Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 22. Zurückdrehung ebener Gebilde (Umkehrung der Aufgabe der Umlegung).

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Aufgabe 7. Die Erdkugel samt Gradnetz abzubilden, wenn ihre Achse zu B_1 senkrecht steht.

Die erste Projektion, das Bild der oberen Halbkugel, heißt die orthographische Polarprojektion, die zweite, das Bild der vorderen Halbkugel, die orthographische Äquatorialprojektion der Erdkugel. Wie bilden sich bei den beiden Projektionen die Breiten- und Längenkreise ab? Welche Teile erleiden die stärkste Verzerrung?

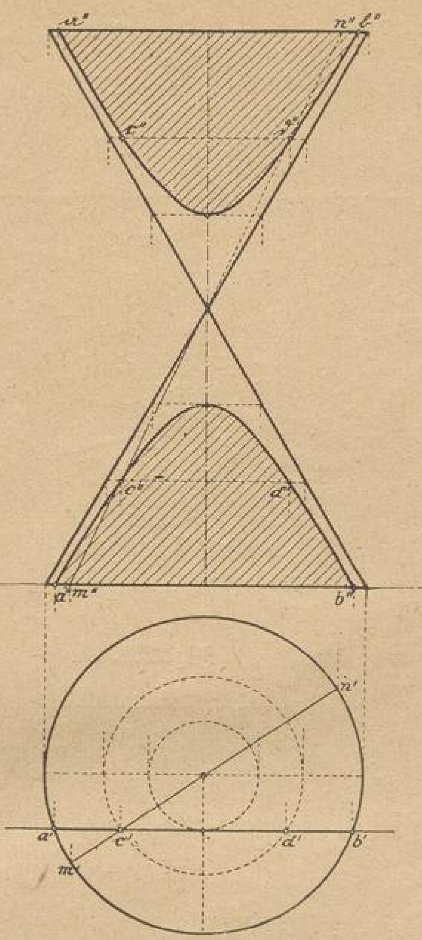

Fig. 100.

§ 22.

Zurückdrehung ebener Gebilde (Umkehrung der Aufgabe der Umlegung).

1) Unter „Zurückdrehen" (Zurückschlagen) eines ebenen Gebildes oder Punktes versteht man die Umkehrung der Aufgabe der Umlegung.

Grundaufgabe. Von einem in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist seine Umlegung P_0 und die erste Spur gegeben. Es sind seine Projektionen zu bestimmen.

Die Lösung (s. Fig. 90) nimmt den umgekehrten Verlauf wie die der Grundaufgabe § 20.

Aufgabe 1. Von einem in der Ebene E gelegenen Quadrat, deren erste Spur e_1 und erste Tafelneigung α_1 gegeben sind, (Vieleck) ist die Umlegung in die Grundebene gegeben. Die Projektionen der Figur zu zeichnen.

Aufgabe 2. In einer zu B_2 senkrechten und zu B_1 schiefen Ebene $E = (e_1, e_2)$ liegt ein Kreis, von dem die Umlegung seines Mittelpunktes M und der Radius r gegeben sind. Seine Projektionen zu zeichnen.

Die erste Projektion ist eine Ellipse. Wie liegen ihre große und kleine Achse?

2) Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide liegt mit einer Seitenfläche 12S, die gegeben ist, in der Grundebene. Die Projektionen des Körpers zu zeichnen (Fig. 101).

Das gegebene Seitendreieck 12S fällt mit seinem Grundriß $1'2'S_1$ zusammen. Um die erste Projektion der Grundfläche zu ermitteln, zeichnen wir diese in wahrer Größe an die Grundseite $1'2'$, be-

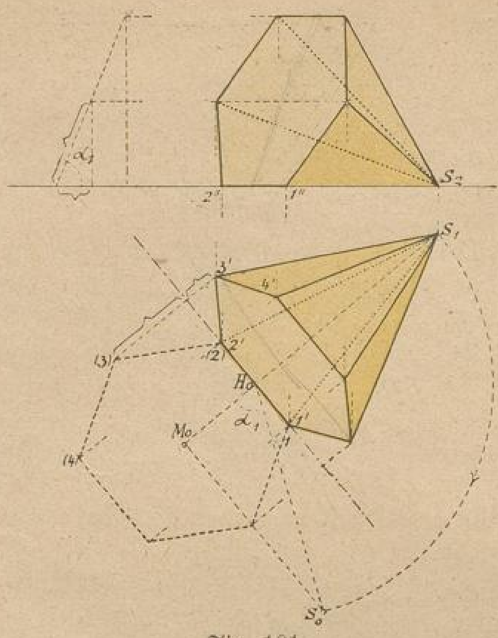

Fig. 101.

stimmen den Neigungswinkel α_1 der Seitenfläche mit der Grundfläche und drehen diese um 1′2′ als Achse für den Winkel α_1 als ihre erste Tafelneigung zurück. Wie ergeben sich die Aufrisse der nicht in der Grundebene gelegenen Punkte des Körpers?

Aufgabe 4. Ein auf der Grundebene ruhendes *regelmäßiges Dodekaeder* darzustellen (Fig. 102).

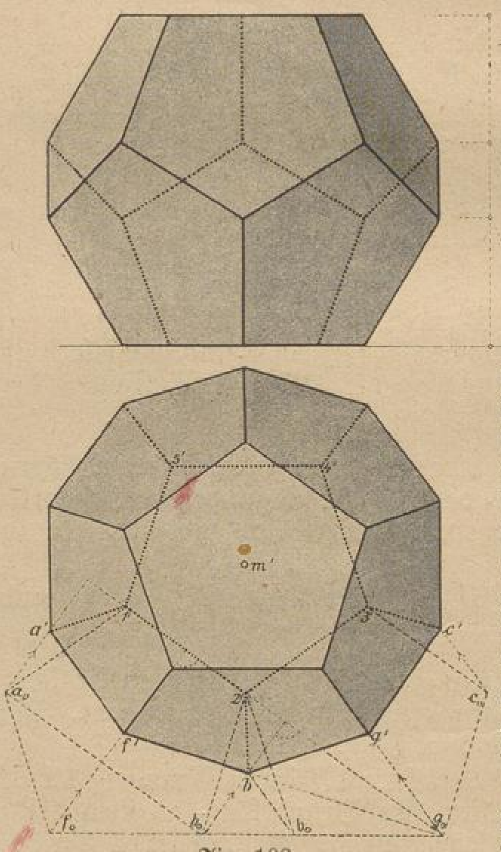

Fig. 102.

An die Seiten des in der Grundebene liegenden Fünfecks 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ zeichnen wir die angrenzenden Seitenflächen, z. B. I, II, des Körpers in wahrer Größe und suchen ihre ersten Projektionen dadurch zu bestimmen, daß wir die Fünfecke hochklappen, bis je zwei zu einem Eckpunkt des Fünfecks gehörende Kanten, z. B. 2′b_0 und 2′b_0, in b zusammenfallen. Dabei bewegen sich die drei freien Eckpunkte der hochgeklappten Fünfecke (a_0, f_0, b_0 von I; b_0, g_0, c_0 von II) in Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht zu den zugehörigen festliegenden Seiten und deren Projektionen daher senkrechte Strecken zu diesen sind. Bezeichnen wir mit a′, f′ und b′ die ersten Projektionen der Punkte a, f und b, so sind demnach a_0a', f_0f', b_0b' senkrecht zur Seite 1′ 2′ oder ihrer Verlängerung, ebenso b_0b', g_0g', c_0c' senkrecht zur Seite 2′ 3′ oder ihrer Verlängerung. Die erste Projektion b′ des Punktes b ist also der Schnittpunkt der von b_0 auf 1′ 2′ und von b_0 auf 2′ 3′ gefällten Lote. Die entsprechenden Punkte a, c′, d′, e′, liegen auf dem um den Mittelpunkt m′ des Fünfecks 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ mit dem

Radius m'b' beschriebenen Kreise, ferner auf den durch die Eckpunkte des Fünfecks gehenden Radien.

Zur Ermittlung der ersten Projektionen f', g', h', i', k' der äußersten Ecken f_0, g_0, h_0, i_0, k_0 genügt es ebenfalls, einen Bildpunkt, z. B. f', zu bestimmen (Grund?). Wir finden ihn leicht auf Grund der zwischen Umlegung und Projektion bestehenden Affinität. Die Seiten f_0b_0 und b_0g_0 bilden eine Gerade (Beweis!), von der beim Hochklappen des Fünfecks I der Punkt g_0 liegen bleibt. Weil b' schon gefunden ist, haben wir nur die Verlängerung von g_0b' mit dem von f_0 auf 1' 2' gefällten Lote zum Schnitt zu bringen.

Damit ist die erste Projektion der unteren Hälfte der Oberfläche des Dodekaeders gefunden. Die Projektion der oberen Hälfte der Oberfläche kann nun leicht hinzugefügt werden. Welche Ecken bestimmen die Seiten zweier regelmäßiger Zehnecke?

Für den Aufriß des Körpers hat man nur die ersten Tafelabstände der Ecken zu bestimmen, s. Fig. Genauigkeitsproben!

Setze das in Fig. 102 dargestellte regelmäßige Dodekaeder in schiefe Parallelprojektion für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$.

§ 23. Durchdringung zweier Körper, insbesondere ebenflächiger Körper.

1 a) Wenn zwei Körper einander durchschneiden („durchdringen"), so sind zwei Fälle möglich:

I. Der eine durchbohrt den andern (Fig. 109). Man spricht dann von einer Durchbohrung oder vollständigen Durchdringung. Die Schnittfigur der beiderseitigen Oberflächen der Körper, die Durchdringungsfigur, besteht aus zwei getrennten geschlossenen Figuren, bei zwei ebenflächigen Körpern oder Vielflachen aus zwei Raumvielecken.

II. Der eine Körper dringt in den andern ein oder er schneidet aus ihm ein seitliches Stück heraus (Fig. 106). In diesem Falle hat man es mit einer Eindringung oder einer unvollständigen Durchdringung zu tun. Die Durchdringungsfigur wird nur von einer geschlossenen Figur, bei Vielflachen von einem räumlichen Vieleck gebildet.

b) Die Seiten der **Durchdringungsfigur zweier Vielflache** sind die Schnittlinien, in denen sich die begrenzenden Flächen der Körper schneiden, ihre Ecken die Schnittpunkte, in denen die unverlängerten Kanten eines jeden der beiden Körper die Flächen des andern treffen. Dementsprechend kann die Durchdringungsfigur entweder durch Ermittlung der Seiten (Flächenverfahren) oder der Ecken (Kantenverfahren) gefunden werden. Das **Kantenverfahren** ist im allgemeinen das einfachere und wird deshalb in der Regel angewandt. Es besteht darin, daß man die beiderseitigen Schnittpunkte der unverlängerten Kanten eines Vielflachs mit den Flächen des andern bestimmt und die so erhaltenen Eckpunkte der Durchdringungsfigur in richtiger Reihenfolge verbindet. Dabei