



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 23. Durchdringung zweier Körper, insbesondere ebenflächiger Körper.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83258](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83258)

Radius $m'b'$ beschriebenen Kreise, ferner auf den durch die Eckpunkte des Fünfecks gehenden Radien.

Zur Ermittlung der ersten Projektionen f', g', h', i', k' der äußersten Ecken f_0, g_0, h_0, i_0, k_0 genügt es ebenfalls, einen Bildpunkt, z. B. f' , zu bestimmen (Grund?). Wir finden ihn leicht auf Grund der zwischen Umlegung und Projektion bestehenden Affinität. Die Seiten f_0b_0 und h_0g_0 bilden eine Gerade (Beweis!), von der beim Hochklappen des Fünfecks I der Punkt g_0 liegen bleibt. Weil b' schon gefunden ist, haben wir nur die Verlängerung von g_0b' mit dem von f_0 auf $1'2'$ gefällten Lote zum Schnitt zu bringen.

Damit ist die erste Projektion der unteren Hälfte der Oberfläche des Dodekaeders gefunden. Die Projektion der oberen Hälfte der Oberfläche kann nun leicht hinzugefügt werden. Welche Ecken bestimmen die Seiten zweier regelmäßiger Zehnecke?

Für den Aufriß des Körpers hat man nur die ersten Tafelabstände der Ecken zu bestimmen, s. Fig. Genauigkeitsproben!

Setze das in Fig. 102 dargestellte regelmäßige Dodekaeder in schiefe Parallelprojektion für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30^\circ$.

§ 23. Durchdringung zweier Körper, insbesondere ebenflächiger Körper.

1 a) Wenn zwei Körper einander durchschneiden („durchdringen“), so sind zwei Fälle möglich:

I. Der eine durchbohrt den andern (Fig. 109). Man spricht dann von einer Durchbohrung oder vollständigen Durchdringung. Die Schnittfigur der beiderseitigen Oberflächen der Körper, die Durchdringungsfigur, besteht aus zwei getrennten geschlossenen Figuren, bei zwei ebenflächigen Körpern oder Vielflachen aus zwei Raumvierecken.

II. Der eine Körper dringt in den andern ein oder er schneidet aus ihm ein seitliches Stück heraus (Fig. 106). In diesem Falle hat man es mit einer Eindringung oder einer unvollständigen Durchdringung zu tun. Die Durchdringungsfigur wird nur von einer geschlossenen Figur, bei Vielflachen von einem räumlichen Vieleck gebildet.

b) Die Seiten der **Durchdringungsfigur zweier Vielflache** sind die Schnittlinien, in denen sich die begrenzenden Flächen der Körper schneiden, ihre Ecken die Schnittpunkte, in denen die unverlängerten Kanten eines jeden der beiden Körper die Flächen des andern treffen. Dementsprechend kann die Durchdringungsfigur entweder durch Ermittlung der Seiten (Flächenverfahren) oder der Ecken (Kantenverfahren) gefunden werden. Das **Kantenverfahren** ist im allgemeinen das einfachere und wird deshalb in der Regel angewandt. Es besteht darin, daß man die beiderseitigen Schnittpunkte der unverlängerten Kanten eines Vielflachs mit den Flächen des andern bestimmt und die so erhaltenen Eckpunkte der Durchdringungsfigur in richtiger Reihenfolge verbindet. Dabei

ist, da jede Seite der Durchschnitfigur der Schnitt zweier Ebenen ist, die wichtige Regel zu beachten, daß je zwei Eckpunkte dann und nur dann zu verbinden sind, wenn sie in einer und derselben Fläche sowohl des ersten als auch des zweiten Körpers liegen.

Die Bestimmung der Durchdringungsfigur von zwei Vielsflächen kommt also bei der Anwendung des Kantenverfahrens auf die wiederholte Anwendung der schon früher behandelten Aufgabe (§ 14, Aufg. 4) hinaus, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene, die durch ein in ihr liegendes Vieleck gegeben ist, zu finden.

Eine Seite der Durchschnitfigur ist nur dann sichtbar, wenn die beiden Körperflächen, deren Schnitt sie ist, sichtbar sind.

Die Durchdringungsaufgaben spielen eine wichtige Rolle in den praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie, namentlich im Hoch- und Maschinenbau.

2) Der Anschaulichkeit halber beginnen wir mit einigen einfachen Beispielen, von denen die beiden ersten Durchdringungen darstellen, wie sie bei zusammengesetzten Dächern vorkommen.

Aufgabe 1. Die Durchdringung zweier gerader dreiseitiger Prismen, die mit je einer Seitenfläche auf der Grundebene ruhen, zu bestimmen (Fig. 103).

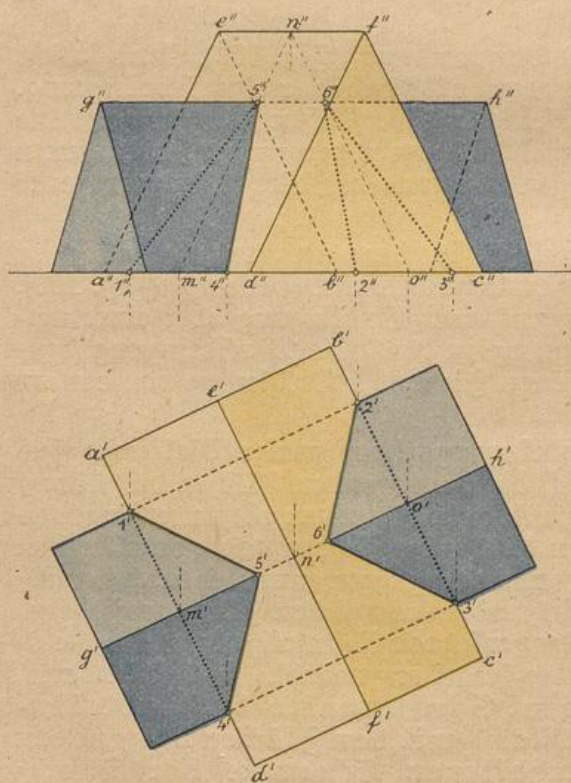


Fig. 103.

Die Punkte $1' 2' 3' 4'$ sind die Grundrisse der Einstoßpunkte der beiderseitigen in der Grundebene liegenden Kanten des einen Prismas in die Seitenflächen des anderen. Ihre Aufrisse liegen auf der Achse. Da die zur Grundebene nicht parallelen Kanten jedes der beiden Körper außerhalb der Projektionen der Flächen des anderen liegen, so brauchen nur noch die oberen Kanten (Firstkanten) untersucht zu werden. Wie der Aufriss zeigt, trifft die Firstkante ef des Prismas II keine Fläche des ersten. Dagegen trifft die Firstkante gh des Prismas I die Seitenflächen $adfe$ und $befe$ von II. Um die Einstoßpunkte zu finden, legen wir durch gh die Lotebene zu B_1 , die den Aufriss der Seitenfläche $adfe$ in

$m'' n''$ und den der Seitenfläche befe in $o'' n''$ schneidet. Die Schnittpunkte $5''$ und $6''$ von $g'' h''$ mit $m'' n''$ und $o'' n''$ sind die gesuchten Einstoßpunkte im Aufriß. Ihre Grundrisse erhalten wir durch Herunterloten. Welches sind die beiden Vielecke der Durchdringungsfigur?

Aufgabe 2. Die Durchdringung eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prismas (I), dessen obere Flächen die Form eines Walmdaches besitzen, mit einem halben regelmäßig achtsseitigen Prisma (II) zu finden. Fig. 104.

Die beiden Prismen ruhen je mit einer Seitenfläche auf der Grundebene. Die Seitenkanten des ersten sind parallel, die des zweiten senkrecht zur Aufrißebene. Die Aufrisse der Seitenkanten des zweiten Prismas schrumpfen daher im Aufriß in Punkte zusammen, z. B. ist a'' der Aufriß der Firstkante $a' b'$. Um ihre Einstoßpunkte in die Seitenflächen von I zu finden, legen wir durch ab am einfachsten eine B_1 parallele Hilfsebene (zweite Lotebene), die die vordere und hintere Seitenfläche von I im Aufriß in den zur Achse parallelen Strecken $m'' n''$ und $m'' n''$, die zusammenfallen, schneidet. Wie findet man daraus die Schnittlinien im Grundriß und daraus die Grundrisse der Einstoßpunkte 9 und 10?

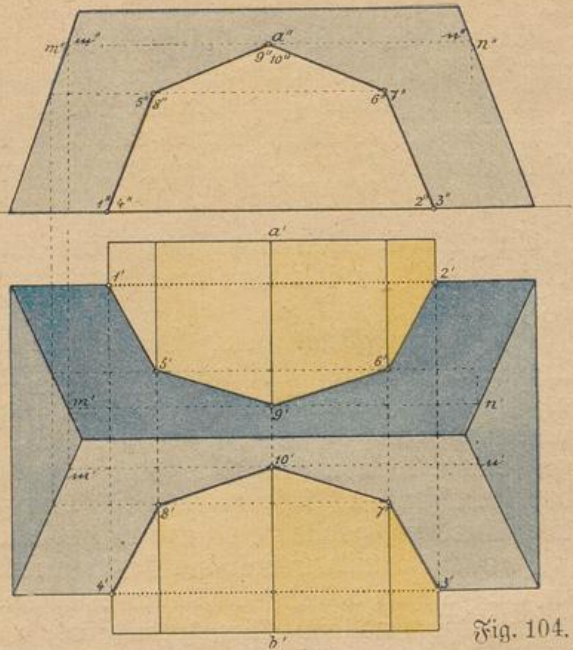


Fig. 104.

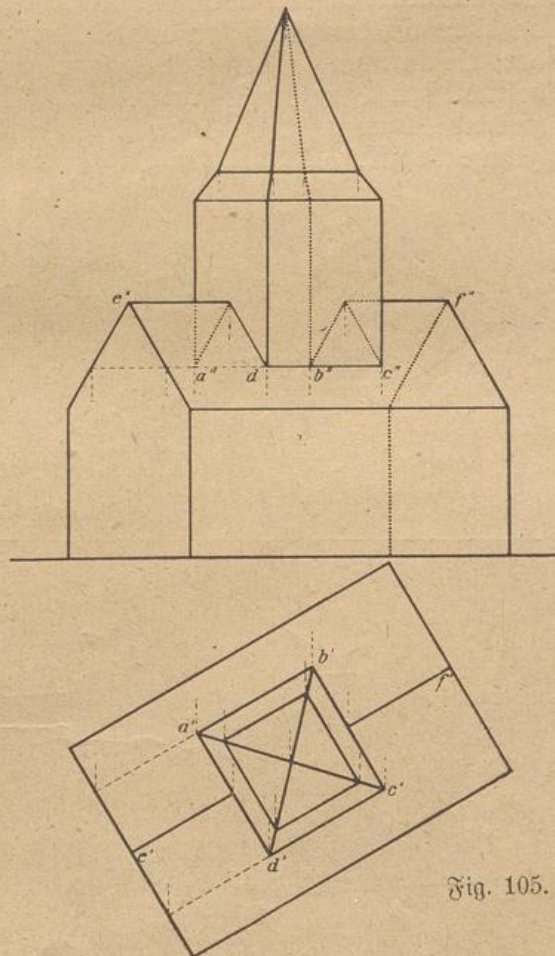


Fig. 105.

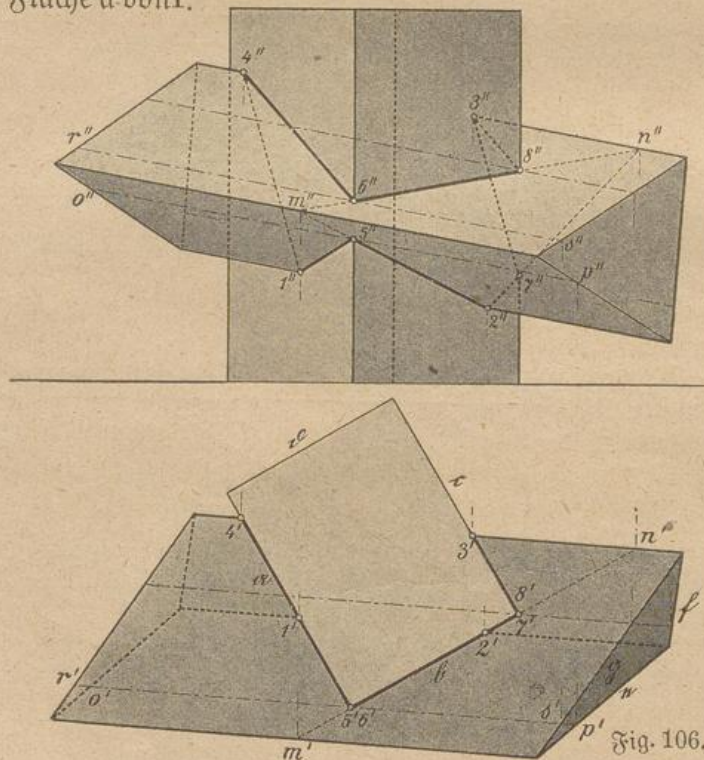
Aufgabe 3. Den Durchschnitt einer prismatischen Dachfläche mit einem quadratischen Turme zu finden (Fig. 105).

Wir benutzen als Hilfsebenen die ersten Lotebenen durch die Grundkanten ab und cd des Turmes und durch die Firstkante ef des Daches. Das Weitere s. Fig. Aus was für Körpern ist der Turmhelm entstanden?

Aufgabe 4. Den Durchschnitt eines auf der Grundebene stehenden Quaders (I) mit einem dreiseitigen Prisma (II) zu bestimmen (Fig. 106).

Um mit möglichst wenig Bezeichnungen auszukommen, hauptsächlich aber um nach Bestimmung der Ecken der Durchdringungsfigur rasch und sicher feststellen zu können, welche Ecken miteinander zu verbinden sind, bezeichnen wir jede Seitenfläche der beiden Körper mit einem kleinen deutschen Buchstaben, den wir an die Grundkante der betreffenden Fläche setzen. Die von zwei Flächen, z. B. a und b des Quaders, gebildete Kante bezeichnen wir dann mit (ab) .

Zunächst ermitteln wir die Einstoßpunkte der Kanten des Prismas in die Flächen des Quaders und erhalten die Punkte 1, 2, 3, 4. Ihre Grundrisse sind die Schnittpunkte der Grundkanten von I mit den Seitenkanten von II in der Grundebene; ihre Aufrisse liegen senkrecht darüber auf den Aufrissen der Seitenkanten von II. Gleichzeitig mit der Bestimmung jeder Ecke tragen wir in einem neben der Figur befindlichen Verzeichnis ein, durch welche Kante und Fläche jede Ecke zustande kommt, z. B. 1 durch Schnitt der Kante $\text{I}(ef)$ von II mit Fläche a von I.



	I	II
1	a	ef
2	b	ef
3	c	fg
4	a	fg
5	ab	e
6	ab	g
7	bc	f
8	bc	g

Fig. 106.

Die Schnittpunkte der Kanten von I, von denen nur die Kanten (ab) und (bc) in Betracht kommen, mit den Flächen von II können auf verschiedene Weise gewonnen werden. Entweder legen wir durch die Grundkante der Fläche b die Lotebene zu V_1 , die II in dem Dreieck mn2 schneidet. Die Schnittpunkte der Seiten dieses Dreiecks im Aufriß mit den Aufrißen der Seitenkanten von I sind die zweiten Projektionen ihrer Einstoßpunkte in II. Oder wir legen durch (ab) und (bc) als Hilfsebenen erste Lotebenen, die zu den Seitenkanten von II parallel sind und daher die Seitenflächen von II in je zwei Seitenlinien schneiden. Die durch die Kante (ab) von I gelegte erste Lotebene schneidet z. B. die Seitenflächen von I in den Seitenlinien op und rs, deren Schnittpunkte mit der Kante (ab) ihre Einstoßpunkte 5 und 6 in das Prisma ergeben.

Die Reihenfolge, in der die konstruierten Ecken der Durchdringungsfigur zu verbinden sind, ist bei der einfachen Lage der gegebenen Körper leicht zu übersehen. Sichere Auskunft gibt in allen Fällen die in dem Verzeichnis gegebene Übersicht über die Entstehung der einzelnen Ecken. Aus ihr geht hervor, daß nach der unter 1b) angegebenen Regel die Reihenfolge der zu verbindenden Punkte, wenn man von 1 ausgeht, 1 4 6 8 3 7 2 5 lautet. Da bei dem in der Regel angegebenen Verfahren kein Punkt übriggeblieben ist, folgt ohne weiteres, daß nur eine Schnittfigur vorhanden ist.

3) Bei Durchdringungen von Prismen und Pyramiden, die mit einer Grundfläche in der ersten Bildebene liegen, kann die Ermittlung der Schnittfigur dadurch bedeutend vereinfacht werden, daß man statt der Lotebenen eine Reihe von Hilfsebenen benutzt, deren Schnittlinien mit den Flächen der Körper möglichst einfache sind. Das sind

1. bei zwei Pyramiden Ebenen, die durch beide Spitzen gehen;
2. bei Pyramide und Prisma Ebenen, die durch die Spitze der Pyramide parallel zu Seitenkanten des Prismas gelegt sind;
3. bei zwei Prismen Ebenen, die parallel den beiden Seitenkanten sind.

Diese Hilfsebenen, die durch die Seitenkanten jedes Körpers gelegt werden, schneiden die Flächen des anderen in Erzeugenden¹⁾ (Seitenlinien), deren Schnittpunkte mit den zugehörigen Kanten Punkte der Durchdringungsfigur sind.

Zum leichteren Verständnis dieser praktisch sehr wichtigen Durchdringungsaufgaben lösen wir erst die folgenden beiden vorbereitenden Aufgaben.

Aufgabe 5. Den Schnitt einer Geraden g mit einer auf der Grundebene stehenden Pyramide zu bestimmen (Fig. 107a und b).

Der Anschaulichkeit halber gehen wir von dem Schrägbilde Fig. 107a aus. Die durch die Spitze S und die Gerade g gelegte Hilfsebene H

¹⁾ Das sind Linien, durch die wir uns die Mantelfläche erzeugt denken können!

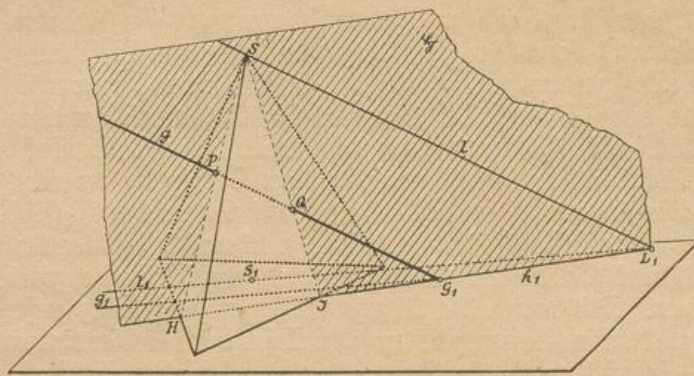


Fig. 107 a.

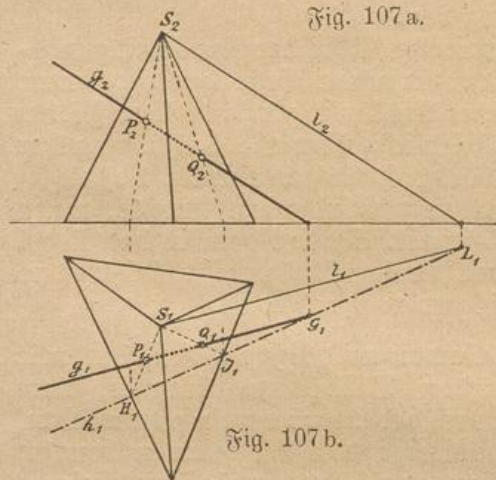


Fig. 107 b.

schneidet die Pyramide in den Seitenlinien SH und SI, deren Schnittpunkte mit g, P und Q die gesuchten Einstoßpunkte von g in den Körper sind. Die Punkte H und I sind die Schnittpunkte der

ersten Spur h_1 von g mit den Grundkanten der Pyramide, so daß unsere Aufgabe nur darauf hinausläuft, die erste Spur h_1 von g zu finden. Zunächst muß h_1 durch den ersten Spurpunkt G_1 von g hindurchgehen. Ziehen wir durch S zu g die Parallele l, so liegt l in g und daher auch der erste Spurpunkt L_1 von l auf h_1 . Die durch L_1G_1 gezogene Gerade ist die gesuchte erste Spur von g .

Löse danach die Aufgabe in gerader Parallelprojektion (Fig. 107 b).

Aufgabe 6. Den Schnitt einer Geraden g mit einem Prisma zu bestimmen.

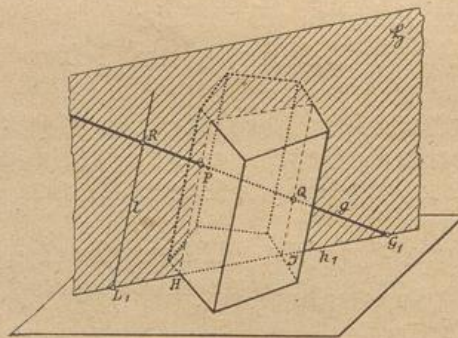


Fig. 108.

Wir legen (s. Schrägbild Fig. 108) durch g die Hilfsebene g parallel den Seitenkanten des Prismas. Ihre erste Spur h_1 , deren wir nur zur Zeichnung bedürfen, finden wir dadurch, daß wir durch einen beliebigen Punkt R von g die Parallele l zu den Seitenkanten des Prismas ziehen, deren erster Spurpunkt L_1 ist. Die durch L_1 und G_1 bestimmte Gerade ist h_1 . Wie erhalten wir nun die Einstoßpunkte P und Q?

Lösung der Aufgabe in gerader Parallelprojektion!

Aufgabe 7. Die Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma zu finden (Fig. 109).

Die Körper stehen mit einer Grundfläche auf der ersten Bildebene.
Lösung im Anschluß an die Aufg. 5 und 6.

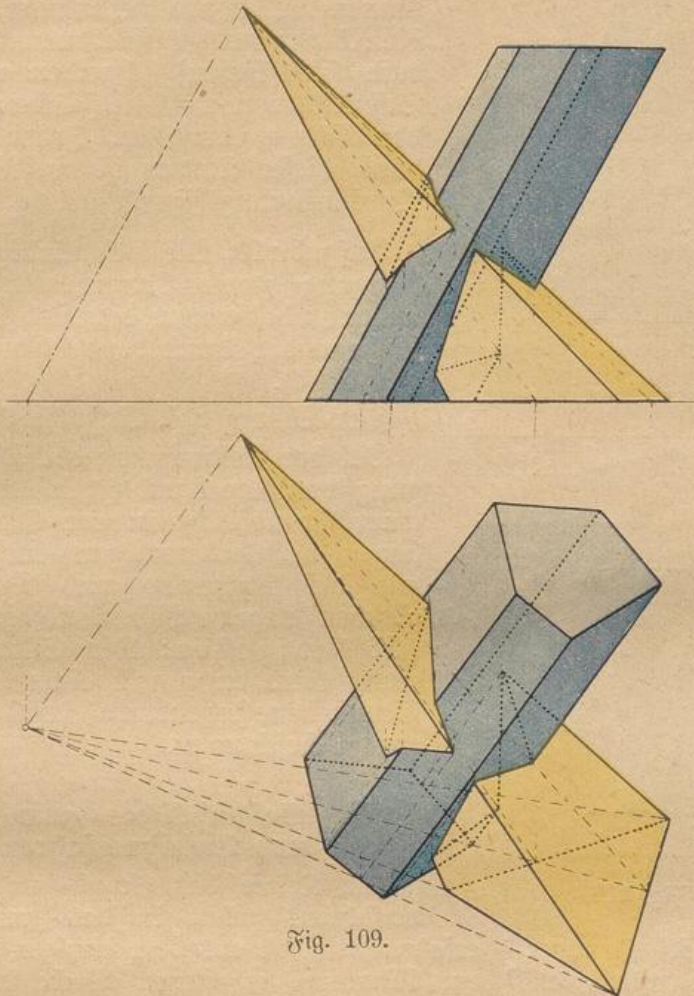


Fig. 109.

Aufgabe 8. Die Durchdringung zweier Prismen, die eine Grundfläche in der ersten Bildebene haben, zu bestimmen.

Die Hilfsebenen haben parallele Spuren! Lösung im Anschluß an Aufg. 6.

Aufgabe 9. Die Durchdringung zweier Pyramiden zu finden.

Wir lösen die Aufgabe für eine quadratische und eine regelmäßige achteitige Pyramide, deren Achsen zusammenfallen und die sich so durchdringen, daß ihre Seitenflächen die Dachflächen eines gotischen Turmhelms bilden. Ihre Grundflächen sind parallel B_1 . Lösung s. Fig. 110. Was ist in der Zeichnung noch hinzugefügt? Zu welchem Zwecke?

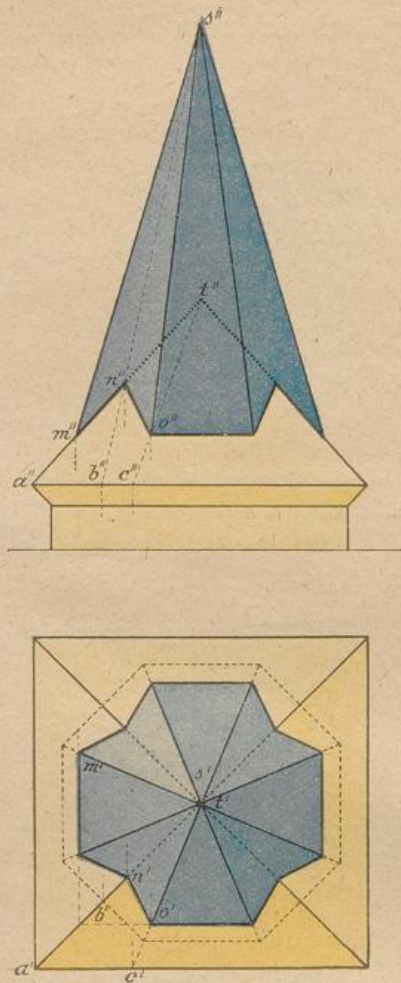


Fig. 110.

4) Die Durchdringungsfigur zweier krummflächiger Körper besteht aus einer oder mehreren Kurven. Einzelne Punkte können wir dadurch bestimmen, daß wir die Körper durch Hilfsebenen (oder andere Hilfsflächen) schneiden und ihre Schnittkurven mit den Flächen der beiden Körper ermitteln. Jeder Schnittpunkt dieser Kurven ist ein Punkt der Durchdringungsfigur.

Aufgabe 10. Die rechtwinklige Durchdringung zweier kongruenter Halbzylinder zu bestimmen, die mit der Schnittfläche auf der Grundebene ruhen (Kreuzgewölbe).

Zur Lösung vgl. Aufgabe 2.

Bei der Bestimmung der Durchdringung von Kegel und Zylinder, die mit einer Grundfläche in der Grundebene liegen, verfährt man ganz entsprechend wie bei Pyramide und Prisma in gleicher Lage. Löse erst die beiden Hilfsaufgaben: Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem auf der Grundebene stehenden a) Kegel, b) Prisma zu bestimmen.

§ 24. Geschichtliches zum Grund- und Aufrißverfahren.

Die Keime des Grund- und Aufrißverfahrens gehen in das graue Altertum zurück. Genauer erfahren wir erst aus dem einzigen uns über diesen Gegenstand aus dem Altertume erhaltenen Buche des römischen Baumeisters Vitruvius Pollio, „De architectura“, das dem Kaiser Augustus gewidmet ist. In diesem z. T. nach griechischen Quellen bearbeiteten Werke spricht er von Grund- und Aufriß unter dem Namen „Ichnographie und Orthographie“.¹⁾

Die einfachen Regeln dieser Kunst wurden in der Praxis von Geschlecht zu Geschlecht vererbt und gelangten in den Bauhütten des Mittelalters, besonders in Anwendung auf den Steinschnitt, zu hoher Blüte. Kein Geringerer als Albrecht Dürer hat in seinem klassischen Büchlein „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheit“ (Münchberg, 1525 und 1538) die Regeln der mittelalterlichen Rißkunst zusammengestellt.

Auch später bildete noch das wichtigste Anwendungsgebiet der „Rißkunst“

¹⁾ Der erste Teil des Wortes stammt von ichnos (griech.) Spur, Fußtritt. Vgl. das deutsche Wort „Riß“!