Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 84. Günstigste Wahl der Seitengleichung im Viereck lagen, war die neue Theorie der q ausgezeichnet am Platze. Wenn aber künftig die $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. für den Zweck der q besonders auszurechnen sein werden, wird die Bequemlichkeit des neuen Verfahrens vermindert, während die sonstigen Vorzüge bestehen bleiben.

Das zweite unterscheidende Merkmal der neuen Theorie gegen frühere Verfahren ist die Einführung des *Netzrichtungsfehlers* v in der Gleichung (22) S. 291, welcher im Mittel zu $v = \pm 0{,}4''$ gefunden wurde; und es ist nur zu fragen, mit welchem Grade von Zuverlässigkeit ein solches v wohl im einzelnen Falle eingeführt werden kann? —

§ 84. Günstigste Wahl der Seitengleichung im Viereck.

Am Schlusse von § 58. S. 178 haben wir eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Vierecke kurz erwähnt und auf den Schluss dieses Kapitels verschoben, so dass wir nun diese Sache zu behandeln haben.

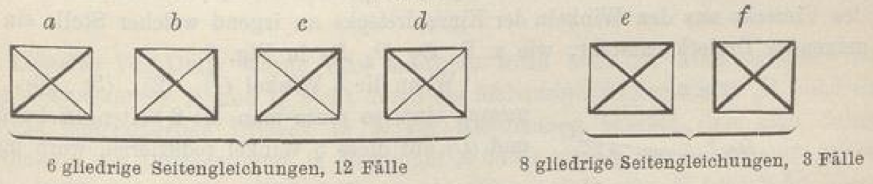
Ebenso wie die Winkelsummen-Bedingungen in verschiedenen Formen ausgedrückt werden konnten (s. § 57. Gleichungen (14)—(17) S. 167, so kann auch die Bedingung übereinstimmender Seitenberechnung in einem Viereck in verschiedenen Formen festgelegt werden, und es ist für die Schärfe der Rechnung nicht gleichgültig, welche von diesen Formen gewählt wird.

Eine erste Regel, welche sich von selbst darbietet, lautet, man soll die *spitzen* Winkel, welche bei Schnittpunktsbestimmungen auftreten, unmittelbar in die Seitengleichungen einführen; man erhält dadurch grosse Cotangenten als Coefficienten.

Eine erste tiefergehende Untersuchung dieser Frage wurde von *Zachariae* angestellt in dem Werke „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten", aus dem Dänischen ins Deutsche übersetzt von *Lamp*, S. 152 u. ff. Wir haben hierüber in der „Zeitschr. für Verm. 1880" S. 65—73 berichtet und noch einige Ergebnisse hinzu gewonnen, wie im Folgenden dargelegt wird:

Das Wesen der Seitengleichung im Viereck besteht darin, dass, bei Annahme einer beliebigen Seite als Basis, jede andere Seite auf allen möglichen Wegen aus dieser Basis übereinstimmend erhalten werden muss, man hat daher zunächst so viele Formen von Seitengleichungen, als die Zahl der Kombinationen der 6 Seiten zu zweien beträgt, nämlich $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$. Diese 15 Fälle sind durch Fig. 1. a, b, c, d, e, f veranschaulicht.

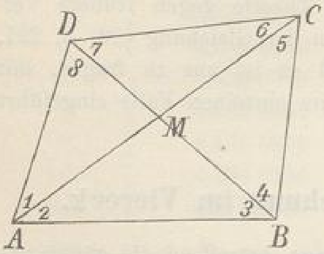
Fig. 1.



a bis d enthalten je 3 Kombinationen, nämlich die Verbindung von je 2 solchen Seiten, welche einen Winkelpunkt gemeinsam haben, e und f enthalten zusammen 3 Fälle, nämlich die Verbindungen von je 2 Gegenseiten und die Diagonalenkombination doppelt.

Z. B. entspricht es der Fig. 1. a, wenn in Fig. 2. bestimmt wird, dass AD aus der Basis AB abgeleitet, eindeutig werden soll, d. h.:

Fig. 2.
Vollständiges Viereck.



$$AD = \frac{AB \sin(3)}{\sin(8)} = \frac{AB \sin(3+4) \sin(6)}{\sin(5) \sin(7+8)} \tag{1}$$

oder
$$\frac{\sin(3) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(3+4) \sin(6) \sin(8)} = 1 \tag{2}$$

Genau dieselbe Gleichung bekommt man durch die Bestimmung, dass AC aus der Basis AB gleichwertig hervorgehe, überhaupt liefert jede der Figuren a, b, c, d nur je *eine* Gleichung, welche mit Bezugnahme auf Fig. 2. bzw. mit (A), (B), (C), (D) bezeichnet sein möge.

Ferner entspricht es der Fig. 1. e, wenn in Fig. 2. bestimmt wird, dass DC aus AB abgeleitet eindeutig werde, d. h.:

$$DC = \frac{AB \sin(1+2) \sin(4)}{\sin(8) \sin(5+6)} = \frac{AB \sin(3+4) \sin(1)}{\sin(5) \sin(7+8)}$$

oder
$$\frac{\sin(1+2) \sin(4) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(1) \sin(3+4) \sin(5+6) \sin(8)} = 1 \tag{3}$$

Die Fälle a bis d Fig. 1. liefern 6 gliederige, e und f liefern 8 gliederige Seitengleichungen.

Wir behandeln zunächst nur die Fälle Fig. 1. a bis d, d. h. die Zentralsysteme (A), (B), (C), (D) und machen folgende Vergleichung der Günstigkeit:

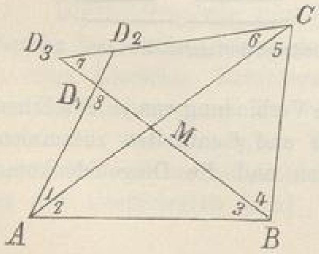
Den Zentralsystemen (A) und (B) entsprechen die folgenden 2 Bedingungsgleichungen:

$$(A) \qquad \frac{\sin(3) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(6) \sin(8) \sin(3+4)} = 1 \tag{4}$$

$$(C) \qquad \frac{\sin(2) \sin(4) \sin(7+8)}{\sin(1) \sin(7) \sin(3+4)} = 1 \tag{5}$$

Diese 2 Gleichungen können aber nicht unmittelbar verglichen werden, weil sie sich auf verschiedene Winkel beziehen. Es wird nun zunächst angenommen, dass entweder nur 5 Winkel gemessen sind, welche keine Winkelgleichung, aber eben deswegen eine Seitengleichung bilden, oder dass beim Vorhandensein weiterer Winkelmessungen die hierauf bezüglichen Summenproben stimmen, oder kurz, wir nehmen zunächst an, dass alle *einzelnen* Dreiecke für sich schliessen, dass aber bei der Zusammensetzung dieser einzelnen Dreiecke zu einem Viereck, oder bei der Konstruktion des Vierecks aus den Winkeln der Einzeldreiecke an irgend welcher Stelle ein fehlerzeigendes Dreieck entsteht, wie z. B. $D_1 D_2 D_3$ in Fig. 3.

Fig. 3.



Wenn die 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8) gemessen sind, so muss man die 2 Seitengleichungen (A) und (C) auf diese 5 Winkel reduzieren, wozu man hat:

$$\left.\begin{aligned}
(3) &= 180° - (1+2+8) \\
(7)+(8) &= 180° - (1+6) \\
(3)+(4) &= 180° - (2+5) \\
(4) &= (1)+(8)-(5) \\
(7) &= 180° - (1+6+8)
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Damit gehen (A) und (C) über in:

$$(A') \qquad \frac{\sin(1+2+8)\sin(5)\sin(1+6)}{\sin(6)\sin(8)\sin(2+5)} = 1 \tag{7}$$

$$(C') \qquad \frac{\sin(2)\sin(1+8-5)\sin(1+6)}{\sin(1)\sin(1+6+8)\sin(2+5)} = 1 \tag{8}$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, sondern es stellen sich Widersprüche ein, welche in logarithmischer Form in der Rechnung auftreten. Wenn man die Gleichung (7) vermöge ihrer Entstehung aus (1), (2) und (4) mit Fig. 3. vergleicht, so findet man:

$$\frac{\sin(1+2+8)\sin(5)\sin(1+6)}{\sin(6)\sin(8)\sin(2+5)} = \frac{A\,D_1}{A\,D_2} = 1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}$$

oder wenn man die Gleichung (7) logarithmisch ausführt, so erhält man auf der rechten Seite statt $\log 1 = 0$ den Widerspruch:

$$\log\left(1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}\right) = -\mu\,\frac{D_1\,D_2}{A\,D_2} \tag{9}$$

wo $\mu = 0{,}43429$ der logarithmische Modul ist. Dieser Wert (9) ist das Absolutglied der linearen Seitengleichung, welche durch Differentiieren von (7) entsteht, man hat daher, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, für den Zentralpunkt A das relative Mass für das Absolutglied der Seitengleichung:

$$(a) = \frac{D_1\,D_2}{A\,D} \tag{10}$$

wo im Nenner schlechthin $A\,D$ statt $A\,D_2$ hinreichend genau geschrieben ist.

Wenn man Alles analog für den Zentralpunkt C macht, so bekommt man:

$$(c) = \frac{D_2\,D_3}{C\,D} \tag{11}$$

Aus (10) und (11) findet man die Vergleichung:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{D_1\,D_2}{D_2\,D_3}\,\frac{C\,D}{A\,D} \tag{12}$$

Es ist aber:

$$\frac{D_1\,D_2}{D_2\,D_3} = \frac{\sin(7)}{\sin(8)}$$

und nach Fig. 2:

$$\frac{C\,D}{A\,D}\,\frac{\sin(7)}{\sin(8)} = \frac{C\,M}{A\,M} \tag{13}$$

folglich ist das Verhältnis der Absolutglieder in den Seitengleichungen (7) und (8):

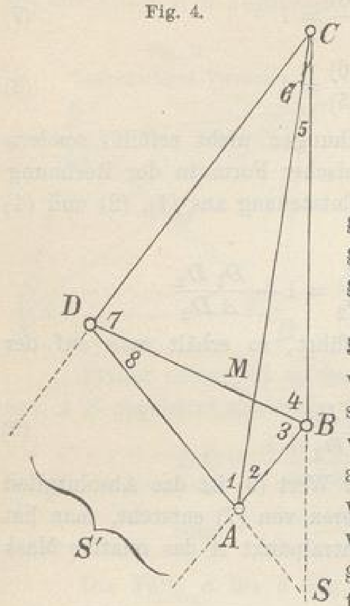
$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{C\,M}{A\,M} \tag{14}$$

Dasselbe Verhältnis würde man erhalten, wenn man die Absolutglieder der Seitengleichungen für A und C nicht durch das fehlerzeigende Dreieck in D, sondern durch das fehlerzeigende Dreieck in B zur Anschauung brächte, wie man durch Wiederholung der Untersuchung in Bezug auf B finden würde, was jedoch auch schon daraus erhellt, dass in dem Verhältnis $(a):(c)$ keine auf D oder B bezügliche Vierecksgrösse vorkommt.

In dieser Vergleichung (14) der Absolutglieder ist der Zachariae sche Satz enthalten, denn für die Schärfe der logarithmischen Rechnung sind die Grössen der Absolutglieder der Seitengleichungen (A), (B), (C), (D) massgebend.

Wir machen die Vergleichung im Anschluss an Fig. 4. und erhalten Folgendes:

Fig. 4.



$$\left.\begin{array}{llllll} A & \text{ist günstiger als} & C & \text{weil} & AM < CM \\ B & \text{„} \quad \text{„} & D & \text{„} & BM < DM \\ A & \text{„} \quad \text{„} & B & \text{„} & AS' < BS' \\ A & \text{„} \quad \text{„} & D & \text{„} & AS < DS \\ B & \text{„} \quad \text{„} & C & \text{„} & BS < CS \\ D & \text{„} \quad \text{„} & C & \text{„} & DS' < CS' \end{array}\right\} \quad (14a)$$

Aus allen 6 Vergleichungen folgt, dass A der günstigste Zentralpunkt für den Ansatz einer Seitengleichung ist. Dabei sind nur die 6 gliederigen Seitengleichungen entspr. (Fig. 1. a bis d) verglichen.

Wie weit sich die Sache ändert, wenn nicht bloss 5 Winkel gemessen sind, oder allgemeiner ausgedrückt, wenn ausser einer Seitengleichung auch noch Winkelsummen mit Widerspruchsgliedern existieren, behandeln wir im Anschluss an ein Zahlenbeispiel, welches sich auf Fig. 4. bezieht, und zwar mag gelegentlich erwähnt werden, dass diese Figur das Schwerd'sche Basisnetzviereck von S. 208 vorstellt, das wir in § 65. ausgeglichen haben. Die auf 1' abgerundeten und insofern fingierten Winkel sind diese:

$$\left.\begin{array}{llll} (1) = 49^\circ\,44' & (1) = 49^\circ\,44' & (2) = 31^\circ\,38' & (7) = 76^\circ\,34' \\ (2) = 31 \;\; 38 & (8) = 25 \;\; 17 & (3) = 73 \;\; 22 & (4) = 67 \;\;\; 4 \\ (3) = 73 \;\; 22 & (7) = 76 \;\; 34 & (4) = 67 \;\;\; 4 & (6) = 28 \;\; 26 \\ (8) = 25 \;\; 17 & (6) = 28 \;\; 26 & (5) = \;\; 7 \;\; 57 & (5) = \;\; 7 \;\; 57 \\ \hline \quad 180^\circ\;\; 1' & \quad 180^\circ\;\; 1' & \quad 180^\circ\;\; 1' & \quad 180^\circ\;\; 1' \end{array}\right\} \quad (15)$$

Bezeichnet man die Winkelverbesserungen mit $v_1, v_2 \ldots$, so erhält man hieraus zunächst die (nicht von einander unabhängigen) 4 Winkelbedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + 1' = 0 \\ v_1 + v_8 + v_7 + v_6 + 1' = 0 \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + 1' = 0 \\ v_7 + v_4 + v_6 + v_5 + 1' = 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Der Zentralpunkt A giebt eine Seitengleichung (2), welche auf folgende logarithmische Rechnung führt:

		log Diff. für 1'
$(7+8) = 101^\circ\,51'$	$\log\sin(7+8) = 9.99064$	$-\;2$
$(5) = \;\;7\;\;57$	$\log\sin(5) \;\;= 9.14085$	$+\;90$
$(3) = \;73\;\;22$	$\log\sin(3) \;\;= 9.98144$	$+\;\;3$
	9.11293	
$(6) = \;28^\circ\,26'$	$\log\sin(6) \;\;= 9.67773$	$+\;23$
$(3+4) = 140\;\;26$	$\log\sin(3+4) = 9.80412$	$-\;15$
$(8) = \;25\;\;17$	$\log\sin(8) \;\;= 9.63052$	$+\;27$
	9.11237	

$$9.11293 - 9.11237 = +\,0.00056$$

also in Einheiten der fünften Dezimale hat man die Seitengleichung:

$$-2\,(v_7 + v_8) + 90\,v_5 + 3\,v_3 - 23\,v_6 + 15\,(v_3 + v_4) - 27\,v_8 + 56 = 0$$

(A) oder: $$18\,v_3 + 15\,v_4 + 90\,v_5 - 23\,v_6 - 2\,v_7 - 29\,v_8 + 56 = 0 \quad (17)$$

Ganz in derselben Weise findet man auch die 3 Seitengleichungen für die Zentralpunkte B, C und D, nämlich:

(B) $$+\ 2\,v_1 - 19\,v_2 + 73\,v_5 - 17\,v_6 + \ 3\,v_7 - 27\,v_8 + 41 = 0 \quad (18)$$

(C) $$+\,11\,v_1 - 21\,v_2 - 15\,v_3 - 20\,v_4 + \ 5\,v_7 + \ 2\,v_8 + \ 1 = 0 \quad (19)$$

(D) $$+\ 9\,v_1 - \ 2\,v_2 + \ 3\,v_3 - \ 5\,v_4 + 17\,v_5 - \ 6\,v_6 + 16 = 0 \quad (20)$$

In Verbindung mit dreien Gleichungen der Gruppe (16) genügt *eine* von den Gleichungen (17)—(20) zum allseitigen Schliessen des Vierecks, es muss daher möglich sein, alle diese 4 Gleichungen (17)—(20) auf *eine* Form zu bringen, und wenn etwa nur 5 Winkel gemessen wären, welche keine Winkelgleichung bildeten, so müsste *eine* einzige Seitengleichung bestehen, welche aus (17), (18), (19) oder (20) ableitbar sein müsste. Wir stellen daher die Aufgabe: Es sollen die 4 Gleichungsformen (17), (18), (19), (20) auf eine gemeinsame Form gebracht werden, in welcher nur v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 vorkommen, d. h. die Verbesserungen solcher 5 Winkel, welche für sich allein das Viereck mit einer Seitengleichung bestimmen:

Man hat nun mit Hilfe der Gruppe (16) alle übrigen v in v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 auszudrücken, und damit diese übrigen v aus (17)—(20) zu eliminieren. Aus (16) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} v_3 &= -v_1 - v_2 - v_8 - 1 \\ v_4 &= +v_1 - v_5 + v_8 \\ v_7 &= -v_1 - v_6 - v_8 - 1 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichungen (17)—(20) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (A')\quad & -1\,v_1 - 18\,v_2 + 75\,v_5 - 21\,v_6 - 30\,v_8 + 40 = 0 \\ (B')\quad & -1\,v_1 - 19\,v_2 + 73\,v_5 - 20\,v_6 - 30\,v_8 + 38 = 0 \\ (C')\quad & +1\,v_1 - \ 6\,v_2 + 20\,v_5 - \ 5\,v_6 - \ 8\,v_8 + 11 = 0 \\ (D')\quad & +1\,v_1 - \ 5\,v_2 + 22\,v_5 - \ 6\,v_6 - \ 8\,v_8 + 13 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

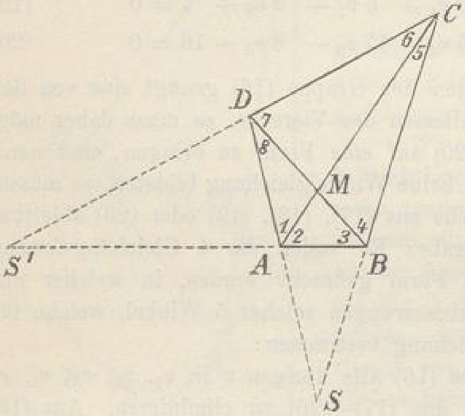
Abgesehen von einer erklärlichen Abrundungsunsicherheit von $\pm$ 1 in den Coefficienten sind diese 4 Gleichungen algebraisch identisch, wie es sein soll, praktisch genommen ist aber die erste (A') wegen der grösseren Coefficienten allen anderen vorzuziehen.

Das Verhältnis der Coefficienten und Absolutglieder in den Gleichungen (22), nämlich 40 : 38 : 11 : 13 hängt nicht von der Wahl der 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8) ab, sondern nur von der Gestalt des Vierecks, und dieses theoretische Verhältnis stellt sich immer ein, wenn die Gleichungen auf irgend welche 5 Winkel reduziert werden. Wenn aber mehr als 5 Winkel gemessen sind, so ist ein solches Reduzieren praktisch nicht nötig, wenn z. B. die 8 Winkel von Fig. 4. gemessen sind, so kann man irgend eine der Gleichungen (17)—(20) unmittelbar in die Rechnung einführen; fragt man aber hiebei wieder nach der Grösse der Absolutglieder, so ist doch wieder das Verhältnis derselben in den reduzierten Gleichungen (22) massgebend, denn die Gleichungen (16) und alle hierauf bezüglichen Operationen, durch welche der Übergang zwischen (A) und (A'), (B) und (B') etc. vermittelt wird, sind im Vergleich mit den logarithmischen Absolutgliedern selbst als fehlerfrei zu betrachten.

8 gliederige Seitengleichungen.

Das Bisherige ist im Wesentlichen von *Zachariae* in dem Eingangs citierten Buche angegeben worden; es sind dabei nur die 4 Formen *a, b, c, d* Fig. 1. berücksichtigt worden. (S. 299.)

Fig. 5.
Zentralpunkte S und S'.



Eine Vervollständigung dieser Theorie ist nun zunächst in dem Sinn möglich, dass auch die 8 gliederigen Seitengleichungen e und f von Fig. 1. hinzugezogen werden. Betrachten wir zuerst die 8 gliederige Seitengleichung (3), so kann man derselben eine Beziehung zu dem Punkt S von Fig. 5. geben, es ist nämlich:

$$SB = SA\,\frac{\sin(1+2)}{\sin(3+4)}$$

$$SD = SB\,\frac{\sin(4)}{\sin(8)}$$

$$SC = SD\,\frac{\sin(7+8)}{\sin(5+6)}$$

$$SA = SC\,\frac{\sin(5)}{\sin(1)}$$

Alles multipliziert giebt:

$$(S) \qquad \frac{\sin(1+2)\sin(4)\sin(5)\sin(7+8)}{\sin(8)\sin(5+6)\sin(1)\sin(3+4)} = 1$$

Dieses ist übereinstimmend mit (3).

Diese Gleichung (S) ist der Quotient aus (A) und (D), nämlich:

$$(A) \qquad \frac{\sin(7+8)\sin(5)\sin(3)}{\sin(6)\sin(3+4)\sin(8)} = 1$$

$$(D) \qquad \frac{\sin(5+6)\sin(3)\sin(1)}{\sin(4)\sin(1+2)\sin(6)} = 1$$

also wenn man die logarithmischen Absolutglieder mit (s), (a), (d) bezeichnet:

$$(s) = (a) - (d) \tag{23}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass bei (A) und (D) in *demselben Sinn* gezählt wird, d. h. wenn in (A) der Weg $D\,C\,B\,D$ von links nach rechts genommen ist, so muss auch in (D) der Weg $C\,B\,A\,C$ von links nach rechts genommen werden.

Mit analogen Bezeichnungen hat man auch

$$(s) = (b) - (c) \tag{24}$$

und ebenso findet man

$$(s') = (a) - (b) = (d) - (c) \tag{25}$$

Endlich kann man diejenige auf e und f (Fig. 1.) bezügliche 8 gliederige Gleichung, welche die Beziehung zwischen den Diagonalen $A\,C$ und $B\,D$ herstellt, dem Punkte M zuteilen, dem sie auch als Zentralpunkt zugehört, wenn man M als fingierte Winkelstation nimmt; die Gleichung heisst nämlich:

$$(M) \qquad \frac{\sin(1)\sin(3)\sin(5)\sin(7)}{\sin(2)\sin(4)\sin(6)\sin(8)} = 1 \tag{26}$$

Diese Gleichung ist das Produkt aus (A) und (C) oder (B) und (D), z. B.:

$$(A) \qquad \frac{\sin(7+8)\sin(5)\sin(3)}{\sin(6)\sin(3+4)\sin(8)} = 1$$

$$(C) \qquad \frac{\sin(3+4)\sin(1)\sin(7)}{\sin(2)\sin(7+8)\sin(4)} = 1$$

woraus durch Multiplikation (26) folgt.

Die Absolutglieder geben die Beziehung:

$$(m) = (a) + (c) = (b) + (d) \tag{27}$$

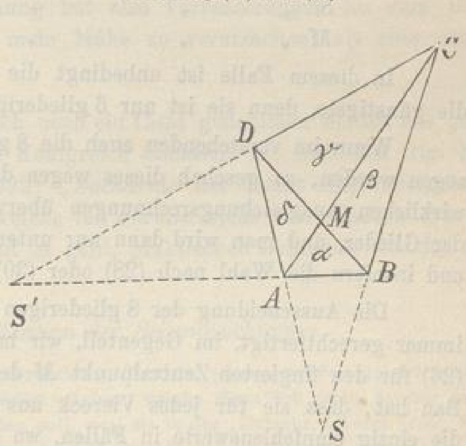
Dreiecksflächen als Mass der Günstigkeit.

Die *Zachariae* sche Theorie verlangt zur Auffindung des günstigsten Zentralpunktes nach (14 a) eine *sechs*fache Vergleichung von Diagonalenstrecken, um schliesslich aus allen 6 Vergleichungen den günstigsten Fall herauszufinden.

Dieses lässt sich auf eine viel bequemere mit *einem* Blick zu erledigende *Flächen*vergleichung zurückführen, wie wir nun zeigen werden:

Fig. 6.

Flächenverhältnisse $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ zu Gleichung (28) und (29).



Wir betrachten die Formel (14) in Verbindung mit Fig. 5. oder Fig. 6. und finden:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{CM}{AM} = \frac{\triangle BDC}{\triangle ABD}$$

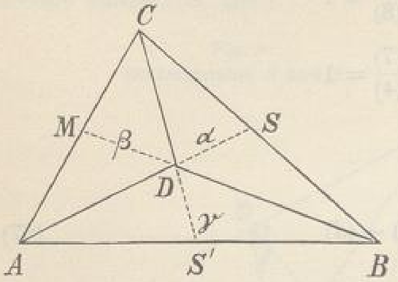
d. h. die Absolutglieder (a) und (c) sind den *Flächen* der Dreiecke BDC und ABD proportional. Nimmt man nun noch die Gleichungen (23), (24), (26) und (25) hinzu, so bekommt man folgende Zusammenstellung, und damit das Gesamt-Ergebnis unserer Untersuchung:

Zentralpunkt		Mass der Günstigkeit (Fig. 6.)	
A	mit 6 gliederiger Seitengleichung	Fläche $\beta+\gamma$	(28)
B	" " "	" $\gamma+\delta$	
C	" " "	" $\alpha+\delta$	
D	" " "	" $\alpha+\beta$	
S	mit 8 gliederiger Seitengleichung	Fläche $\gamma-\alpha$	(29)
S'	" " "	" $\beta-\delta$	
M	" " "	" $\alpha+\beta+\gamma+\delta$	

Am günstigsten ist die Seitengleichung (26) für den Zentralpunkt M, jedoch ist dieselbe 8 gliederig.

Wenn 2 Vierecksseiten *parallel* werden, so versagt die ihrem Schnitt entsprechende 8 gliederige Gleichung vollständig, wenn z. B. AB parallel DC ist, so

Fig. 7.
Flächenverhältnisse α β γ zu Gleichung (30) und (31).



wird $\beta = \delta$ und die Gleichung für S' löst sich auf in $0\ldots + 0\ldots \ldots = 0$, was man auch direkt nachweisen kann.

Wenn die 4 Punkte $A\,B\,C\,D$ nicht ein eigentliches Viereck wie Fig. 6. bilden, sondern ein Dreieck $A\,B\,C$ mit einem Innenpunkt D, wie z. B. Fig. 7., so bekommt man folgende Vergleichung betreffs der Günstigkeit der 7 möglichen Seitengleichungen:

Zentralpunkt		Mass der Günstigkeit (Fig. 9.)	
A	mit 6 gliederiger Seitengleichung	Fläche α	(30)
B	„ „	„ β	
C	„ „	„ γ	
D	„ „	„ $\alpha + \beta + \gamma$	
S	mit 8 gliederiger Seitengleichung	Fläche $\beta + \gamma$	(31)
S'	„ „	„ $\alpha + \beta$	
M	„ „	„ $\alpha + \gamma$	

In diesem Falle ist unbedingt die Seitengleichung für den Zentralpunkt D die günstigste, denn sie ist nur 6 gliederig und hat die grössten Zahlen-Coefficienten.

Wenn im vorstehenden auch die 8 gliederigen Formen zur Vergleichung beigezogen wurden, so geschah dieses wegen der theoretischen Vollständigkeit, denn bei wirklichen Ausgleichungsrechnungen überwiegt oft die Rücksicht auf geringe Zahl der Glieder, und man wird dann nur unter den 4 Fällen $A\,B\,C\,D$ zu wählen haben, und insofern die Wahl nach (28) oder (30) treffen.

Die Ausscheidung der 8 gliederigen Seitengleichungen ist aber durchaus nicht immer gerechtfertigt, im Gegenteil, wir halten die absolut günstigste Seitengleichung (26) für den fingierten Zentralpunkt M der Fig. 5., welche zudem so symmetrischen Bau hat, dass sie für jedes Viereck aus dem Kopf angeschrieben werden kann, für die einzig empfehlenswerte in Fällen, wo es auf scharfe Rechnung ankommt.

Beispielshalber haben wir die Ausgleichung des Hannover schen Fünfecks Fig. 5. S. 189 nochmals gemacht unter Einführung der *schärfsten* 8 gliederigen Form für das Viereck Aegidius-Burg-Schanze-Steuerndieb, nämlich nach Fig. 1. S. 189:

$$\frac{\sin(17-16)\sin(14-13)\sin(3-2)\sin(20-19)}{\sin(18-17)\sin(15-14)\sin(4-3)\sin(21-20)} = 1$$

Die Ausrechnung mit den Winkeln von S. 190—191 gab in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$\begin{aligned} &+ 1{,}64\,(v_{17} - v_{16}) + 2{,}16\,(v_{14} - v_{13}) + 2{,}53\,(v_3 - v_2) + 2{,}41\,(v_{20} - v_{19}) \\ &+ 1{,}42\,(v_{17} - v_{18}) + 3{,}54\,(v_{14} - v_{15}) + 1{,}58\,(v_3 - v_4) + 2{,}25\,(v_{20} - v_{21}) + 6{,}5 = 0 \end{aligned}$$

oder geordnet:

$$\begin{aligned} &- 2{,}53\,v_2 + 4{,}11\,v_3 - 1{,}58\,v_4 - 2{,}16\,v_{13} + 5{,}70\,v_{14} - 3{,}54\,v_{15} \\ &- 1{,}64\,v_{16} + 3{,}06\,v_{17} - 1{,}42\,v_{18} - 2{,}41\,v_{19} + 4{,}66\,v_{20} - 2{,}25\,v_{21} + 6{,}5 = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wurde an Stelle der zweiten Gleichung (6) oben auf S. 194—195 gesetzt und alles übrige gelassen; die Normalgleichungen werden an Stelle von S. 193 die folgenden (in abgekürzter Schreibweise nach S. 80 unten):

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
+\underline{107,19k_1} & +\ 1,08k_2 & -3,41k_3 & +3,27k_4 & +0,08k_5 & +0,49k_6 & -0,87k_7 & -0,24k_8 & +18,20=0 \\
 & +\underline{122,13k_2} & -0,28k_3 & .\ . & -0,58k_5 & -2,37k_6 & +2,32k_7 & +1,90k_8 & +\ 6,50=0 \\
 & & +\underline{6,00k_3} & -2,00k_4 & .\ . & .\ . & -2,00k_7 & -2,00k_8 & -\ 1,02=0 \\
 & & & +\underline{6,00k_4} & -2,00k_5 & .\ . & .\ . & .\ . & +\ 2,22=0 \\
 & & & & +\underline{6,00k_5} & -2,00k_6 & .\ . & -2,00k_8 & -\ 2,36=0 \\
 & & & & & +\underline{6,00k_6} & -2,00k_7 & +2,00k_8 & -\ 0,76=0 \\
 & & & & & & +\underline{6,00k_7} & +2,00k_8 & +\ 2,30=0 \\
 & & & & & & & +\underline{6,00k_8} & +\ 4,30=0
\end{array}
$$

Die Auflösung gab:

$$
\begin{array}{llll}
k_1 = -0,175 & k_2 = -0,027 & k_3 = -0,386 & k_4 = -0,366 \\
k_5 = +0,111 & k_6 = +0,462 & k_7 = -0,059 & k_8 = -0,941
\end{array}
$$

Die Weiterrechnung gab die v ein klein wenig anders, als sie in der Tabelle II von S. 194—195 erhalten wurden und zwar zu Gunsten der *neuen* Ausgleichung; deshalb sind auf S. 196 diese *neuen* v und nicht die alten von S. 194—195 eingesetzt, wie bereits auf S. 195 im Kleingedruckten auseinandergesetzt ist. Die neue Rechnung mit der schärferen Seitengleichung hat also Verbesserungen bis zum Betrag von rund 0,01″ gebracht, ohne dabei mehr Mühe zu verursachen, als eine weniger günstige Seitengleichung.

Zur vorliegenden Frage mag auch noch ein Citat genommen werden aus „Astr. geod. Arbeiten f. d. Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, II. Abt. das trig. Netz, I. Ordnung von *A. Nagel*, 1890“, S. 492: „*Zachariae* hat zuerst eine tiefergehende Untersuchung dieser Frage angestellt, welche von *Jordan* nicht unwesentlich erweitert worden ist.“ Nagel macht dabei so gut es geht, praktischen Gebrauch von der fraglichen Theorie.

Division und Multiplikation der Seitengleichungen.

Im Anschluss an die vorstehende Untersuchung über die günstigste Seitengleichungsform möge auch noch eine andere Formfrage erledigt werden, welche eigentlich nicht hierher gehört, aber doch gelegentlich hier mit erörtert werden soll, weil sie in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236 in Zusammenhang mit der Seitengleichungsfrage gebracht wurde.

Es handelt sich darum, dass eine Seitengleichung, wenn ihre Coefficienten unbequem gross werden, beliebig mit 10, 100, 1000, kurz mit *jeder* beliebigen Zahl dividiert (oder auch multipliziert) werden darf, ohne dass ihr mathematischer Sinn oder ihre Schärfe geändert würde, wenn nur keine Wegwerfung von Decimalen stattfindet.

Dieses ist bereits in § 47. S. 134—135 angegeben (wie auch schon in den früheren Auflagen dieses Buches).

Diese einfache Sache scheint dem Verfasser oben erwähnter Bemerkungen in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236 nicht geläufig gewesen zu sein, als er 1893 in einem Buche über „M. d. kl. Q.“, S. 251 zu unserer vorstehenden Theorie schrieb: „Dabei wird sich ergeben, dass für die sehr kleinen Winkel verhältnismässig sehr grosse Coefficienten der Verbesserungen in die umgeformten Bedingungsgleichungen eintreten, wodurch in den weiteren Rechnungen die übrigen Coefficienten im Zusammenwirken erdrückt werden und dass daher die Benutzung zehnstelliger Logarithmen bei Auflösung der Endgleichungen u. s. w. noch keine genügende Genauigkeit erreichen lässt“ und in „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236: dass „Jordan im § 69. seines Handbuches I. Band 1888 (übereinstimmend mit vorstehendem § 84.) immer nur die Wichtigkeit sehr grosser Coefficienten betont und danach nicht angenommen werden konnte, dass er die grossen Coefficienten durch Division wieder beseitigen werde.“

Diese Kritik giebt nun Veranlassung, die Sache jetzt noch deutlicher auszudrücken, als in der vorigen Auflage 1888, § 69. für nötig gehalten wurde.

Die Benennung *„grosse“* Coefficienten kann bei diesen Erörterungen zweierlei bedeuten, z. B. in den Gleichungen (22) S. 303 hat 30 v_8 einen *grossen* Coefficienten 30 im Vergleich mit 8 v_8, welches nur den *kleinen* Coefficienten 8 hat. Wenn man aber die erste Gleichung von (22) mit 10 dividiert und dazu die 4te Gleichung geradezu nimmt, so hat man:

$$-0{,}1\,v_1 - 1{,}8\,v_2 + 7{,}5\,v_5 - 2{,}1\,v_6 - 3{,}0\,v_8 + 4{,}0 = 0$$
$$+\ 1\,v_1 - 5\,v_2 + 22\,v_5 - 6\,v_6 - 8\,v_8 + 13 = 0$$

Nun könnte man sagen, 3,0 ist ein *kleiner* Coefficient im Vergleich mit 8; allein in anderem Sinne ist 3,0 doch ein grösserer Coefficient als 8, weil 3,0 aus $\frac{30}{10}$ entstanden mit $\pm$ 1 Einheit seiner letzten Stelle, auf $\frac{1}{30}$ oder 3,3 % seines Wertes genau ist, dagegen 8 mit $\pm$ 1 seiner letzten Stelle nur auf $\frac{1}{8}$ oder 12 % seines Wertes genau, oder nehmen wir die Coefficienten von v_5, nämlich 7,5 und 22, so ist 7,5 in dieser Form zwar kleiner als 22, aber doch ist 7,5 im Sinne der hier behandelten Theorie der grössere Coefficient, weil es auf die Stellung des Kommas nicht ankommt.

Oder kurz, die *grossen* Coefficienten sind deswegen die besseren, weil sie, mag man sie auch mit 10, 100 und beliebig dividieren, immer noch *relativ* genauer sind als die ursprünglich kleineren Coefficienten. Damit dürfte für jeden in solchen Sachen nicht unerfahrenen Rechner der Vorwurf „die grossen Coefficienten durch Division wieder zu *beseitigen*“ – erledigt sein.

Wir werden im nächsten § 85. durch ein Zahlenbeispiel zu dieser Sache noch weitere Aufklärung geben, hier aber sei die ganz einfache Frage der Division der Gleichungen noch etwas weiter dargelegt.

In den beiden ersten Triangulierungsausgleichungen, welche wir haben, nämlich in dem „supplementum theoriae combinationis 1826“, rechnet Gauss die Seitengleichungen in Einheiten der *siebenten* Logarithmenstelle, und dabei tritt der Übelstand ein, der oben mit „Erdrücken“ der kleinen Coefficienten benannt wurde, denn es lautet z. B. die erste Normalgleichung in Art. 24. des suppl. theor. comb.:

$$-1{,}368 = +6\,A - 2\,B - 2\,C - 2\,D + 184{,}72\,F - 19{,}85\,G$$

Hier ist der Coefficient 184,72 zu gross, was in unserem Commentar hiezu (in Jordan-Steppes deutsches Vermessungswesen 1882, S. 13) bemerkt wurde.

Als Verfasser nach dem klassischen Muster des suppl. theor. comb. seine ersten Ausgleichungsversuche machte, welche in Taschenbuch der prakt. Geom. 1873, § 147 u. ff. veröffentlicht sind, wurde dem Gauss schen Vorbild entsprechend ebenfalls in Einheiten der 7ten Log.-Stelle gerechnet aber in der folgenden Auflage, 1878, 2. Band S. 147—148 der daraus folgende Übelstand erkannt, und bei einem Teile der Ausgleichungen jenes Bandes berücksichtigt, durch Rechnung in Einheiten der 6ten Log.-Stelle und S. 148 dazu bemerkt: Man braucht überhaupt keine bestimmte Logarithmendecimale als Einheit der linearen Seitengleichungen zu nehmen, sondern man kann diese Seitengleichungen mit jeder beliebigen Konstanten multiplizieren. Man vergleiche hiezu auch eine Bemerkung in dem Werke „Die königl. preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, I. Teil, 2. Aufl., Berlin 1870“, S. 24.

Seit unserer 3. Auflage haben wir bei solchen Ausgleichungen stets in Einheiten der 6. Logarithmendecimale gerechnet, was das bequemste ist.

Endlich sind die neueren Ausgleichungen von *Helmert* hier zu erwähnen, von denen ein Beispiel in unserem vorhergehenden § 83. enthalten ist. Es wird hier in der Gleichung (g) S. 295 in *halben* Einheiten der 6ten Logar.-Stelle gerechnet, wodurch der Vorteil entsteht, dass die Coefficienten der linearen Seitengleichungen noch mehr den Coefficienten $+1$ oder -1 der Dreiecksgleichungen nahe gebracht werden.

Man sieht aus diesen Citaten, dass die kleine formelle Frage der Masseinheit in den linearen Seitengleichungen bereits ihre Geschichte hat, und dem nicht unerfahrenen Rechner längst geläufig ist.

§ 85. Günstige und ungünstige Seitengleichung in einem Vierecks-Beispiel.

Zu weiterer Klarlegung der im vorigen § 84. behandelten Theorie für mehr oder weniger scharfe Aufstellung der Seitengleichung in einem Vierecke wollen wir im Nachfolgenden ein Zahlenbeispiel durchrechnen mit einer Vierecksform (Fig. 1.);