



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 25. Allgemeines. Hauptsätze über Schatten von Strecken bei
Parallelbeleuchtung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83258](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83258)

der Steinschnitt¹⁾ Aufgaben über ihn behandelten Desjargues, 1593—1662 (*Coupe des pierres*, 1640) und Frézier, 1682—1772 (*La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois*, Straßburg 1738/39). Dieser benutzt Grund- und Aufriß und behandelt besonders Durchdringungen und Abwicklungen.

Dennoch blieb die wissenschaftliche Begründung und Entwicklung des Verfahrens dem großen französischen Geometer G. Monge (*Géométrie descriptive*, Paris 1798) vorbehalten. Dadurch, daß er die Schnittgerade der beiden Bildtafeln als Achse benutzte und um sie die eine in die andere umlegte, setzte er Grund- und Aufriß in eine feste Beziehung. Punkte, Gerade und Ebenen, ferner gekrümmte Linien und Flächen stellte er durch ihre Projektionen oder Spuren dar und hat durch die Behandlung von Aufgaben die Hauptverfahren der darstellenden Geometrie begründet und vollständig entwickelt. Vgl. § 1.

Anmerkung. In dem oben erwähnten Büchlein von Dürer findet man z. B. die Kegelschnitte, Schraubenlinien, Körper wie Dodekaeder, Ikosaeder in Grund- und Aufriß nebst Abwicklung so dargestellt, wie man sie nicht anders in einem guten neueren Buch erwarten kann. Um das überaus lehrreiche Buch weiteren Kreisen zugänglich zu machen, hat der Maler Hans Thom eine Neuherausgabe im Verlage der süddeutschen Monatshefte veranlaßt und sie mit einem Vorwort versehen unter dem Titel „Albrecht Dürers Unterweisung der Messung um einiges gekürzt und dem neueren Sprachgebrauch angepaßt“, herausgeg. von Alfred Pelzer.

Dritter Abschnitt.

Schattenbestimmung der Parallelprojektion.

§ 25. Allgemeines. Hauptsätze über Schatten von Strecken bei Parallelbeleuchtung.

1a) Von einer Zeichnung fordern wir mit Recht, daß sie eine deutliche Vorstellung von dem abgebildeten Gegenstande bei dem Beschauer hervorrufe. Durch die bisherigen Darstellungen, die bloße Linearzeichnungen (Name!) sind, wird das nicht immer erreicht. Dagegen lassen sich Lage und Gestalt eines Körpers aus seiner Darstellung leichter erkennen und der gezeichnete Körper besser anschaulich auffassen, wenn wir ihn uns beleuchtet denken und die Schatten, die er auf die Bildebene oder auf einen anderen Körper wirft, in die Zeichnung mit aufnehmen.

¹⁾ Die Kunst des Steinschnitts ist uralte. 1. Kön. 6, 7 heißt es vom Tempelbau Salomos: „Und da das Haus gesetzt ward, waren die Steine zuvor ganz zugerichtet, daß man keinen Hammer, noch Beil, noch irgend ein eisern Werkzeug im Bauen hörte.“

b) Um die Schattenbestimmung möglichst einfach zu gestalten, nehmen wir die Lichtquelle als punktförmig an.

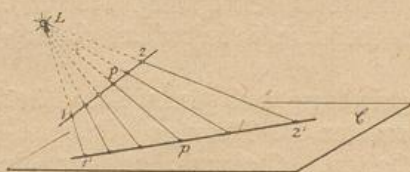


Fig. 111.

Ist Fig. 111 L eine solche Lichtquelle und P ein materieller Punkt, so wird durch ihn die Wirkung des Lichtstrahles LP in seiner Verlängerung aufgehoben, so daß hinter ihm ein geradliniger Schattenraum entsteht, den wir als den vom Punkte P geworfenen **Schattenstrahl** bezeichnen.

Trifft dieser eine hinter P befindliche Auffangfläche, z. B. die Ebene E, im Punkte p, so ist an dieser Stelle kein Licht vorhanden. Der Punkt p heißt der **Schlagschatten** des Punktes P.

Man findet also den Schlagschatten eines Punktes P auf eine Fläche E, indem man den durch P gehenden Lichtstrahl mit E zum Schnitt bringt.

Eine **Gerade** 12 (Fig. 111), die wir uns materiell denken müssen (dünner Stab, Draht), wirft hinter sich einen ebenenformigen Schatten, die **Schattenebene**. Der Schlagschatten, 1'2', den die Gerade auf die Ebene E wirft, ist daher im allgemeinen eine Gerade. In welchem Falle ist er nur ein Punkt?

Bei einem undurchsichtigen **Körper** (Fig. 112) erscheint der der Lichtquelle zugewandte Teil (1234) der Oberfläche erleuchtet. Der dem Lichte abgewandte Teil befindet sich im Schatten, er liegt, wie man sagt, im **Selbst- oder Eigenschatten**.

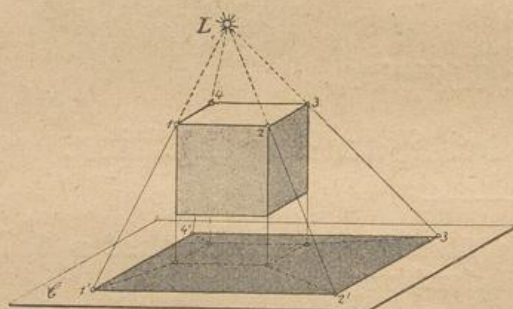


Fig. 112.

Die Grenze zwischen dem beleuchteten Teil und dem Eigenschatten heißt die **Schattengrenze** (1234). Diese kann man sich dadurch erhalten denken, daß man einen Lichtstrahl an dem Körper entlanggleiten läßt, so daß er die Oberfläche

dauernd streift. Dabei beschreibt der Lichtstrahl eine Pyramidenfläche oder, wenn es sich um einen krummflächigen Körper handelt, eine Kegelfläche. Innerhalb des von diesen Flächen begrenzten Raumes liegen sämtliche Strahlen, die den Körper beleuchten. Eine hinter dem Körper befindliche Ebene E wird von diesen Strahlen nicht getroffen. Das unbeleuchtete Stück (1'2'3'4') der Ebene E ist der **Schlagschatten des Körpers**.

Der Umriß des Schlagschattens eines Körpers ergibt sich demnach als der Schlagschatten seiner Schattengrenze.

c) Denken wir uns die Lichtstrahlen parallel (Parallelbeleuchtung), so geht die den Körper streifende Strahlenpyramide (Strahlenkegel)

in ein Strahlenprisma (Strahlencylinder) über. Der Umriß des Schlagschattens eines Körpers auf eine Ebene E ist dann nichts anderes als die Parallelprojektion seiner Schattengrenze auf E .

2) Im folgenden werden wir uns nur mit **Parallelbeleuchtung** beschäftigen, indem wir als Lichtquelle die Sonne betrachten, deren Strahlen wir wegen ihrer gewaltigen Entfernung von der Erde als parallel ansehen können. Dabei sind die Schlagschatten einfache Parallelprojektionen,¹⁾ wobei die Projektionsstrahlen der Lichtrichtung parallel sind. Die Schattenbestimmung gründet sich auf die folgenden **Hauptsätze**:

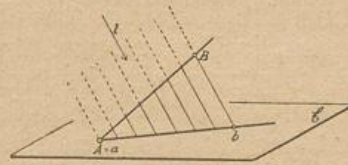


Fig. 113.

I. Der Schlagschatten einer Geraden auf eine Ebene geht durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene (Fig. 113).

II. Der Schlagschatten einer Strecke auf eine zu ihr parallele Ebene ist zur Strecke parallel und hat die gleiche Länge (Beweis!).

III. Der Schlagschatten einer lotrechten Strecke auf eine wagerechte Ebene ist parallel der senkrechten Projektion der Lichtrichtung auf die Ebene.

Bezeichnet l (Fig. 114) die Richtung der Lichtstrahlen, so erhalten wir den Schlagschatten A_1a der zu E lotrechten Strecke AA_1 , indem wir durch A zu l die Parallele ziehen, die E in a trifft, und a mit A_1 verbinden. A_1a ist die senkrechte Projektion der Strecke Aa . Um die senkrechte Projektion P_1p der Richtungslinie l der Lichtstrahlen zu bestimmen, fällen wir von einem beliebigen Punkte P von l auf E das Lot PP_1 , verlängern l bis zum Schnittpunkte p mit E und ziehen P_1p . Da $AA_1 \parallel PP_1$ und $Aa \parallel Pp$ ist, so sind die Ebenen der beiden Dreiecke AA_1a und PP_1p parallel (Z. I. § 69, 2). Daher ist $A_1a \parallel P_1p$ (§ 70, 1).

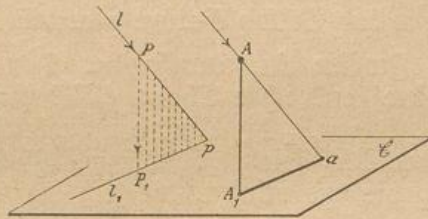


Fig. 114.

Daraus ergibt sich weiter, daß die Schlagschatten aller Lotstrecken der Aufangebene auf diese untereinander parallel sind. Das gilt auch allgemein für parallele Strecken von beliebiger Lage zur Aufangebene.

IV. Parallele Strecken werfen auf eine Ebene parallele Schatten und bilden mit ihren Schattenlängen das gleiche Verhältnis (Beweis!).

¹⁾ Die früher für die Parallelprojektion abgeleiteten Sätze (s. § 3) gelten in entsprechender Abänderung daher auch für unsere Schattenkonstruktionen.