgabe 2. In einer zu B_2 senkrechten und zu B_1 schiefen Ebene $E = (e_1, e_2)$ liegt ein Kreis, von dem die Umlegung seines Mittelpunktes M und der Radius r gegeben sind. Seine Projektionen zu zeichnen.

Die erste Projektion ist eine Ellipse. Wie liegen ihre große und kleine Achse?

2) Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide liegt mit einer Seitenfläche 1 2 S, die gegeben ist, in der Grundebene. Die Projektionen des Körpers zu zeichnen (Fig. 101).

Das gegebene Seitendreieck 1 2 S fällt mit seinem Grundriß $1'2'S_1$ zusammen. Um die erste Projektion der Grundfläche zu ermitteln, zeichnen wir diese in wahrer Größe an die Grundseite $1'2'$, be-