Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 85. Günstige und ungünstige Seitengleichung im Vierecks-Beispiel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Diese Kritik giebt nun Veranlassung, die Sache jetzt noch deutlicher auszudrücken, als in der vorigen Auflage 1888, § 69. für nötig gehalten wurde.

Die Benennung „*grosse*“ Coefficienten kann bei diesen Erörterungen zweierlei bedeuten, z. B. in den Gleichungen (22) S. 303 hat 30 v_8 einen *grossen* Coefficienten 30 im Vergleich mit 8 v_8, welches nur den *kleinen* Coefficienten 8 hat. Wenn man aber die erste Gleichung von (22) mit 10 dividiert und dazu die 4te Gleichung geradezu nimmt, so hat man:

$$-0{,}1\,v_1 - 1{,}8\,v_2 + 7{,}5\,v_5 - 2{,}1\,v_6 - 3{,}0\,v_8 + 4{,}0 = 0$$
$$+\ 1\,v_1 - 5\,v_2 + 22\,v_5 - 6\,v_6 - 8\,v_8 + 13 = 0$$

Nun könnte man sagen, 3,0 ist ein *kleiner* Coefficient im Vergleich mit 8; allein in anderem Sinne ist 3,0 doch ein grösserer Coefficient als 8, weil 3,0 aus $\frac{30}{10}$ entstanden mit $\pm$ 1 Einheit seiner letzten Stelle, auf $\frac{1}{30}$ oder 3,3 % seines Wertes genau ist, dagegen 8 mit $\pm$ 1 seiner letzten Stelle nur auf $\frac{1}{8}$ oder 12 % seines Wertes genau, oder nehmen wir die Coefficienten von v_5, nämlich 7,5 und 22, so ist 7,5 in dieser Form zwar kleiner als 22, aber doch ist 7,5 im Sinne der hier behandelten Theorie der grössere Coefficient, weil es auf die Stellung des Kommas nicht ankommt.

Oder kurz, die *grossen* Coefficienten sind deswegen die besseren, weil sie, mag man sie auch mit 10, 100 und beliebig dividieren, immer noch *relativ* genauer sind als die ursprünglich kleineren Coefficienten. Damit dürfte für jeden in solchen Sachen nicht unerfahrenen Rechner der Vorwurf „die grossen Coefficienten durch Division wieder zu *beseitigen*“ – erledigt sein.

Wir werden im nächsten § 85. durch ein Zahlenbeispiel zu dieser Sache noch weitere Aufklärung geben, hier aber sei die ganz einfache Frage der Division der Gleichungen noch etwas weiter dargelegt.

In den beiden ersten Triangulierungsausgleichungen, welche wir haben, nämlich in dem „supplementum theoriae combinationis 1826“, rechnet Gauss die Seitengleichungen in Einheiten der *siebenten* Logarithmenstelle, und dabei tritt der Übelstand ein, der oben mit „Erdrücken“ der kleinen Coefficienten benannt wurde, denn es lautet z. B. die erste Normalgleichung in Art. 24. des suppl. theor. comb.:

$$-1{,}368 = +6\,A - 2\,B - 2\,C - 2\,D + 184{,}72\,F - 19{,}85\,G$$

Hier ist der Coefficient 184,72 zu gross, was in unserem Commentar hiezu (in Jordan-Steppes deutsches Vermessungswesen 1882, S. 13) bemerkt wurde.

Als Verfasser nach dem klassischen Muster des suppl. theor. comb. seine ersten Ausgleichungsversuche machte, welche in Taschenbuch der prakt. Geom. 1873, § 147 u. ff. veröffentlicht sind, wurde dem Gauss schen Vorbild entsprechend ebenfalls in Einheiten der 7ten Log.-Stelle gerechnet aber in der folgenden Auflage, 1878, 2. Band S. 147—148 der daraus folgende Übelstand erkannt, und bei einem Teile der Ausgleichungen jenes Bandes berücksichtigt, durch Rechnung in Einheiten der 6ten Log.-Stelle und S. 148 dazu bemerkt: Man braucht überhaupt keine bestimmte Logarithmendecimale als Einheit der linearen Seitengleichungen zu nehmen, sondern man kann diese Seitengleichungen mit jeder beliebigen Konstanten multiplizieren. Man vergleiche hiezu auch eine Bemerkung in dem Werke „Die königl. preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, I. Teil, 2. Aufl., Berlin 1870“, S. 24.

Seit unserer 3. Auflage haben wir bei solchen Ausgleichungen stets in Einheiten der 6. Logarithmendecimale gerechnet, was das bequemste ist.

Endlich sind die neueren Ausgleichungen von *Helmert* hier zu erwähnen, von denen ein Beispiel in unserem vorhergehenden § 83. enthalten ist. Es wird hier in der Gleichung (g) S. 295 in *halben* Einheiten der 6ten Logar.-Stelle gerechnet, wodurch der Vorteil entsteht, dass die Coefficienten der linearen Seitengleichungen noch mehr den Coefficienten + 1 oder — 1 der Dreiecksgleichungen nahe gebracht werden.

Man sieht aus diesen Citaten, dass die kleine formelle Frage der Masseinheit in den linearen Seitengleichungen bereits ihre Geschichte hat, und dem nicht unerfahrenen Rechner längst geläufig ist.

§ 85. Günstige und ungünstige Seitengleichung in einem Vierecks-Beispiel.

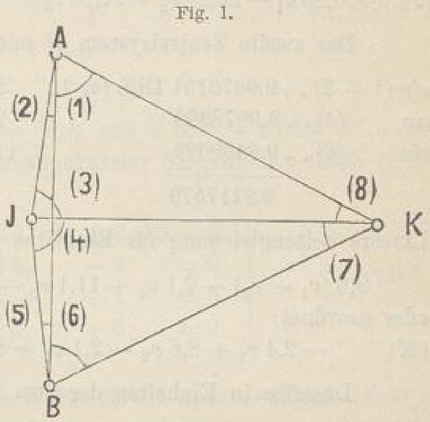
Zu weiterer Klarlegung der im vorigen § 84. behandelten Theorie für mehr oder weniger scharfe Aufstellung der Seitengleichung in einem Vierecke wollen wir im Nachfolgenden ein Zahlenbeispiel durchrechnen mit einer Vierecksform (Fig. 1.);

welche als charakteristisch für die Wahl des Zentralsystems bezeichnet worden ist (nach „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 176—182 und S. 235—240).

Die Anwendung unseres Flächensatzes (28) § 84. S. 305 giebt hier:

Zentralpunkt	Mass der Günstigkeit	
A	Dreiecksfläche $B\,J\,K$	(1)
B	„ $A\,J\,K$	
J	„ $A\,B\,K$	
K	„ $A\,B\,J$	

Fig. 1.



Es ist also J der günstigste Zentralpunkt, weil die abgewandte Fläche $A\,B\,K$ am grössten ist, und K erscheint als ungünstigster Zentralpunkt, weil die abgewandte Fläche $A\,B\,J$ am kleinsten ist.

Die Seitengleichungen für diese beiden Fälle sind:

Zentralpunkt J, $$\frac{\sin(1+2)\sin(7)\sin(5)}{\sin(8)\sin(5+6)\sin(2)} = 1 \tag{2}$$

Zentralpunkt K, $$\frac{\sin(1+2)\sin(4)\sin(6)}{\sin(3)\sin(5+6)\sin(1)} = 1 \tag{3}$$

Hierzu nehmen wir folgende Winkel als gemessen an:

$(1) = 62^\circ\,14'\,30''$	$(1) = 62^\circ\,14'\,30''$	$(2) = 5^\circ\,42'\,33''$	$(4) = 84^\circ\,17'\,25''$	(4)
$(8) = 27\;\;45\;\;30$	$(2) = 5\;\;42\;\;33$	$(3) = 84\;\;17\;\;26$	$(5) = 5\;\;42\;\;32$	
$(7) = 27\;\;45\;\;28$	$(3) = 84\;\;17\;\;26$	$(4) = 84\;\;17\;\;25$	$(6) = 62\;\;14\;\;29$	
$(6) = 62\;\;14\;\;29$	$(8) = 27\;\;45\;\;30$	$(5) = 5\;\;42\;\;32$	$(7) = 27\;\;45\;\;28$	
$179^\circ\,59'\,57''$	$179^\circ\,59'\,59''$	$179^\circ\,59'\,56''$	$179^\circ\,59'\,54''$	
$w = -3''$	$w = -1''$	$w = -4''$	$w = -6''$	

Dazu gehören die Winkelbedingungsgleichungen:

$$\text{unabhängig} \left\{ \begin{array}{ll} v_1 + v_8 + v_7 + v_6 - 3'' = 0 & (5) \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_8 - 1'' = 0 & (6) \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 - 6'' = 0 & (7) \end{array} \right.$$

$$\text{abhängig} \quad (v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 4'' = 0) \tag{8}$$

Von diesen 4 Gleichungen sind aber nur 3 unabhängig, wir wollen etwa (5) (6) und (7) in die Ausgleichung aufnehmen. Ausserdem muss eine Seitengleichung genommen werden.

Das Zentralsystem J nach (2) giebt folgende trigonometrische Ausrechnung mit 7 stelligen Logarithmen:

$\sin(1+2)$ . . 9.9670151	Diff. für 10″ 86		$\sin$ (8) . . 9.6681466	Diff. für 10″ 400	
$\sin$ (7) . . 9.6681386	400		$\sin(5+6)$ . . 9.9670134	86	
$\sin$ (5) . . 8.9977101	2106		$\sin$ (2) . . 8.9977312	2106	
8.6328638			8.6328912		

Die dazu gehörige lineare Seitengleichung ist für Einheiten der 6ten Logar.-Stelle:

$$\left.\begin{array}{l} +0{,}86\,(v_1+v_2)+4{,}00\,v_7+21{,}06\,v_5-4{,}00\,v_8-0{,}86\,(v_5+v_6)-21{,}06\,v_2-27{,}4=0 \\ \text{oder geordnet:} \\ (J)\quad +0{,}86\,v_1-20{,}20\,v_2+20{,}20\,v_5-0{,}86\,v_6+4{,}00\,v_7-4{,}00\,v_8-27{,}4=0 \end{array}\right\}(9)$$

Das zweite Zentralsystem K mit der Gleichung (3) giebt:

sin (1 + 2) . . 9.9670151	Diff. für 10″	86	*sin* (3) . . 9.9978402	Diff. für 10″	21
sin (4) . . 9.9978399		21	*sin* (5 + 6) . . 9.9670134		86
sin (6) . . 9.9469029		111	*sin* (1) . . 9.9469040		110
9.9117579			9.9117576		

Lineare Seitengleichung für Einheiten der 7. Decimale:

$$\left.\begin{array}{l} 8{,}6\,(v_1+v_2)+2{,}1\,v_4+11{,}1\,v_6-2{,}1\,v_3-8{,}6\,(v_5+v_6)-11{,}0\,v_1+3=0 \\ \text{oder geordnet:} \\ (K)\qquad -2{,}4\,v_1+8{,}6\,v_2-2{,}1\,v_3+2{,}1\,v_4-8{,}6\,v_5+2{,}4\,v_6+3=0 \end{array}\right\}(10)$$

Dasselbe in Einheiten der 6ten Decimale:

$$-0{,}24\,v_1+0{,}86\,v_2-0{,}21\,v_3+0{,}21\,v_4-0{,}86\,v_5+0{,}24\,v_6+0{,}3=0 \qquad (11)$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, dass man die Gleichung (9) in die Form (10) oder (11) überführen kann; man braucht nur v_7 und v_8 aus (9) zu eliminieren, nämlich aus (7) und (6) hat man:

$$v_7=-v_4-v_5-v_6+6''$$
$$v_8=-v_1-v_2-v_3+1''$$

Diese beiden in (9) eingesetzt werden geben:

$$+4{,}86\,v_1-16{,}20\,v_2+4{,}00\,v_3-4{,}00\,v_4+16{,}20\,v_5-4{,}86\,v_6-7{,}00=0 \qquad (12)$$

Wenn man dieses mit $-3:7$ multipliziert, so kommt:

$$-2{,}08\,v_1+6{,}94\,v_2-1{,}71\,v_3+1{,}71\,v_4-6{,}94\,v_5+2{,}08\,v_6+3{,}00=0 \qquad (13)$$

dieses stimmt mit (10) zwar im Absolutgliede 3,0 überein, aber die Coefficienten selbst, welche in (11) und (13) ebenfalls stimmen sollten, weichen ganz erheblich ab, z. B. — 2,4 gegen — 2,08 u. s. w. und darin zeigt sich bereits die Überlegenheit der Gleichung (2) mit dem Zentralpunkt J über (3) mit dem Zentralpunkt K. Allerdings wenn die Absolutglieder in (9) und (10) trigonometrisch etwa mit 8—10 stelligen Logarithmen berechnet worden wären, überhaupt wenn diese Absolutglieder ganz scharf wären, so müsste auch die Umwandlung von (9) in (10) ebenfalls scharf stimmen. Wir haben aber absichtlich nur mit 7 stelligen Logarithmen gerechnet, um eben die unvermeidlichen Fehler dieser Rechnung ins richtige Licht zu stellen.

Nun sind uns aber die Coefficienten in (9) immer noch zu gross im Vergleich mit den Coefficienten 1 der Winkelsummengleichungen; wir wollen daher die Gleichung (9) mit 8 dividieren, indem dadurch der Mittelwert der Coefficienten nahezu auf 1 gebracht wird. Man erhält auf diesem Wege aus (9):

$$+0{,}108\,v_1-2{,}525\,v_2+2{,}525\,v_5-0{,}108\,v_6+0{,}500\,v_7-0{,}500\,v_5-3{,}425=0 \qquad (14)$$

Nun wollen wir die Ausgleichung unseres Vierecks völlig zweifach machen:

I. Ausgleichung mit den Bedingungsgleichungen (14), (5), (6), (7)
II. „ „ „ „ (10), (5), (6), (7).

Bedingungsgleichungen I. (14), (5), (6), (7) (15)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
(14)	+ 0,108	— 2,525	. .	. .	+ 2,525	— 0,108	+ 0,500	— 0,500	— 3,425
(5)	+ 1	. .	. .	. .	. .	+ 1	+ 1	+ 1	— 3
(6)	+ 1	+ 1	+ 1	. .	. .	. .	. .	+ 1	— 1
(7)	. .	. .	. .	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	. .	— 6

Die zugehörigen Normalgleichungen finden sich mit $0,108^2 + 2,525^2 + \ldots = 13,275$ u. s. w. und im Ganzen erhält man in abgekürzter Schreibweise (nach (2) und (3) S. 80):

$$\left.\begin{array}{llllll} \underline{+13,275\,k_1} & . \; . & -2,917\,k_3 & +2,917\,k_4 & -3,425 & =0 \\ & \underline{+4\,k_2} & +2\,k_3 & +2\,k_4 & -3 & =0 \\ & & \underline{+4\,k_3} & . \; . & -1 & =0 \\ & & & \underline{+4\,k_4} & -6 & =0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = -0,0245 \;,\quad k_2 = -0,2500 \;,\quad k_3 = +0,3573 \;,\quad k_4 = +1,6428 \quad (17)$$

Damit macht man die Ausrechnung der einzelnen v, indem man der Tabelle (15) nach Vertikalreihen folgt. Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{array}{llll} v_1 = +0,1047'' & v_2 = +0,4191'' & v_3 = +0,3573'' & v_4 = +1,6428'' \\ v_5 = +1,5810'' & v_6 = +1,3954'' & v_7 = +1,3806'' & v_8 = +0,1195'' \end{array}\right\} \quad (18)$$

Wenn man diese Verbesserungen den gemessenen Winkeln hinzufügt, so bekommt man statt der früheren (4) nun die ausgeglichenen Dreiecke:

$$\left.\begin{array}{ll} [1] = 62^\circ\,14'\,30,1047'' & [1] = 62^\circ\,14'\,30,1047'' \\ [8] = 27\;\;45\;\;30,1195 & [2] = \;\;5\;\;42\;\;33,4191 \\ [7] = 27\;\;45\;\;29,3806 & [3] = 84\;\;17\;\;26,3573 \\ \underline{[6] = 62\;\;14\;\;30,3954} & \underline{[8] = 27\;\;45\;\;30,1195} \\ \quad 180^\circ\;0'\;\;0,0002'' & \quad 180^\circ\;0'\;\;0,0006'' \\ [2] = \;\;5^\circ\,42'\,33,4191'' & [4] = 84^\circ\,17'\,26,6428'' \\ [3] = 84\;\;17\;\;26,3573 & [5] = \;\;5\;\;42\;\;33,5810 \\ [4] = 84\;\;17\;\;26,6428 & [6] = 62\;\;14\;\;30,3954 \\ \underline{[5] = \;\;5\;\;42\;\;33,5810} & \underline{[7] = 27\;\;45\;\;29,3806} \\ \quad 180^\circ\;0'\;\;0,0002'' & \quad 179^\circ\,59'\,59,9998'' \end{array}\right\} \quad (19)$$

Wie man sieht, schliessen alle 4 Dreiecke nahe auf 0,000″, und völlig genügend stimmen auch die Seitengleichungen, wie nachstehende Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen zeigen wird:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Zentralsystem } J & \text{Zentralsystem } K \\ \sin[1+2] \;.\;.\; 9.9670155 & \sin[1+2] \;.\;.\; 9.9670155 \\ \sin[7] \;\;.\;.\; 9.6681441 & \sin[4] \;\;.\;.\; 9.9978403 \\ \underline{\sin[5] \;\;.\;.\; 8.9977434} & \underline{\sin[6] \;\;.\;.\; 9.9469044} \\ \qquad\qquad 8.6329030 & \qquad\qquad 9.9117602 \\ \sin[8] \;\;.\;.\; 9.6681470 & \sin[3] \;\;.\;.\; 9.9978403 \\ \sin[5+6] \;.\;.\; 9.9670159 & \sin[5+6] \;.\;.\; 9.9670159 \\ \underline{\sin[2] \;\;.\;.\; 8.9977400} & \underline{\sin[1] \;\;.\;.\; 9.9469041} \\ \qquad\qquad 8\,6329029 & \qquad\qquad 9.9117603 \end{array}\right\} \quad (20)$$

Damit ist unsere ganze erste Ausgleichung I ganz glatt vollendet und die dabei benützte Seitengleichung (9) mit dem Zentralpunkt J oder die Umformung (14) hat gar keine Übelstände, weder sachliche, noch rechnerisch formelle zur Folge gehabt.

Wir gehen über zur Ausgleichung II mit den Bedingungsgleichungen (10), (5), (6), (7). Es wurde derselbe Gang eingehalten wie bei I, wir können die Darstellung daher nun kürzer fassen. Die Normalgleichungen und deren Auflösungen sind:

$$\left.\begin{array}{llllll} \underline{+168{,}26\,k_1} & \cdot\;\cdot & +4{,}10\,k_3 & -4{,}10\,k_4 & +3{,}00 & =9 \\ & \underline{+4\,k_2} & +2\,k_3 & +2\,k_4 & -3 & =0 \\ & & \underline{+4\,k_3} & \cdot & -1 & =0 \\ & & & \underline{+4\,k_4} & -6 & =0 \end{array}\right\} \qquad (21)$$

$$k_1 = +0{,}01330 \;,\quad k_2 = -0{,}2500 \;,\quad k_3 = +0{,}3613 \;,\quad k_4 = +1{,}6387 \qquad (22)$$

Hier sollen $k_2\ k_3\ k_4$ mit den entsprechenden k in (17) stimmen, was ungefähr der Fall ist, aber bereits bei k_3 und k_4 Abweichungen giebt. Die Normalgleichungen (21) unterscheiden sich ungünstig von (16), indem die Coefficienten in (21) viel mehr unter sich ungleich sind als in (16); das rührt von der Seitengleichung (10) K her, welche erstens an und für sich ungünstig ist (nach der Theorie des vorigen § 84.) und zweitens in Einheiten der 7ten Logarithmen-Decimale angesetzt ist, was die Coefficienten mit ungeschickter Stellung der Decimal-Kommas auftreten lässt.

Rechnen wir nun mit den Correlaten (22) weiter, so erhalten wir die Winkelverbesserungen:

$$\left.\begin{array}{llll} v_1 = +0{,}0794'' & v_2 = +0{,}4757'' & v_3 = +0{,}3334'' & v_4 = +1{,}6666 \\ v_5 = +1{,}5243'' & v_6 = +1{,}4206'' & v_7 = +1{,}3887'' & v_8 = +0{,}1113 \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Hiermit die geschlossenen Dreiecke:

		(24)
[1] = 62° 14′ 30,0794″	[1] = 62° 14′ 30,0794″	
[8] = 27 45 30,1113	[2] = 5 42 33,4757	
[7] = 27 45 29,3887	[3] = 84 17 26,3334	
[6] = 62 14 30,4206	[8] = 27 45 30,1113	
180° 0′ 0,0000″	179° 59′ 59,9998″	
[2] = 5° 42′ 33,4757″	[4] = 84° 17′ 26,6666″	
[3] = 84 17 26,3334	[5] = 5 42 33,5243	
[4] = 84 17 26,6666	[6] = 62 14 30,4206	
[5] = 5 42 33,5243	[7] = 27 45 29,3887	
180° 0′ 0,0000″	180° 0′ 0,0002″	

Dazu die Seitengleichungen:

Zentralpunkt J		Zentralpunkt K		(25)
sin [1 + 2]	9.967 0156	*sin* [1 + 2]	9.967 0156	
sin [7]	9.668 1441	*sin* [4]	9.997 8403	
sin [5]	8.997 7422	*sin* [6]	9.946 9044	
	8.632 9019		9.911 7603	
sin [8]	9.668 1470	*sin* [3]	9.997 8403	
sin [5 + 6]	9.967 0159	*sin* [5 + 6]	9.967 0159	
sin [2]	8.997 7412	*sin* [1]	9.946 9041	
	8.632 9041		9.911 7603	
	$w = -22$ (!)			

Betrachten wir diese zweite Ausgleichung (24) (25) mit der Seitengleichung (10) K, und ihre Vergleichung mit der ersten Ausgleichung (19) (21), der die Seitengleichung (9) J zu Grunde liegt, so fällt zuerst auf, dass die Dreiecks*schlüsse* (19) und (24) zwar beide vorzüglich stimmen, jedenfalls auf 0,001″, dass aber die einzelnen Winkel schon in 0,01″ und sogar um 0,05″ abweichen. Das erklärt sich daraus, dass die Winkelsummengleichungen (5) (6) (7) in beiden Fällen gleich scharf eingeführt sind, während die Seitengleichungen (9) J und (10) K ungleich scharf sind, und zwar zu Ungunsten von (10) K. Allerdings die Seitengleichung (10) K selbst stimmt in beiden Fällen auf die letzte Einheit der 7. Logarithmenstelle, aber in der zweiten Ausgleichung stimmt die andere Seitengleichung (9) J *nicht*, sondern lässt einen Fehler von 22 Einheiten der 7. Logarithmenstelle. (Vgl. (25) mit (20).

Damit ist nun die Vergleichung unbedingt zu Gunsten von (9) J nach dem Flächen-Satze von (28) § 84. S. 305 entschieden, denn diese Ausgleichung ist nicht nur numerisch gut (nahe gleiche Coefficienten der Normalgleichungen), sondern sie bringt, was die Hauptsache ist, *alle* Widersprüche zum Verschwinden, während bei (10) K das nur teilweise der Fall ist.

In dem bisher behandelten Beispiele waren die kleinsten Winkel immer noch 5° 43′, und man kann noch fragen, wie sich die Sache gestaltet in dem extremen Falle, dass die spitzen Winkel nur noch einige Minuten betragen.

Zu diesem Zwecke wollen wir unser erstes Beispiel mit Fig. 1. S. 309 so abändern, dass die Winkel (1), (8), (7), (6) von früher in (4) bleiben, während die Winkel (2), (3), (4), (5) folgende neue Werte annehmen sollen:

$$\left.\begin{array}{ll}(2) = 0^\circ\, 5'\, 33'' & (3) = 89^\circ\, 54'\, 26'' \\ (5) = 0\;\; 5\;\; 32 & (4) = 89\;\; 54\;\; 25\end{array}\right\} \qquad (26)$$

dabei bleiben die Winkelsummen in allen 4 Dreiecken dieselben wie früher in (4) S. 309.

Dagegen die Seitengleichungen werden anders, nämlich bei der Rechnung mi 7stelligen Logarithmen:

Zentralpunkt J			Zentralpunkt K		
(1 + 2)	9.9472719	111	(1 + 2)	9.9472722	111
(7)	9.6681386	400	(4)	9.9999994	0
(5)	7.2067128	129650	(6)	9.9469029	110
	6.8221233			9.8941745	
(8)	9.6681466	400	(3)	9.9999994	0
(5 + 6)	9.9472700	111	(5 + 6)	9.9472700	111
(2)	7.2080189	129650	(1)	9.9469040	110
	6.8234355			9.8941734	

(27)

In Einheiten der 6. Logarithmenstelle bekommt man aus diesem J (27):

$$1{,}11\, v_1 - 1295{,}39\, v_2 + 1295{,}39\, v_5 - 1{,}11\, v_6 + 4{,}00\, v_7 - 4{,}00\, v_8 - 1312{,}2 = 0 \quad (28)$$

und aus K (27):

$$+ 0{,}01\, v_1 + 1{,}11\, v_2 - 1{,}11\, v_5 + 1{,}1 = 0 \quad (29)$$

In diesen beiden Gleichungen sind die Coefficienten sehr ungleich; man darf deswegen, wenn man mit gewöhnlicher Rechenschärfe zufrieden sein will, die kleinen Glieder neben den grossen Gliedern vernachlässigen und erhält damit:

aus (28): $$-1295{,}39\,(v_2 - v_5) - 1312{,}2 = 0 \quad (J) \quad (30)$$

aus (29): $$+1{,}11\,(v_2 - v_5) + 1{,}1 = 0 \quad (K) \quad (31)$$

Beide Gleichungen geben eine Bedingung für die Differenz $v_2 - v_5$, die man so schreiben kann:

aus (30): $$v_2 - v_5 + 1{,}0130'' = 0 \quad (J) \qquad (32)$$

aus (31): $$v_2 - v_5 + 0{,}99'' \quad = 0 \quad (K) \qquad (33)$$

Im Ganzen stimmen diese beiden Gleichungen überein, aber die Gleichung (32), welche auf dem Zentralsystem J beruht, ist viel schärfer als die aus dem ungünstigen Zentralsystem K hergeleitete Gleichung (33), welche bei der Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen hier einen Fehler von $0{,}02''$ gebracht hat, der aber nur *zufällig* sehr klein ist und ganz gut auch $0{,}1''$ werden könnte, denn 6 zusammen genommene 7 stellige Logarithmen in (27) werden im Mittel $0{\cdot}25\ \sqrt{6} = 0{\cdot}6$ Einheiten der 7. Decimale als Fehler bringen, was aber auch auf 2·0 Einheiten der 7. Stelle oder 0,2 Einheiten der 6. Stelle anwachsen kann und dann in (31) und (33) einen Fehler von $0{,}2''$ erzeugt, während die andere Gleichung (32) J stets auf $0{,}001''$ scharf bleibt.

Nachdem durch die vorstehenden Zahlenbeispiele aufs deutlichste gezeigt ist, dass die Theorie unseres vorhergehenden § 84. mit dem Zachariäschen Satze, „welcher von Jordan auf die anschauliche Form des Flächenmasses gebracht wurde“ — vollständig richtig und praktisch sehr wertvoll ist, müssen wir noch eine Kritik und Controverse aus der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 175 bis 182 und S. 235—240 hier zum Abschluss bringen. —

Den ersten Teil dieser Sache, betreffend die beliebige *Division* der grossen Coefficienten haben wir bereits am Schlusse des vorigen § 84. S. 308 erledigt, und auch einen kleinen Rechenfehler, der in unseren Gleichungen (27)—(33) untergelaufen war, nämlich *log sin* $(1 + 2) = 9.9472719$ statt 9.9472722, haben wir im vorstehenden bei (33) insofern behandelt, als gezeigt wurde, dass ein solcher Fehler von 2 bis 3 Einheiten der 7. Decimale, welcher durch ungünstige Häufung von gewöhnlichen Abrundungen zusammen bei 6 Logarithmen vorkommen *kann*, gerade in der ungünstigen Gleichung (31) K *tausendfach* schlimmer wirkt als in der günstigen Gleichung (30) J, weil in letzterer die Coefficienten mehr als 1000fach grösser sind als in (31) K. Also gerade der kleine Rechenfehler, welcher in „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 239 bemerkt wurde, spricht nicht gegen den „Zachariae-Jordanschen Satz“, sondern am lautesten *für* denselben, indem dadurch gezeigt wird, wie die unvermeidlichen Abrundungsfehler bei 7 stelligen Logarithmen ganz verschieden wirken, je nachdem man eine günstige Gleichungsform mit grossen Coefficienten oder eine ungünstige Form mit kleinen Coefficienten anwendet.

Weiter wurde auf S. 239 „Zeitschr. f. Verm. 1894“ gesagt: „Die kleinen Abweichungen, (welche bei günstiger oder ungünstiger Form der Seitengleichung auftreten), haben für die weitere Benützung der Winkel keine praktische Bedeutung, wenn man sich nicht gerade darauf versteift, die Dreiecksseiten aus den am schlechtesten geformten Dreiecken zu berechnen.“

Dieses zeugt wieder von Missverständnis der Sache: Wenn wir in (32) oder (33) die Differenz $v_2 - v_5$ scharf auf $0{,}001''$, also jedenfalls vollauf genügend für $0{,}01''$ einführen, *oder* diese Differenz um $\pm\, 0{,}1''$ bis $\pm\, 0{,}2''$ schwankend einführen, so kommt das nicht bloss den „schlechtesten“ Dreiecken, sondern *allen* Dreiecken und Winkeln zu Gute oder zu Schaden, und es wäre doch unrationell, in eine Ausgleichung, die man sonst auf $0{,}01''$ führt, einen Fehler von $0{,}1''$ hineinzutragen und also alle $0{,}01''$ illusorisch zu machen, ohne dadurch die mindeste Arbeitserleichterung zu erzielen, aus keinem anderen Grunde, als weil der Rechner den inneren Zusammenhang zwischen den $0{,}1''$ in der Bedingungsgleichung und den $0{,}01''$ in den Verbesserungen nicht erfasst, oder sich der richtigen Theorie „nicht angeschlossen“ hat.

Damit dürfte diese Sache genügend klar gelegt und der Vorteil der Theorie von § 84. genügend bewiesen sein. Zu der vorstehenden breiten Behandlung einer verhältnismässig einfachen Sache sind wir gezwungen worden durch die in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 235—240 mitgeteilten Verhältnisse.

Reihenfolge der Bedingungsgleichungen.

Wenn die Bedingungsgleichungen einzeln aufgestellt sind, so ist über die Ausgleichung im Übrigen so viel entschieden, dass jeder Gleichung eine bestimmte Korrelate k zukommt, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Bedingungsgleichungen weiter behandelt werden; jedoch ist für die Frage der Bequemlichkeit der Elimination auch diese Reihenfolge nicht gleichgültig.

Wir wollen das kleine Beispiel (15)—(16) im Vorstehenden S. 311 nochmals vornehmen und nun die Bedingungsgleichungen so umstellen:

$$\begin{array}{l}
+v_1 \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad +v_6 \quad +v_7 \quad +v_8 \quad -3=0 \\
+v_1 \quad +v_2 \quad +v_3 \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad +v_8 \quad -1=0 \\
. \; . \quad . \; . \quad . \; . +v_4 \quad +v_5 \quad +v_6 \quad +v_7 \quad . \; . \quad -6=0 \\
+0{,}108\,v_1 - 2{,}525\,v_2 \; . \; . \; . \; . +2{,}525\,v_5 - 0{,}108\,v_6 + 0{,}500\,v_7 - 0{,}500\,v_8 - 3{,}425 = 0
\end{array}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen werden in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l}
+\underline{4{,}000\,k_1} + 2{,}000\,k_2 + 2{,}000\,k_3 \quad . \; . \quad -3{,}000 = 0 \\
\qquad + \underline{4{,}000\,k_2} \quad . \; . \quad - \; 2{,}917\,k_4 - 1{,}000 = 0 \\
\qquad\qquad + \underline{4{,}000\,k_3} + \; 2{,}917\,k_4 - 6{,}000 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad + \underline{13{,}275\,k_4} - 3{,}425 = 0
\end{array}\right\} \quad (34)$$

Dieses sind *dieselben* Gleichungen wie (16) S. 311, nur in anderer Ordnung, welche insofern etwas bequemer ist, als die frühere Ordnung, weil zu Anfang nur ganze Zahlen 4, 2 u. s. w. als Coefficienten vorkommen.

Die Elimination in dieser neuen Ordnung giebt:

$$k_1 = -0{,}2500 \quad , \quad k_2 = +0{,}3567 \quad , \quad k_3 = +1{,}6430 \quad , \quad k_4 = -0{,}0252$$

Dieses stimmt im Wesentlichen mit dem früheren k in (17) S. 311; das neue $k_4 = -0{,}0252$ entspricht dem früheren $k_1 = -0{,}0245$ und zwar ist nun 0,0252 etwas weniger genau, weil bei der Elimination in der neuen, bequemeren Ordnung am Ende zu wenig Wertstellen übrig geblieben sind. Es ist das ein Beispiel dafür, dass die Bequemlichkeit mit den ganzen Zahlen 4, 2, 2 ... am Anfange noch nicht allein ausschlaggebend ist. Man muss immer darnach trachten, die Quotienten der ersten Reduktionen, nämlich $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$, $\frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ u. s. w. möglichst *klein* zu haben, und namentlich ist zu vermeiden, dass ein solcher Quotient grösser als 1 werde, weil dadurch auch die Abrundungsunsicherheiten vergrössert übertragen würden. Zur Vergleichung von verschiedenen Eliminationsformen dieser Art können dienen das Hannoversche Fünfeck mit Normalgleichungen S. 193 und das frühere Lindener Sechseck in Handb. II. Band, 3. Aufl. 1893, S. 291.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1875“, S. 411 hat Koppe zu einer Auflösung von 34 Normalgleichungen seiner Gotthardtriangulierung zwei Tabellen, Beilage A und Beilage B gegeben, von denen die erste eine unbequeme Ordnung und die zweite eine günstigere und zwar solche Reihenfolge hat, dass die vollen Glieder möglichst zusammenstehen, in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder zusammengedrängt.

Auch in der Triangulierungsausgleichung von Nagel (vgl. das Citat von S. 307) mit Auflösung von 159 Gleichungen sind die Normalgleichungen S. 579—604 so geordnet, dass in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder die Glieder voll, und entfernt davon die Glieder leer sind.

§ 86. Ergänzungen zur Theorie der Stationsausgleichungen.

Zum Schluss des Kapitels über Ausgleichung von Triangulierungs-Netzen haben sich noch einige Bemerkungen ergeben, welche die Stationsausgleichungen von § 69. bis 71., 75. bis 77. und 82. zusammen betreffen.