Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

II.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

ABCs_1 stellt dann den Schlagschatten auf die Grundebene dar, der aber nur bis zur Achse auf G zur Wirkung kommt. Den auf B entfallenden Teil des Schattens erhält man, wenn man den Schatten s_2 der Spitze S auf B mit den „Knickpunkten" 1 und 2 der Schatten der Seitenkanten SA und SC verbindet. Schattengrenze?

II.

§ 27. Schattenbestimmung der geraden Parallelprojektion.

1) Bei den Darstellungen in gerader Parallelprojektion pflegt man eine ganz bestimmte Lichtstrahlenrichtung zu wählen, die erfahrungsgemäß eine sehr günstig wirkende Beleuchtung gibt. Und zwar nimmt man die Richtung der Lichtstrahlen so an, daß sie von links oben und vorn nach rechts unten parallel der Richtung der Diagonale eines Würfels verlaufen, von dem drei Kanten mit den Bildachsen zusammenfallen (s. Fig. 116). **Die Projektionen l_1 und l_2** (Fig. 118) **der Lichtstrahlenrichtung l bilden dann mit der x-Achse je einen Winkel von 45°.**

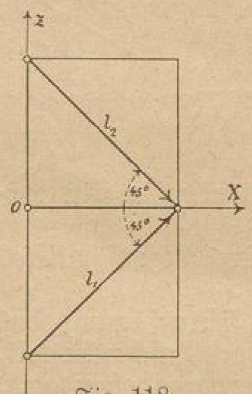

Fig. 118.

Grundaufgabe. Den Schlagschatten zu bestimmen, den ein durch seine Projektionen gegebener Punkt P auf die Bildebene wirft (Fig. 119).

Der Schlagschatten ist der erste oder zweite Spurpunkt des durch den Punkt P gehenden Lichtstrahles, dessen Projektionen mit der x-Achse je einen Winkel von 45° einschließen. Der erste Spurpunkt p_1 kommt als Schattenpunkt nicht in Betracht, da der Schattenstrahl zuerst die zweite Projektionsebene (die wir als undurchsichtig annehmen) trifft.

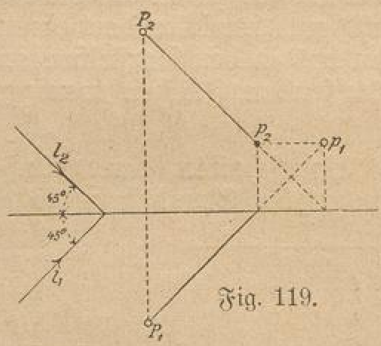

Fig. 119.

Wann fällt der Schlagschatten eines Punktes a) auf die Achse, b) auf die erste, c) auf die zweite Bildebene?

Übungsaufgaben: Bestimme den Schlagschatten eines Punktes P a) auf eine beliebige Ebene $E = (e_1, e_2)$, b) auf eine ebene Figur, c) auf eine Pyramide (Kegelfläche), d) auf ein Prisma (eine Zylinderfläche). Vgl. § 23, Aufg. 5 u. 6.

2) Schlagschatten gerader Linien und ebener Figuren.

Aufgabe 1. Den Schlagschatten einer Strecke AB zu bestimmen (Fig. 120).

Wir bestimmen die Schlagschatten a_1b_1 und a_2b_2 der Strecke AB auf die erste und zweite Bildebene. Die Schattenstrecken schneiden sich im Punkte k auf der x-Achse. Von ihnen kommen als wirkliche Schatten nur die in B_1 gelegene Strecke b_1k und die in B_2 gelegene ka_2 zur Geltung. Die gebrochene Linie b_1ka_2 ist der gesuchte Schlagschatten mit dem „Knickpunkte" k.

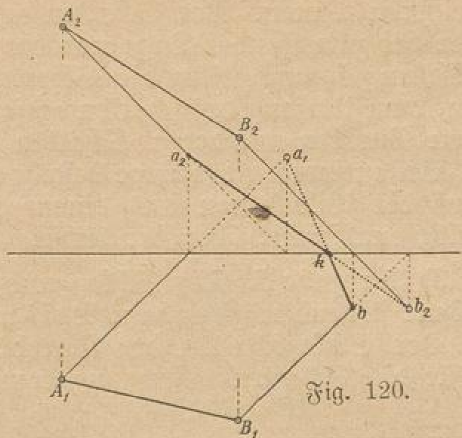

Fig. 120.

Die Schatten müssen sich auf der Achse schneiden, da sie die Spuren der Lichtebene durch AB sind. Bestimme den Punkt der Strecke AB, dessen Schattenbild der Knickpunkt ist!

Aufgabe 2. Den Schlagschatten a) eines durch seine Projektionen gegebenen Rechtecks ABCD, das parallel B_1 ist, b) eines durchbrochenen Rechtecks (vgl. Türrahmen), das B_2 parallel ist, zu zeichnen.

Lösung zu b) s. Fig. 121.

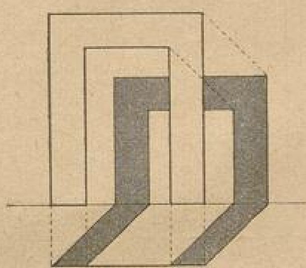
Fig. 121.

Aufgabe 3. Den Schlagschatten eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen (Fig. 122).

Wir ermitteln die Schlagschatten der Dreiecksseiten nach Aufg. 1 und gewinnen dadurch die Begrenzungslinien des gesuchten Schlagschattens des Dreiecks ABC. $\triangle\, a_1 b_1 c_1$ ist der Schlagschatten auf B_1, $\triangle\, a_2 b_2 c_2$ der auf B_2. Von dem ersten kommt nur der vor der Achse, von dem letzten nur der über der Achse gelegene Teil als Schatten zur Geltung.

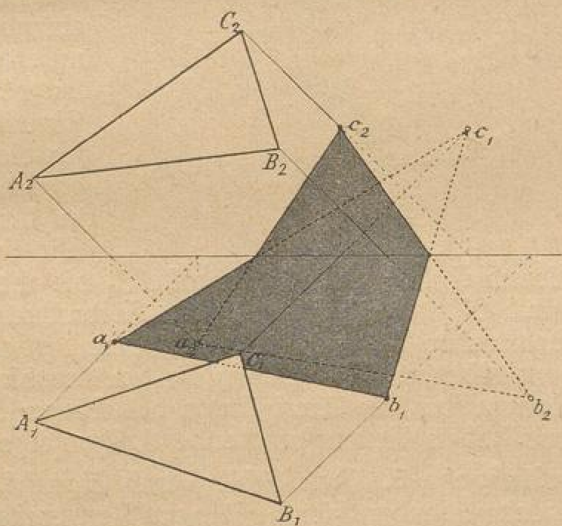

Fig. 122.

Den **Schlagschatten einer Kurve** finden wir, indem wir die Schatten einer hinreichend großen Zahl ihrer Punkte bestimmen und diese durch einen stetigen Kurvenzug verbinden.

Aufgabe 4. Den Schlagschatten einer B_1 parallelen Kreisfläche mit dem Mittelpunkte M zu zeichnen.

Der Schatten auf B_1 ist ein dem gegebenen Kreis kongruenter Kreis, den wir nach Ermittlung des Schlagschattens von M sofort zeichnen können. Der Schatten auf $\mathfrak{B}_2$ dagegen ist eine Ellipse, von der bei zutreffender Lage nur der über der Achse gelegene Teil zur Wirkung kommt. Um die Schattenellipse zu erhalten, nehmen wir auf dem Umfang des schattenwerfenden Kreises eine beliebige Anzahl von Punkten an, deren Schatten auf $\mathfrak{B}_2$ wir bestimmen.

Bei entsprechender Lage besteht also der Schlagschatten des Kreises auf die Bildebenen aus einem Kreisabschnitt unter und einem Ellipsenabschnitt über der Achse.

3) **Aufgabe 5.** Den Schlag- und Selbstschatten eines auf der Grundebene stehenden geraden Prismas zu bestimmen (Fig. 123).

Der Schlagschatten der Grundfläche fällt mit dieser zusammen. Für die Schattenbestimmung kommen daher nur die Seitenkanten und die Deckfläche in Betracht, wobei jedoch der in voller Beleuchtung liegende Eckpunkt 6 samt den von ihm ausgehenden Kanten nicht verwendet zu werden braucht. Die Grenze zwischen dem beleuchteten und dem im Eigenschatten liegenden Teile der Oberfläche, die sog. Schattengrenze, bilden die Kanten, längs derer eine zur Lichtstrahlenrichtung parallel bewegte Gerade den Körper bloß streift, ohne in ihn einzudringen (Schrägbild!). Bei unserem Prisma besteht die Schattengrenze aus dem geschlossenen Linienzuge 1 2 7 8 9 10 5 1. Wichtig für die Ermittlung der Schattengrenze ist hier die Bestimmung der zu ihr gehörenden Seitenkanten. Wir finden sie, indem wir an den Grundriß des Prismas parallel l_1 die Streifstrahlen ziehen, die hier durch 2′ und 5′ gehen. Die Seitenkanten 2 7 und 5 10 samt den Deckkanten 7 8, 8 9, 9 10 gehören deshalb zur Schattengrenze auf dem Körper. Die Schlagschatten der die Schattengrenze bildenden Kanten sind die Umrißlinien des Körperschattens auf den Bildebenen und haben die entsprechende Reihenfolge.

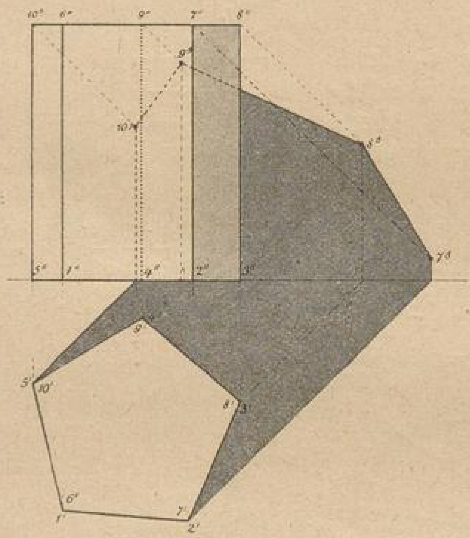

Fig. 123.

Aufgabe 6. Den Schlag- und Eigenschatten einer auf der Grundebene stehenden fünfseitigen Pyramide zu bestimmen (vgl. § 26, Aufg. 2).

Aufgabe 7. Den Schlag- und Eigenschatten eines geraden Kreiskegels, dessen Grundfläche in $\mathfrak{B}_1$ liegt, zu zeichnen (Fig. 124).

Wir ermitteln zunächst die Schlagschatten s_1 und s_2 der Kegelspitze S auf $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Die von s_1 an den Grundkreis gezogenen Tangenten s_1A_1 und s_1B_1 bilden die seitlichen Grenzen des Schattens auf $\mathfrak{B}_1$, von dem nur der vor der Achse liegende Teil zur Geltung kommt.

Der auf $\mathfrak{B}_2$ entfallende Teil des Schlagschattens besteht aus dem Dreieck $s_2 m n$. Die Grenzlinien $A_1 m$ und $B_1 n$ sind die Grundrißspuren der von den streifenden Lichtstrahlen gebildeten Lichtebene, die den Kegel in den Mantellinien AS und BS berühren. AS und BS bilden die Schattengrenze auf dem Kegelmantel.

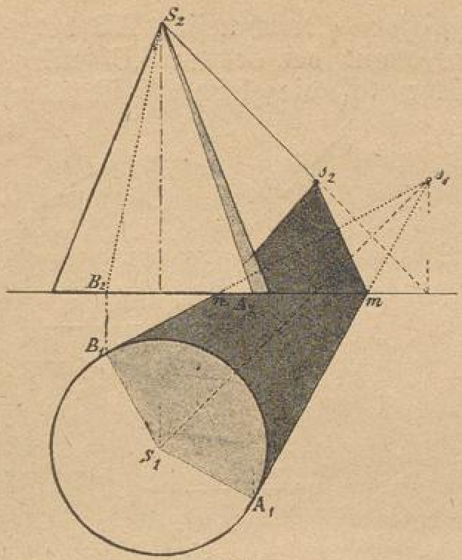

Fig. 124.

Aufgabe 8. Den Schlag- und Eigenschatten eines auf der Grundrißebene stehenden Kreiszylinders zu zeichnen.

Aufgabe 9. Den Schlag- und Eigenschatten einer auf der Grundebene ruhenden Kugel zu bestimmen (Fig. 125).

Um die Aufgabe einfach und anschaulich zu lösen, nehmen wir eine zu $\mathfrak{B}_1$ senkrechte, den Lichtstrahlen parallele dritte Bildebene zu Hilfe. Auf diese Hilfsebene projizieren wir die gegebene Kugel K und legen sie dann um ihre erste Spur e_1 in die erste Bildebene um. Der durch den Mittelpunkt K gehende Lichtstrahl l trifft $\mathfrak{B}_1$ in dem Spurpunkte k_1 (Konstruktion!), der zugleich als Schlagschatten von K zu betrachten ist. Der Winkel $K k_1 K_1 = \alpha$ ist dann der Neigungswinkel, unter dem die Lichtstrahlen $\mathfrak{B}_1$ treffen. Seine wahre Größe ergibt sich unmittelbar aus der dritten Projektion des rechtwinkligen Dreiecks $K k_1 K_1$.

Sämtliche die Kugel berührenden Lichtstrahlen bilden eine Zylinderfläche, die die Kugel in einem Hauptkreise berührt. Die Ebene dieses Kreises, der die Schattengrenze auf dem Körper darstellt, ist senkrecht zu den Lichtstrahlen und projiziert sich daher auf die Hilfsebene als Durchmesser A_3B_3, der zu der dritten Projektion l_3 des durch K gehenden Lichtstrahls l senkrecht ist. Aus der dritten Projektion A_3B_3 des Grenzkreises gewinnen wir genau wie sonst aus dem Aufriß die Ellipse $A_1C_1B_1D_1$ mit den Hauptachsen A_1B_1 und C_1D_1 als seine erste Projektion. Die beiden zueinander senkrechten Kreisdurchmesser AB und CD erscheinen auch im Grundriß in senkrechter Lage (Grund? §18, 2. S.). Die zweite Projektion der Schattengrenze erhalten wir durch Hinaufloten beliebig vieler Punkte des Grundrisses, wobei zu beachten ist, daß der zweite Bildabstand eines Punktes (z. B. von A) unmittelbar aus der Hilfsebene entnommen werden kann ($A_2A_x = A_3A_e$).

Die Schlagschatten des Grenzkreises sind in beiden Bildebenen Ellipsen, von denen in $\mathfrak{B}_1$ nur der vor und in $\mathfrak{B}_2$ der über der Achse gelegene Abschnitt zur Geltung kommt. Der Mittelpunkt der Grundrißellipse ist der schon zuvor bestimmte Punkt k_1. Der Schlagschatten

$(a_1 b_1)$ des Durchmessers AB des Grenzkreises bildet für sie die Hauptachse und der des zu AB senkrechten Durchmessers CD die Nebenachse $c_1 d_1$, die gleich CD ist (Grund?). Wie können die Achsen sofort

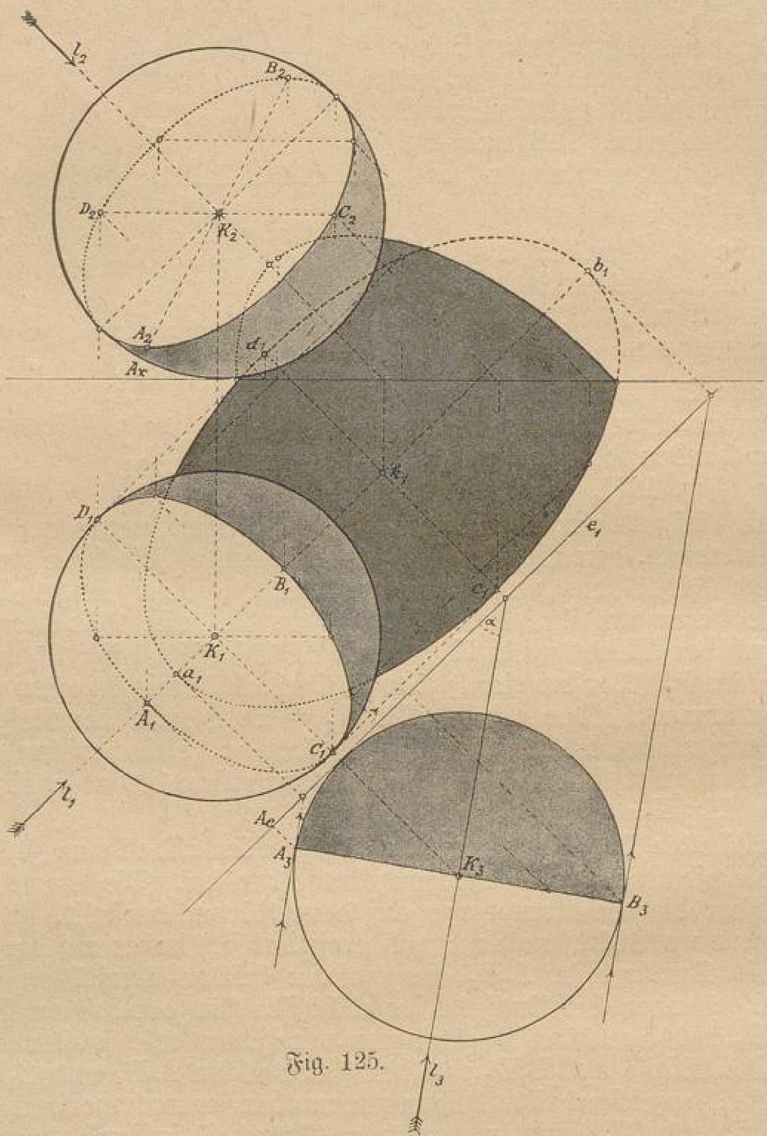

Fig. 125.

mit Hilfe der dritten Projektion der durch AB und K gelegten Lichtstrahlen bestimmt werden? Den Schlagschatten auf $\mathfrak{P}_2$ ermitteln wir endlich dadurch, daß wir die Schlagschatten einer Anzahl von Punkten des Grenzkreises auf $\mathfrak{P}_2$ bestimmen. Von der Schattenellipse auf $\mathfrak{P}_2$ ist in der Figur nur der zur Geltung kommende Abschnitt gezeichnet.