Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

Zweiter Abschnitt. Das Fluchtpunktverfahren (freie Perspektive).

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

seinen Aufriß $A_2 1''$ hinaufzuloten und findet damit den Bildpunkt 1. Wie ergeben sich die weiteren Bilder der Ecken des Würfels?

Zur Erleichterung der Übersicht zeichne man die gegebenen Risse und die der Sehstrahlen in verschiedenen Farben.

Aufgabe 2. Die Perspektive eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Würfels in schräger Ansicht zu zeichnen.

Übungsaufgaben. Zeichne ebenso das perspektivische Bild 1) eines Quaders in schräger Ansicht, 2) eines regelmäßig-sechsseitigen Prismas, 3) eines auf einem quaderförmigen Sockel stehenden Kreuzes, 4) einer aus vier Stufen bestehenden einfachen Treppe, 5) eines Kreiszylinders, der auf einer zylindrischen Platte steht, wenn Grund- und Aufriß gegeben sind.

2) Das in 1) angegebene Schnittverfahren zur Bestimmung des perspektivischen Bildes ist eine einfache Anwendung der von der senkrechten Projektion her bekannten Lehren. Da es jedoch lediglich darin besteht, durch Ermittlung der erforderlichen Sehstrahlen mit der Bildfläche gewissermaßen mechanisch das Bild zusammenzusetzen, so vermag es keinen Einblick in die Eigentümlichkeiten der perspektivischen Gesetze zu geben, deren Kenntnis aber für die einfache und schnelle Herstellung perspektivischer Bilder und die Beurteilung ihrer Richtigkeit unbedingt erforderlich ist.

Zweiter Abschnitt.

Das Fluchtpunktverfahren (Freie Perspektive).

§ 30. Hauptsätze der Perspektive.

1) Von den zur Bildfläche parallelen Geraden, die wir als **frontale Linien** oder **Frontlinien** bezeichnen, sind zwei Arten besonders wichtig, die **Breitenlinien,** die parallel der Grundlinie X_1X_2 verlaufen, und die **Höhenlinien,** die zur Grundebene senkrecht sind. Für diese gilt der wichtige Satz:

I. **Breiten- und Höhenlinien erscheinen auch im Bilde als Breiten- und Höhenlinien. Abschnitte auf einer solchen Linie werden im gleichen Verhältnis verkürzt.** (Fig. 128.)

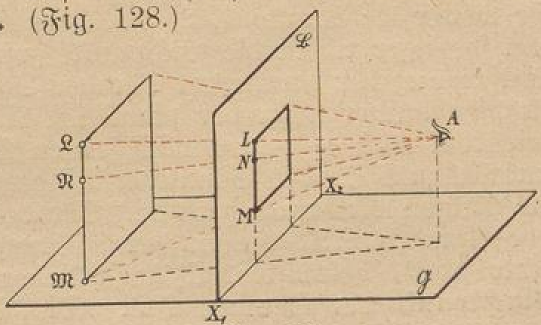


Fig. 128.

Denn werden vom Augpunkt A z. B. nach sämtlichen Punkten der Höhenlinie 𝔏𝔐 die Sehstrahlen gezogen, so ist die Schnittlinie LM der von ihnen gebildeten Sehstrahlenebene mit der Bildfläche das Bild von 𝔏𝔐 und nach L. I. § 71, 1 parallel 𝔏𝔐. Da 𝔏𝔐 senkrecht zur

Grundebene $\mathfrak{G}$ ist, so muß auch LM senkrecht zu $\mathfrak{G}$ und damit auch senkrecht zur Achse sein.

Die Abschnitte $\mathfrak{LN}$ und $\mathfrak{NM}$ auf $\mathfrak{LM}$ verkürzen sich in gleichem Maße. Denn es ist $LN : \mathfrak{LN} = NM : \mathfrak{NM}$.

So bilden sich die wag- und lotrechten Linien eines Hauses (die wag- und lotrechten Stangen eines Zaunes) auf eine zu seiner Front parallele Fensterscheibe oder photographische Platte wieder als solche ab.

Satz I ist ein besonderer Fall des folgenden, der für beliebige Frontlinien gilt.

II. **Frontale Linien bilden sich parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung und damit auch untereinander parallel ab. Abschnitte auf einer Frontlinie erfahren im Bilde die gleiche Verkürzung.** Beweis!

III. **Eine frontale ebene Figur hat ein ihr ähnliches Bild.** Beweis! (Vgl. Fig. 128.)

Ein frontales Quadrat oder ein frontaler Kreis erscheint auch im Bilde wieder als Quadrat oder Kreis.

2 a) Es sei $\mathfrak{ST}$ (Fig. 129) eine beliebige Gerade, von der wir nur den hinter $\mathfrak{B}$ gelegenen Teil betrachten. Das Bild S ihres Schnittpunktes $\mathfrak{S}$ mit der Bildfläche, den wir als den **Spurpunkt** der Geraden bezeichnen, fällt mit diesem zusammen. Nehmen wir auf $\mathfrak{ST}$ eine Anzahl von Punkten, 1, 2, 3 . . . in gleichen Abständen an und ziehen die zugehörigen Sehstrahlen, so liegen ihre Bildpunkte auf einer Geraden, der Schnittlinie der Sehstrahlenebene mit $\mathfrak{B}$.

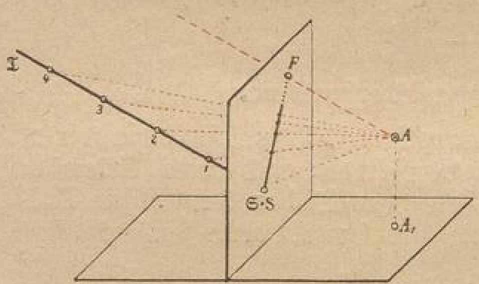


Fig. 129.

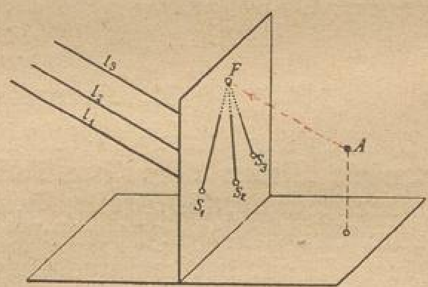


Fig. 130.

Je weiter die Punkte 1, 2, 3 . . . der Geraden von $\mathfrak{B}$ entfernt sind, um so enger rücken die Bildpunkte zusammen, und mit wachsender Entfernung der Punkte der Geraden $\mathfrak{ST}$ von $\mathfrak{B}$ nähern sich die Sehstrahlen immer mehr der parallelen Richtung von $\mathfrak{ST}$. Schließlich wird der nach dem „unendlich fernen Punkte" $\mathfrak{F}$ gehende Sehstrahl parallel zu $\mathfrak{ST}$. Den Schnittpunkt F des zu $\mathfrak{ST}$ parallelen Sehstrahls AF können wir demnach als das Bild des „unendlich fernen Punktes" der Geraden $\mathfrak{ST}$, die in der Richtung $\mathfrak{ST}$ im Unendlichen verschwindet, betrachten. F heißt daher der **Verschwindungs-** oder **Fluchtpunkt** der Geraden $\mathfrak{ST}$. Die Strecke SF ist das Bild des Strahles $\mathfrak{SF}$ der gegebenen Geraden.

Wir erhalten danach das Bild einer beliebigen Geraden, soweit sie sich hinter der Bildebene erstreckt, indem wir ihren Spurpunkt S mit ihrem Fluchtpunkt F verbinden.

b) Sind (Fig. 130) $l_1, l_2, l_3 \ldots$ eine Anzahl paralleler Geraden, so finden wir ihre Fluchtpunkte dadurch, daß wir die zu ihnen parallelen Sehstrahlen ziehen. Diese fallen aber in denselben Strahl AF (Schnittlinie der sämtlichen Sehstrahlenebenen) zusammen, so daß der Verschwindungspunkt F allen Parallelen gemeinsam ist. Ihre Bilder laufen deshalb in F zusammen, sie „fliehen" nach demselben Punkte F, um dort zu „verschwinden".

Wir erhalten damit den **Fundamentalsatz der Perspektive:**

Parallele Gerade haben denselben Fluchtpunkt.

Um die Bilder einer Schar von Parallelen zu finden, haben wir also nur ihre Spurpunkte mit ihrem gemeinsamen Fluchtpunkte zu verbinden. Wo liegt der Fluchtpunkt frontaler Linien? (s. Fig. 131).

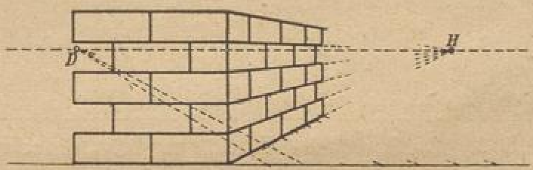


Fig. 131.

Um zu einer vollständig klaren Auffassung der Bedeutung des Fluchtpunktes zu kommen, ist zu beachten, daß es in Wirklichkeit keine unendlich ausgedehnten Strecken gibt und daher der „unendliche ferne" Punkt nur ein gedachter Punkt ist, daß ferner auch unsere Sehweite nicht in unendliche Fernen reicht. Der Fluchtpunkt wird deshalb *niemals* selbst *auf dem Bilde* in Erscheinung kommen.[1])

Der Fluchtpunkt ist nichts anderes als ein wichtiger Hilfspunkt, dessen sich der Zeichner zur genauen und raschen Darstellung paralleler Linien bedient.

Auch die tägliche Beobachtung lehrt uns, daß parallele Linien, je weiter ihre Punkte von uns entfernt sind, sich immer näherzurücken und in sehr großer Entfernung in einem Punkte zusammenzulaufen scheinen (vgl. Abb. 2). Man denke nur an die Gleise gerader Eisenbahnstrecken, die parallelen Linien langer, gerader Straßen, an Häuser- und Baumreihen, endlich an die parallelen Fugen von Mauern (s. Fig. 131, wo eine aus Quadern bestehende Mauer dargestellt ist).

Dies beruht nach der Lehre vom Auge darauf, daß wir die Größe einer Strecke von dem Sehwinkel, d. h. dem Winkel, den die Sehstrahlen nach den Endpunkten einschließen, beurteilen. Die Sehwinkel für die gleichgroßen Strecken in Fig. 132 werden immer kleiner, je weiter sie vom Auge in A entfernt sind. Daher erscheinen sie auch dem Auge kleiner. Wird der Sehwinkel sehr klein, so entstehen von den Enden des

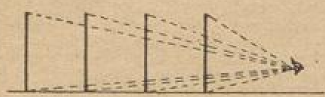


Fig. 132.

[1]) Vgl. Guido Hauck, Malerische Perspektive, S. 24.

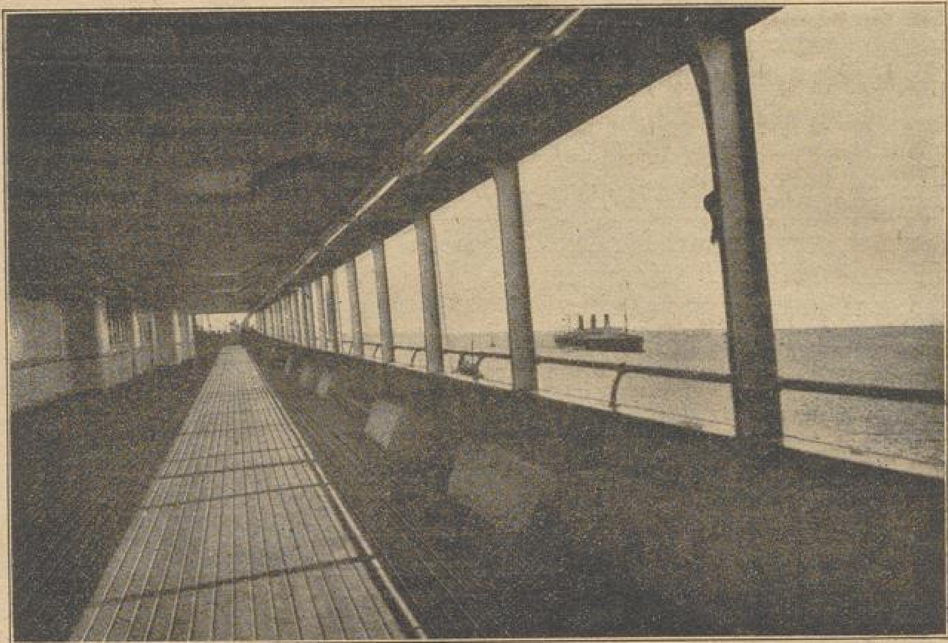


Abb. 2. An Bord des Schnelldampfers „Vaterland" mit Blick auf den „Imperator".

Gegenstandes auf der Netzhaut des Auges nicht mehr zwei getrennte Lichteindrücke, die Bilder der Enden decken sich also.

§ 31. Hauptpunkt, Aughöhenlinie (Horizont). Distanzpunkte.

1 a) Der zur Bildebene B senkrechte Sehstrahl, der B im Punkte H trifft, heißt **Hauptstrahl.** Sein Schnittpunkt H mit B wird der **Hauptpunkt** und der Abstand AH des Augpunktes von B die **Augdistanz** oder der **Augabstand** genannt (Fig. 133).

Nach dem Fundamentalsatz der Perspektive ist der Hauptpunkt der Fluchtpunkt aller zu B senkrechten Linien, da ihr Fluchtstrahl mit AH zusammenfällt. Bezeichnen wir die zur Bildebene senkrechten Linien als Tiefenlinien, so haben wir den Satz:

I. **Der Hauptpunkt ist der Fluchtpunkt sämtlicher Tiefenlinien.**

Auch das Zeichnen und Beobachten in der Natur lehrt, daß alle Linien, die parallel zur Sehrichtung sind, nach einem Punkte zusammenzulaufen scheinen, der in Augenhöhe liegt. Vgl. Abb. 2.

b) Die durch den Augpunkt A parallel zur Grundebene gelegte Ebene ℌ (Fig. 133), die **Aughöhenebene** oder **Horizontebene,** schneidet die Bildfläche in der Geraden H_1H_2, die durch den Hauptpunkt H geht und der Grundlinie X_1X_2, also der Breitenrichtung, parallel ist. Die Schnittgerade H_1H_2 heißt **Aughöhenlinie** oder **Horizont.**

Ein in Aughöhe über der Grundebene G gelegener Punkt 𝔓 liegt in der Aughöhenebene. Da dieser auch der Sehstrahl A𝔓 angehört, so liegt sein Bild P auf dem Horizont.

Die Fluchtstrahlen sämtlicher in der Grundebene gezogenen Geraden liegen in der Horizontebene. Das gleiche gilt auch für alle zur Grundebene parallelen Geraden, also für alle Wagrechten. Mithin liegen die Fluchtpunkte sämtlicher Wagrechten auf dem Horizont.

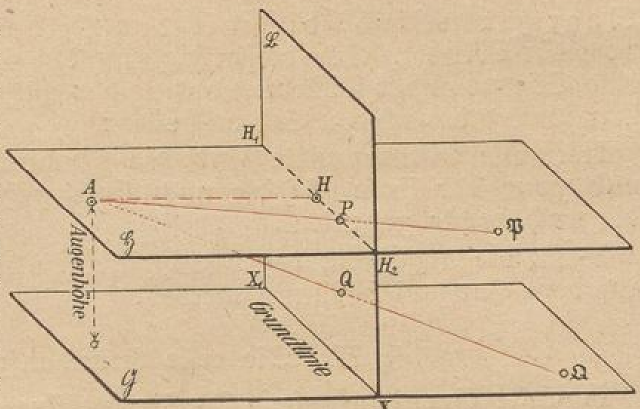


Fig. 133.

Es gilt daher der Satz:

II. **Die Aughöhenlinie ist die durch den Hauptpunkt zur Grundlinie gezogene Parallele, auf der sich alle in Aughöhe gelegenen Punkte abbilden. Sie ist der Ort für die Fluchtpunkte aller Wagrechten.**

Das Bild Q (Fig. 133) eines in der Grundebene gelegenen Punktes 𝔔 liegt stets zwischen Grundlinie und Horizont. Rückt 𝔔 immer weiter von der Bildebene ab, so nähert sich sein Bild Q dem Horizont und fällt schließlich auf diesen, wenn 𝔔 im Unendlichen liegt. Wir können deshalb die Aughöhenlinie oder den Horizont auch als das Bild der „unendlich fernen" Geraden der Grundebene betrachten.

Das Bild des ganzen, unendlich ausgedehnten Teiles der Grundebene hinter B deckt also nur den schmalen Streifen zwischen Grundlinie und Horizont auf der Bildfläche.

Befinden wir uns am Meeresstrande und betrachten die Wasserfläche als Grundebene und die Strandlinie als Grundlinie, so erhalten wir auf unserer Bildfläche (vgl. Abb. 2) die in Aughöhe gezogene Wagrechte als das Bild der begrenzenden Linie unseres Gesichtsfeldes, des sogenannten „Horizontes",[1]) in dem sich Himmel und Erde zu berühren scheinen. Die Linie H_1H_2 trägt daher ihren Namen.

2) Tragen wir (Fig. 134) auf der Aughöhenlinie vom Hauptpunkte H aus die Strecke d gleich der Augdistanz AH nach beiden Seiten bis D_1 und D_2 ab, so heißen die erhaltenen Punkte die **Distanzpunkte.** Die Dreiecke AHD_1 und AHD_2 sind rechtwinklig und, da $AH = HD_1 = HD_2$ ist, auch gleichschenklig. Daher ist $\sphericalangle AD_1H = \sphericalangle AD_2H = 45°$. Daraus folgt, daß AD_1 und AD_2 die Fluchtstrahlen für alle

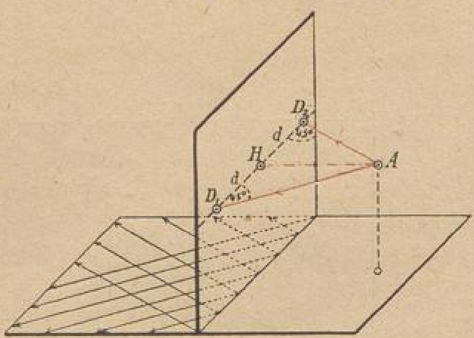


Fig. 134.

[1]) Von horizein (griech.) = begrenzen.

Wagrechten sind, die mit der Bildebene einen Winkel von 45° bilden. Von diesen sogenannten **45°-Linien** verläuft die eine Schar von der Bildebene aus nach rechts, die andere nach links. Wir können danach den Satz aufstellen:

III. **Die Distanzpunkte sind die Fluchtpunkte der 45°-Linien, und zwar der linke für die nach links gehenden, der rechte für die nach rechts gehenden.**

Wenn die Augdistanz gegeben ist, können die Distanzpunkte sofort auf dem Horizont bestimmt werden.

§ 32. Die erste Grundaufgabe.

1) Erste Grundaufgabe. Die Perspektive eines in der Grundebene gelegenen Punktes $\mathfrak{P}$ zu bestimmen.[1])

Der Anschaulichkeit halber lösen wir die Aufgabe zunächst an der Hand des Schrägbildes Fig. 135. Von dem in der Grundebene gegebenen Punkte $\mathfrak{P}$ ziehen wir erstens $\mathfrak{P}P_x$ senkrecht zur Grundlinie, zweitens $\mathfrak{P}Q$ unter einem Winkel von 45° zu ihr. Alsdann können wir das Bild P des Punktes $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt der Bilder der Tiefenlinie $\mathfrak{P}P_x$ und der 45°-Linie $\mathfrak{P}Q$, die beide durch $\mathfrak{P}$ gehen, bestimmen. Nun ist P_x der Spurpunkt und der Hauptpunkt H der Fluchtpunkt der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Tiefenlinie. Wir erhalten daher ihr Bild, wenn wir P_x mit H verbinden. Entsprechend ergibt sich die Verbindungsstrecke QD_2 als das Bild der durch $\mathfrak{P}$ gehenden 45°-Linie $\mathfrak{P}Q$. Da das Bild P von $\mathfrak{P}$ sowohl auf P_xH als auch auf QD_2 liegt, so ist der Schnittpunkt der beiden Strecken der gesuchte Bildpunkt. Bemerkenswert ist, daß dabei der Sehstrahl $A\mathfrak{P}$ gar nicht verwendet zu werden braucht.

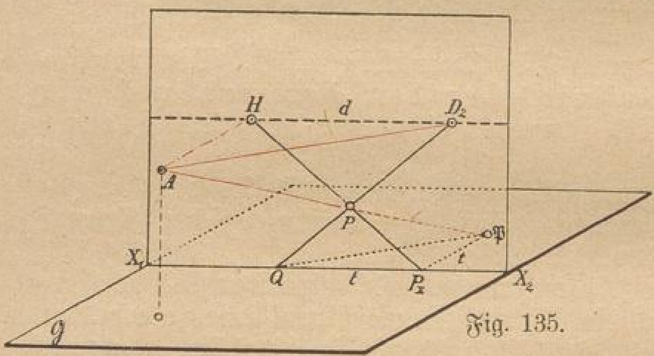


Fig. 135.

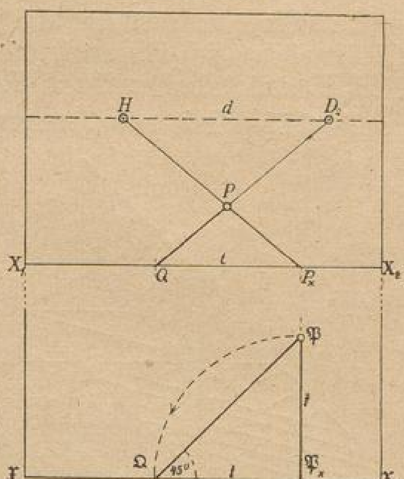


Fig. 136.

Die angegebene Bestimmung des Bildpunktes erscheint auf den ersten Blick gesucht. Deshalb ist eine kurze geometrische Betrachtung nicht

[1]) Der Hauptpunkt H und die Augdistanz $A\bar{H} = HD_1 = HD_2$ sind hier wie in allen folgenden Aufgaben als bekannt vorausgesetzt.

überflüssig, die uns zugleich deutlich die Wichtigkeit der 45°-Linien für unsere Aufgabe zeigt. Der Sehstrahl $A\mathfrak{P}$ (Fig. 135) wird durch P im Verhältnis $AH : P_xP = d : t$, d. h. der Distanz zum Tiefenabstand des Punktes $\mathfrak{P}$ geteilt. Im gleichen Verhältnis wird auch P_xH durch P geteilt, so daß wir P am einfachsten dadurch finden, daß wir auf der Aughöhenlinie $HD_2 = AH = d$ und auf der Grundlinie $P_xQ = P_xP = t$ abtragen und Q mit D_2 verbinden. Der Sehstrahl $A\mathfrak{P}$ ist also für die Lösung nicht erforderlich! Von welchen Sehstrahlenebenen sind P_xH und QD_2 die Spuren?

Als Bildfläche benutzen wir im folgenden stets einen Teil der lotrecht gedachten Zeichenebene, der unten (Fig. 135) durch die Grundlinie X_1X_2 begrenzt ist. Um gleichzeitig auch den Grundriß des abzubildenden Gegenstandes vor Augen zu haben, denken wir uns die Grundebene $\mathfrak{G}$ hinreichend weit nach vorn so verschoben, daß jeder Punkt in ihr sich senkrecht zur Bildebene bewegt, und dann um ihre Schnittgerade mit $\mathfrak{B}$ in die Zeichenebene nach unten geklappt (Fig. 136). Dadurch ermöglichen wir das Zeichnen in einer Ebene. Jedoch ist es unbedingt erforderlich, sich dauernd die wahre Lage vor Augen zu halten.

Wird in der angegebenen Weise für unsere Grundaufgabe die Grundebene mit der Bildebene vereinigt, so ergibt sich die Darstellung in Fig. 136. Die Lösung der Grundaufgabe gestaltet sich nunmehr folgendermaßen:

Wir ziehen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_x$ senkrecht zu $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ unter einem Winkel von 45° zu $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, loten $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{Q}$ auf die Grundlinie X_1X_2 hinauf und verbinden P_x mit dem Hauptpunkt H und Q mit dem zugehörigen Distanzpunkt D_2. Der Schnittpunkt der Verbindungsstrecken ist der gesuchte Punkt P.

Weil $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_x$ ist, so ergibt sich auch $\mathfrak{Q}$, wenn auf der Grundachse $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ von $\mathfrak{P}_x$ $\mathfrak{P}_x\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_x\mathfrak{P}$, gleich der Tiefe des gegebenen Punktes, abgetragen wird.

Statt des rechten Distanzpunktes hätte auch der linke benutzt werden dürfen. Welches ist die Abbildung des in der Grundebene gelegenen Dreiecks $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_x\mathfrak{P}$?

2) Übungsaufgaben. Die Perspektive a) einer beliebig in der Grundebene liegenden Strecke $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$, b) eines beliebig in der Grundebene gelegenen Dreiecks $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ zu zeichnen.

§ 33. Perspektivische Darstellung ebener in der Grundebene gelegener Figuren.

1) Aufgabe 1. Die Perspektive eines in der Grundebene gelegenen Rechtecks $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{O}$, dessen Seiten $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$ der Grundlinie parallel sind, zu zeichnen[1] (Fig. 137).

[1] Bei der Anfertigung von Zeichnungen ist es vielleicht zu empfehlen, statt der schwer in Druckform zu gebenden deutschen Buchstaben kleine lateinische zu benutzen.

Wir verlängern die Tiefenstrecken $\mathfrak{L}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ bis zu ihren Schnittpunkten $\mathfrak{L}_x$ und $\mathfrak{M}_x$ mit der Grundachse $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ und loten diese Punkte auf die Bildachse X_1X_2 hinauf. Die Perspektiven der Tiefenstrecken $\mathfrak{L}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ liegen dann auf den nach dem Hauptpunkt H gehenden Strecken L_xH und M_xH. Die Bilder L und M der Punkte $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ finden wir durch Abbildung der durch diese Punkte gelegten 45°-Linien $\mathfrak{L}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}$. Weil Breitenlinien im Bilde auch als solche erscheinen, haben wir nur noch durch L und O zur Bildachse die Parallelen zu ziehen, die M_xH in M und N treffen. Das Trapez LMNO ist das Bild des gegebenen Rechtecks.

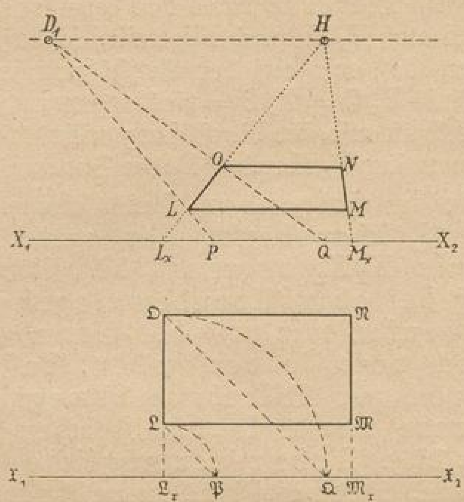
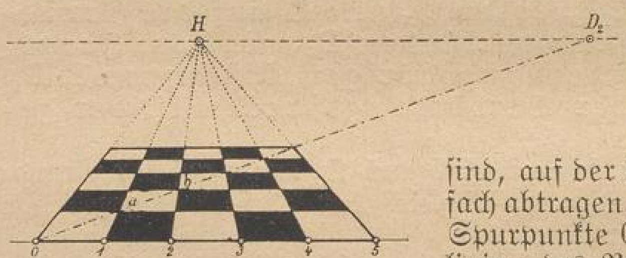


Fig. 137.

Aufgabe 2. Das perspektivische Bild eines in der Grundebene liegenden Quadratnetzes (z. B. eines quadratisch gefelderten Fußbodens) zu zeichnen (Fig. 138).

Die erste Reihe der quadratischen Felder stoße unmittelbar an die Grundlinie. Ihre vorderen Seiten bilden sich deshalb in wahrer Größe ab. Ihre Bilder ergeben sich also, wenn wir die Seite eines quadratischen Feldes, von denen einige an der Grundachse[1]) (Spurlinie) in wahrer Größe gezeichnet sind, auf der Grundlinie X_1X_2 mehrfach abtragen. Damit erhalten wir die Spurpunkte 0, 1, 2, 3 . . . der Tiefenlinien des Netzes, deren Bilder im Hauptpunkt H zusammenlaufen. Die Breitenlinien des Netzes werden auch im Bilde Breitenlinien. Zu ihrer Bestimmung genügt, falls die Gesamtheit aller Quadrate ein großes Quadrat darstellt, die Abbildung einer einzigen Diagonale des großen Quadrates, etwa der von Punkt 0 ausgehenden, deren Fluchtpunkt wegen ihrer Eigenschaft als 45°-Linie der rechte Distanzpunkt ist. Werden jetzt durch die Schnittpunkte (z. B. a und b) von $\overline{0D_2}$ mit den Perspektiven der Tiefenlinien die Breitenlinien gezogen, so ist die Abbildung des Netzes fertig. (Genauigkeitsprobe mit Hilfe des Distanzstrahles $\overline{5D_1}$!)



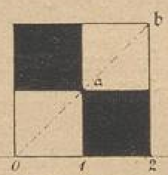


Fig. 138.

[1]) Das ist die im folgenden angewandte Bezeichnung für $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ (s. Fig. 136).

Das Quadratnetz hat zwei Scharen paralleler Diagonalen. Welches sind ihre Fluchtpunkte?

2) Die Perspektive beliebiger in der Grundebene gelegener (oder ihr paralleler) Vielecke kann stets durch mehrfache Anwendung der Grundaufgabe ermittelt werden. Dabei werden nur der Hauptpunkt und die Fluchtpunkte der 45°-Linien, die Distanzpunkte, benutzt. Kommen aber Parallelen von beliebiger Richtung vor, so ist die Verwendung ihres Fluchtpunkts für eine genaue und rasche Zeichnung geradezu geboten.

Aufgabe 3. Das perspektivische Bild einer beliebig in der Grundebene gelegenen Geraden ST zu bestimmen.

Ziehen wir durch den Augpunkt A (s. Schrägbild Fig. 139a) den Parallelstrahl zu ST, der die Bildebene im Punkte F auf der Aughöhenlinie trifft, so ist F der Fluchtpunkt der Geraden ST und die Verbindungsstrecke ihres Spurpunktes S mit F ist ihr Bild.

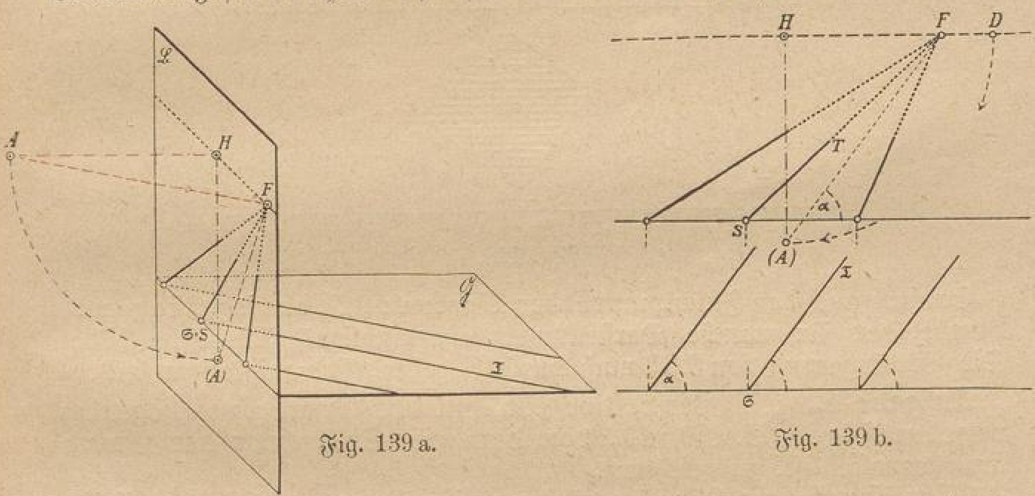


Fig. 139 a. Fig. 139 b.

Um die Zeichnung in einer Ebene ausführen zu können, denken wir uns das rechtwinklige Dreieck AHF in die Bildebene herabgeschlagen, so daß der Augpunkt in die Lage (A) kommt, und die Grundebene in der vorher angegebenen Weise mit der Bildebene vereinigt (Fig. 139b). Dabei bleibt (A) F ‖ ST.

Die Lösung gestaltet sich danach folgendermaßen: Man zeichne H(A) (Fig. 139b) gleich der Distanz HD senkrecht zur Aughöhenlinie, ziehe durch den „herabgeschlagenen Augpunkt" (A) die Parallele zu ST, die die Aughöhenlinie in F trifft, und lote den Spurpunkt S auf die Grundlinie X_1X_2 hinauf. SF ist alsdann das Bild der Geraden ST. Wie findet man die Bilder der zu ST parallelen Geraden in Fig. 139a und b?

Die angegebene Bestimmung des Fluchtpunktes F gilt auch dann, wenn ST nicht in der Grundebene liegt, sondern ihr parallel ist.

Aufgabe 4. Die Perspektive eines in der Grundebene beliebig liegenden Quadrates zu bestimmen (Fig. 140).

Wir schlagen den Hauptstrahl HA, der die als bekannt vorausgesetzte Distanz angibt, in die Bildebene herab und ermitteln nach Aufg. 3 die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der durch die parallelen Seiten des Quadrates LMNO bestimmten Geraden. Durch Verlängern der parallelen Seiten LM, ON und LO, MN finden wir ihre Spuren (1), (2), (3), (4) auf der Grundachse, die wir durch Hinaufloten auf die Grundlinie übertragen. Das von den vier Fluchtstrahlen $\overline{1\,F_2}$, $\overline{2\,F_2}$, $\overline{3\,F_1}$ und $\overline{4\,F_1}$ begrenzte Viereck ist die gesuchte Abbildung.

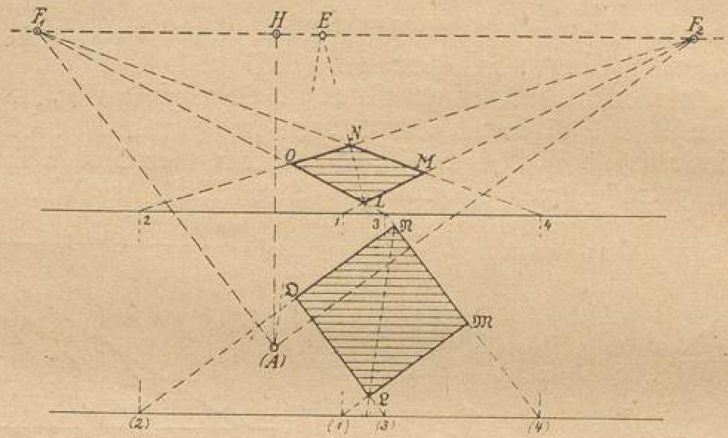


Fig. 140.

Ermittle auch den Fluchtpunkt E der Diagonale LN, den sog. Diagonalpunkt, der für manche Darstellungen ein wichtiges Hilfsmittel bildet. Die Verlängerung von LN muß durch E gehen (Genauigkeitsprobe!).

Aufgabe 5. Die Perspektive eines in der Grundebene liegenden regelmäßigen Sechsecks, von dem ein Seitenpaar der Grundlinie parallel ist, zu zeichnen.

Mit Einrechnung der Hauptdiagonalen kommen drei Parallelenscharen vor!

Aufgabe 6. Einen Fußboden mit regelmäßigen sechseckigen Feldern in Perspektive zu setzen.

3) Das perspektivische **Bild einer Kurve** ergibt sich dadurch, daß man eine hinreichend große Anzahl von Kurvenpunkten abbildet und die erhaltenen Bildpunkte durch einen zusammenhängenden Kurvenzug verbindet.

Aufgabe 7. Einen in der Grundebene liegenden Kreis in Perspektive zu setzen (Fig. 141).

Wir zeichnen das dem Kreise umgeschriebene Quadrat LMNO, dessen Seiten der Breiten- und Tiefenrichtung parallel sind und den Kreis in den Punkten 1, 2, 3, 4 berühren. Dieses Quadrat bilden wir samt den Diagonalen, die den Kreis in den Punkten 5, 6, 7, 8 treffen, mit Hilfe des Distanzpunktes D_1 ab.[1]) Damit erhalten wir auch die

[1]) Es braucht dabei nur ein Distanzstrahl, nämlich LD_1, auf dem das Bild der Diagonale LP liegt, verwandt zu werden.

Bilder der Punkte 1, 2, 3, 4 und die der Tangenten in diesen Punkten. Die Bilder der Punkte 5, 6, 7, 8 liegen auf den bereits abgebildeten Diagonalen, ferner auf den Perspektiven der durch die Punktpaare 8, 5 und 6, 7 gehenden Tiefenlinien. Die Abbildung der 8 Kreispunkte samt den Tangenten in den Hauptpunkten 1, 2, 3, 4 genügt, um die Perspektive der Kurve, die hier eine Ellipse ist, mit hinreichender Genauigkeit zu zeichnen.

Zur genaueren Zeichnung des Kreisbildes bilde man auch die Tangenten in den Punkten 5, 6, 7 und 8 ab. Wo müssen sich die Bilder der Tangentenpaare in den Punkten 5, 7 und 6, 8 schneiden?

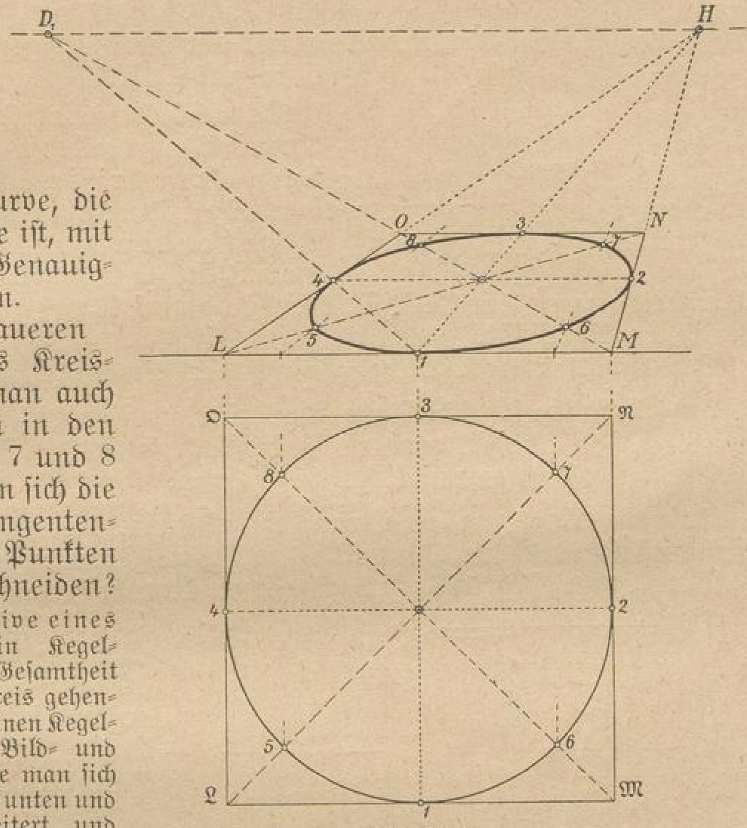


Fig. 141.

Die Perspektive eines Kreises ist ein Kegelschnitt, da die Gesamtheit der nach dem Kreis gehenden Sehstrahlen einen Kegelmantel bilden. Bild- und Grundebene denke man sich entsprechend nach unten und nach vorn erweitert und den in der Grundebene liegenden Kreis auch nach vorn vor die Grundlinie verschoben, so daß er die durch den Grundriß des Augpunktes zur Grundlinie gezogene Parallele, die „Fluchtlinie“ der Bildebene, 1. nicht schneidet, 2. berührt und 3. schneidet. In welchem Falle ist seine Perspektive eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel?

§ 34. Die zweite Grundaufgabe. Perspektivische Darstellung einfacher Körper.

1) Zweite Grundaufgabe. Die Perspektive eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, dessen Grundriß $\mathfrak{P}_1$ und Abstand von der Grundebene gegeben sind (Fig. 142).

Das Bild des Grundrisses $\mathfrak{P}_1$ kann ohne weiteres nach der ersten Grundaufgabe bestimmt werden. Da die Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ senkrecht zur Grundebene ist, so muß auch ihre Perspektive als Höhenlinie erscheinen und kann daher ihrer Richtung nach schon gezeichnet werden. Denken wir uns durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ die Tiefenlinien gezogen, die $\mathfrak{B}$ in P_x und P_0 treffen (Schrägbild!), so ist $P_x\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}P_0$ ein Rechteck, dessen

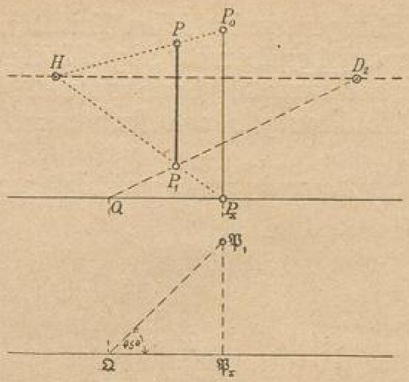


Fig. 142.

in $\mathfrak{B}$ gelegene Seite $P_x P_0$, der Aufriß von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}$, sich in wahrer Größe abbildet. Da die Tiefenstrecke $P_0 P$ ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkte hat, so ergibt sich das Bild P von $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt der durch P_1 gezogenen Höhenlinie mit $P_0 H$.

Danach haben wir folgende Lösung: Ermittle zunächst das Bild P_1 des Grundrisses $\mathfrak{P}_1$, errichte im Spurpunkte P_x des durch P_1 gehenden Hauptstrahls das Lot $P_x P_0 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}$ und ziehe die Verbindungsstrecke $P_0 H$, die die durch P_1 gehende Höhenlinie in P trifft.

$P_1 P$ ist „perspektivisch gleich" der Strecke $P_x P_0 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}$.

2 a) **Aufgabe 1.** Die Perspektive eines auf der Grundebene ruhenden Würfels, dessen vordere Seitenfläche a) in der Bildebene liegt, b) der Bildebene parallel ist, zu zeichnen.

Aufgabe 2. Eine quadratische Säule, die auf quadratischer Grundplatte steht, in Perspektive zu setzen (Frontansicht!).

Der Körper (Fig. 143) ist durch seinen Grundriß und die Höhen der Grundplatte und der Säule gegeben. Die Abbildung der Grundfläche ergibt sich in bekannter Weise mit Hilfe zweier Hauptstrahlen und eines Distanzstrahles.

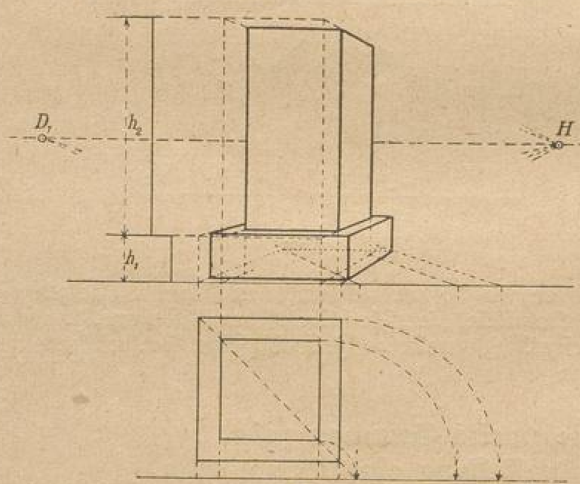


Fig. 143.

Bemerkung. Die Abbildung von wagerechten Flächen gestattet einen Einblick in die Gestaltungseigentümlichkeiten des perspektivischen Bildes. Auf wagerechte Flächen, die unter Aughöhe liegen, hat man im Bilde „Aufsicht", auf höherliegende „Untersicht". Wie bilden sich wagerechte Flächen in Aughöhe ab? Man bilde z. B. einen Quader in Frontstellung ab und zeichne eine Anzahl wagerechter Schnitte.

Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide, die auf ihrer Grundfläche ruht, in Perspektive zu setzen.

Von dem Körper ist die Grundfläche ihrer Lage nach in der Grundebene und die Höhe h gegeben. Nach Abbildung der Grundfläche und ihres Mittelpunktes M bestimmt man nach der zweiten Grundaufgabe das Bild der Spitze.

Aufgabe 4. Das perspektivische Bild eines Kreiskegels, der auf der Grundfläche ruht, zu zeichnen.

Der Kegel ist durch die Lage des Mittelpunktes M des Grundkreises in der Grundebene, dessen Radius r und die Höhe h gegeben. Nach Abbildung des Grundkreises und der Spitze zieht man von S, dem Bilde der Spitze, an die Perspektive des Grundkreises die Tangenten, die die Umrißlinien auf dem Mantel darstellen.

Will man die Umrißmantellinien konstruieren, so ist zu beachten, daß sie die Berührungslinien der durch den Augpunkt A an den Kegel gelegten Sehstrahlenebenen bilden (Schrägbild!). Ihre Schnittgerade AS trifft die Grundebene im Punkte T, den man durch Umlegung der Strecke AS um ihren Grundriß in die Grundebene G leicht finden kann. Die von T an den Grundkreis gezogenen Tangenten bestimmen die Berührungspunkte der Sehstrahlenebenen auf dem Grundkreis.

Aufgabe 5. Eine regelmäßig-sechsseitige Säule, die auf der Grundebene steht, in Perspektive zu setzen. Vgl. § 33 Aufg. 5.

Aufgabe 6. Einen auf der Grundebene stehenden geraden Kreiszylinder in Perspektive zu setzen.

Der Zylinder ist durch die Lage des Mittelpunktes M und den Radius r des Grundkreises, ferner durch die Höhe h gegeben. Unter Benutzung des umgeschriebenen Quadrates, von dem ein Seitenpaar der Grundlinie parallel ist, bildet man zunächst den Grundkreis ab und bestimmt dann das Bild des dem Zylinder umgeschriebenen regelmäßig-vierseitigen Prismas. In das Bild der Deckfläche des Prismas zeichnet man nach Ermittlung wichtiger Bildpunkte die Perspektive des Deckkreises ein. Schließlich zieht man an die beiden Ellipsen, die sich als die Perspektiven der Grund- und Deckfläche ergeben, die gemeinsamen Tangenten, die die Umrißmantellinien, durch die der Körper seitlich begrenzt erscheint, darstellen (Konstruktion!). Die Tangenten müssen parallel zur Zylinderachse sein, was für die Genauigkeitsprobe der Zeichnung von Wichtigkeit ist.

Aufgabe 7. Eine zylindrische Säule a) auf quadratischer, b) auf zylindrischer Grundplatte in Perspektive zu setzen.

b) **Aufgabe 8.** Das perspektivische Bild eines auf der Grundebene stehenden Quaders in Übereckstellung zu zeichnen.

Zur Abbildung der zur Grundebene parallelen Strecken benutzt man ihre Fluchtpunkte, die ja auf der Aughöhenlinie liegen. Die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der zur Grundebene parallelen Kanten und der „Diagonalfluchtpunkt" werden mit Hilfe des umgelegten Augpunktes bestimmt. Zur Lösung vgl. § 33 Aufgabe 4.

Aufgabe 9. Die Perspektive einer quadratischen Säule, die auf einem quadratischen Sockel steht, in schräger Ansicht zu zeichnen.

Aufgabe 10. Die Perspektive eines Hauses mit Walmdach in schräger Ansicht zu bestimmen (Fig. 144).

Von den Umrissen des Hauses ist der Grundriß vollständig gegeben. Vom Aufriß dagegen ist nur so viel über der Grundlinie, und zwar in gerader Ansicht, gezeichnet, als zur Entnahme der Höhe der Firstlinie und der lotrechten Hauskanten erforderlich ist. Lösung s. Fig.

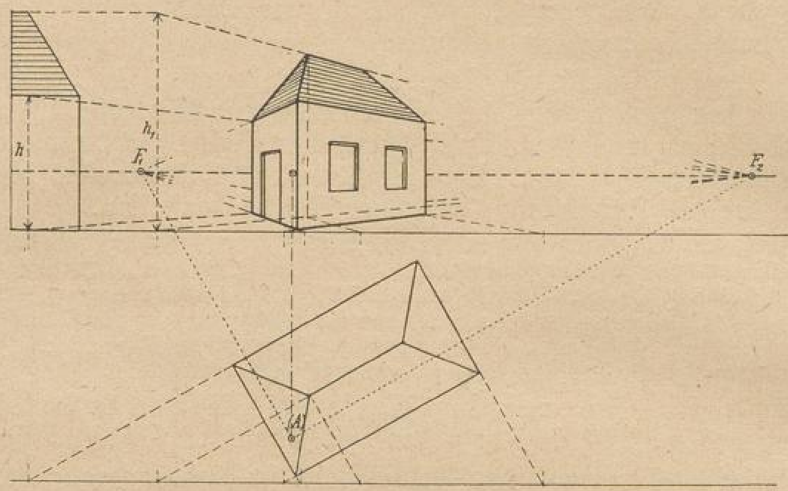


Fig. 144.

Aufgabe 11. Das perspektivische Bild eines quadratischen Obelisken samt Sockel und aufgesetzter Pyramide a) in Frontstellung, b) in Übereckstellung zu entwerfen.

Von dem Körper ist in Fig. 145 die Hälfte des Aufrisses in Frontansicht gezeichnet. Der Grundriß ist durch die beigefügten Maße (cm) mit gegeben, da der Querschnitt quadratisch ist.

Bemerkung. Freistehende Gegenstände bildet man gern in schräger Stellung (Übereckstellung) ab, weil die Bilder so einen frischen und natürlichen Eindruck machen. Im Gegensatz dazu wirken die Frontalansichten solcher Gegenstände oft steif und gezwungen. Das rührt daher, daß die Frontfiguren sämtlich durch ähnliche abgebildet werden, während die unmittelbar anstoßenden seitlichen Figuren im Bilde stark verzerrt erscheinen. Für Innenansichten jedoch ist die Frontansicht vorzuziehen.

Fig. 145.

3) Aufgabe 12. Die Perspektive einer auf der Grundebene ruhenden Kugel, die die Bildebene berührt, zu entwerfen.

Bevor wir zur Lösung übergehen, ist eine kurze geometrische Betrachtung erforderlich. Fig. 146 stellt den Achsenschnitt eines Kreiskegels dar, der von einer beliebigen Ebene B geschnitten wird, die mit dem Achsenschnitt die Linie AB gemeinsam hat. In den Kegel denken wir uns die Berührungskugeln K und K_1 gelegt, die die Schnittebene B in F_1 und F_2 berühren (vgl. L. II. § 51, 2). Betrachten wir die Spitze S des Kegels als den Augpunkt, die Kugel K als die abzubildende Kugel und B als die Bildebene, so sind die die Kugelfläche berührenden Sehstrahlen nichts anderes als die Mantellinien des Kegels. Ihr Schnitt mit B ist das Umrißbild der Kugel. Dieser Schnitt ist (Bew. s. L. II. § 51, 2) eine Ellipse mit den Brennpunkten

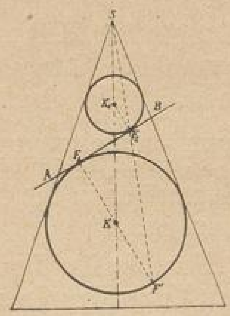


Fig. 146.

F_1 und F_2. Verlängern wir den Sehstrahl SF_2 bis zum zweiten Schnittpunkt F' mit der Kugel K, so ist, weil S äußerer Ähnlichkeitspunkt für die beiden Berührungskugeln ist, $KF' \parallel K_1F_2$ und, da $K_1F_2 \perp AB$ ist, ebenfalls senkrecht zu AB. Daher liegt KF' in der Verlängerung des zu AB senkrechten Kugelradius KF_1. Damit erhalten wir den für die Konstruktion der Umrißellipse wichtigen Satz:

Die Perspektive einer Kugel ist im allgemeinen eine Ellipse. Ihre Brennpunkte sind die Bilder der Endpunkte des zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers.

Lösung. (Fig. 147.) Wir bestimmen zunächst unter Benutzung der umgeschriebenen Quadrate die Perspektiven der drei Hauptkreise, nämlich des wagrechten, des zu B senkrechten und des frontalen Kreises. B_1B_2 ist das Bild der frontalen, N_1N_2 das der lotrechten

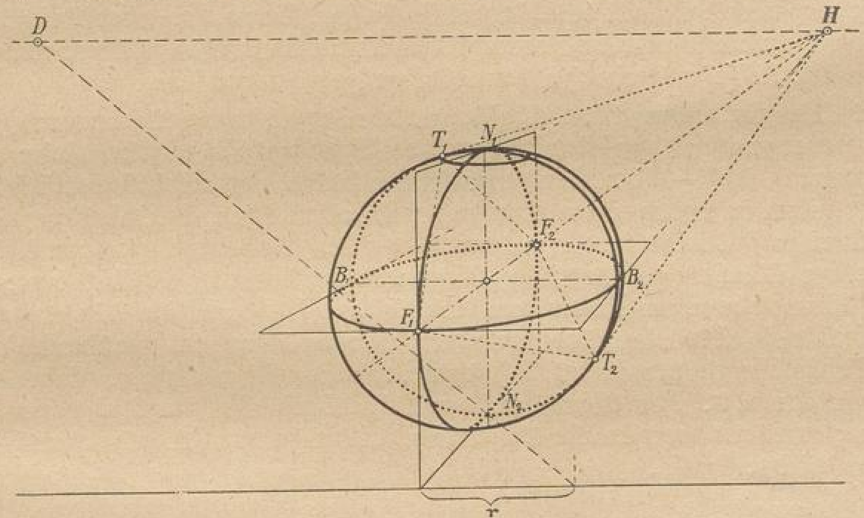


Fig. 147.

Achse des Achsenkreuzes der Kugel. Die Endpunkte der Tiefenachse ergeben die Brennpunkte F_1 und F_2 der gesuchten Umrißellipse. Der Mittelpunkt M von F_1F_2 ist der Mittelpunkt der großen Achse. Um die Kurve aus ihren Hauptachsen bestimmen zu können, ist noch ein Bestimmungsstück nötig, z. B. die Kenntnis eines Punktes der Kurve. Ziehen wir in irgendeinem Punkte des Frontalkreisbildes $B_1N_2B_2N_1$ die Hauptstrahlen, z. B. in B_1 und B_2 B_1H und B_2H, so geben diese Randtangenten die Richtung an, in der das Bild des Breitenkreises das Bild des frontalen Hauptkreises schneidet. Unter den sämtlichen Breitenkreisen gibt es zwei, nämlich den durch T_1 und den durch T_2, bei denen je eine Randtangente zugleich Tangente des frontalen Hauptkreises ist. Die von H an diesen Kreis gezogenen

Tangenten HT_1 und HT_2 bestimmen also die Punkte T_1 und T_2, in denen die Tangenten des Kreises mit der Umrißellipse zusammenfallen. Die Berührungspunkte T_1 und T_2 sind somit Punkte der gesuchten Ellipse, und die Summe der Brennstrahlen von T_1 (oder T_2), $T_1F_1 + T_1F_2 = 2a$, liefert uns jetzt die Länge der großen Achse 2a. Daraus kann die kleine Achse und schließlich die Umrißellipse bestimmt werden.

Um die Anschaulichkeit des erhaltenen Bildes zu heben, teile man den lotrechten Durchmesser in eine Anzahl perspektivisch gleicher Teile, lege durch die Teilpunkte wagerechte Schnittebenen, die die Kugel in Parallelkreisen schneiden, und bilde diese ab. Die Perspektiven dieser Kreise sind Ellipsen. Die sie umhüllende Ellipse ist die Umrißfigur der Kugel.

Bemerkung 1. Ebenso wie die Kugel kann jeder auf wagerechter Unterlage ruhende Umdrehungskörper (z. B. eine Schale oder Vase), der durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse entstanden ist, durch Abbildung wagerechter Schnitte abgebildet werden. Denn jeder wagerechte Schnitt des Körpers ist ein sog. Parallel- oder Breitenkreis. Für die Darstellung braucht von einem Umdrehungskörper nur die Lage der Achse und ein Halbmeridian gegeben zu sein.

2. Die zentralprojektive Abbildung der Kugel findet Anwendung bei der **stereographischen Projektion der Erdoberfläche.** Bei dieser von Hipparch (160—125 v. Chr.) ersonnenen Abbildungsart befindet sich der Augpunkt A in irgend einem Punkte der Erdoberfläche; als Bildebene dient die Berührungsebene im Gegenpunkte von A. So nimmt man zur Abbildung der südlichen Halbkugel den Augpunkt im Nordpol, als Bildebene die Berührungsebene im Südpol an. Wie bilden sich dabei die Längen- und Breitenkreise ab? Diese Abbildungsart, die man besonders zur Darstellung der Erdhalbkugeln verwendet, besitzt zwei wichtige Eigenschaften. Erstens ist sie winkeltreu, d. h. die Winkel auf der Kugeloberfläche sind gleich denen im Bilde; zweitens werden alle Kugelkreise, die nicht durch A gehen, auch im Bilde wieder Kreise.

§ 35. Verfahren beim Hinausfallen eines Distanz- oder anderen Fluchtpunktes.

1) Bei der perspektivischen Darstellung größerer Gegenstände muß die Augdistanz entsprechend größer gewählt werden, da sonst starke Verzerrungen in der Zeichnung auftreten, die aus Schönheitsrücksichten möglichst vermieden werden müssen. Infolgedessen fallen dann häufig die Distanzpunkte über die Grenzen der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche hinaus. In solchen Fällen benutzt man Teile der Distanz und bezeichnet, je nachdem man vom Hauptpunkt die Hälfte, ein Drittel oder ein Viertel der Distanz abträgt, die erhaltenen **Teildistanzpunkte** D_t als Halb-, Drittel- oder Vierteldistanzpunkte $\left(D_{(\frac{1}{2})}, D_{(\frac{1}{3})}, D_{(\frac{1}{4})}\right)$.

Aufgabe. Das Bild eines in der Grundebene gelegenen Punktes P zu bestimmen, wenn auf der Zeichenfläche nur ein Drittel der Distanz auf der Aughöhenlinie abgetragen werden kann (Fig. 148).

Bestimmen wir wie früher das Bild P in der erweitert gedachten Zeichenebene mit Hilfe des Distanzpunktes D, so wird durch P der Hauptstrahl $P_x H$ im Verhältnis des Tiefenabstandes $\mathfrak{P}_x\mathfrak{P} = t$ des gegebenen Punktes $\mathfrak{P}$ zur Distanz d geteilt, also $P_x P : PH = t : d$. Um nun $P_x H$ im gleichen Verhältnis zu teilen, wenn $HD_t = \frac{1}{3} d$ auf der Aughöhenlinie gegeben ist, tragen wir auf der Grundlinie von P_x $P_x R = \frac{1}{3} t$ ab. Durch die Verbindungsstrecke RD_t wird dann $P_x H$ ebenfalls im Verhältnis $t : d$ geteilt (Beweis!). Der erhaltene Teilpunkt fällt also mit dem nach der ersten Grundaufgabe bestimmten Punkte P zusammen.

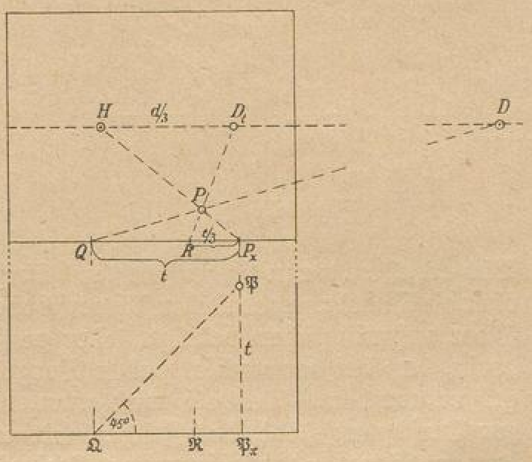


Fig. 148.

Löse auch die Aufgabe, wenn nur $\frac{1}{4}$ der Distanz benutzt werden kann.

Löse zur Übung die Aufgaben §§ 33 und 34 mit Hilfe von Halb- und Vierteldistanzpunkten.

2) Bei Darstellungen in schräger Ansicht kommt häufig ein Hauptfluchtpunkt außerhalb der Grenzen der Zeichenfläche zu liegen. Es entsteht dann die Aufgabe, von einem Bildpunkte aus eine Gerade nach dem auf der Aughöhenlinie liegenden „unzugänglichen" Fluchtpunkte zu ziehen, dessen Lage immer durch zwei gegebene Gerade bestimmt ist. Dieser Schwierigkeit kann man in doppelter Weise begegnen, entweder auf geometrischem Wege oder technisch mit mechanischen Hilfsmitteln.

Aufgabe 1. Die Perspektive dreier in der Grundebene gelegener Parallelen zu zeichnen, wenn ihr Fluchtpunkt außerhalb der Grenzen der Bildfläche liegt (Fig. 149).

Es sei (A) der herabgeschlagene Augpunkt und (A)U der herabgeschlagene Fluchtstrahl der in der Grundebene gelegenen Parallelen, deren Spurpunkte auf der Grundlinie 1, 2 und 3 seien. Da der Schnittpunkt F des Fluchtstrahls (A)U mit dem Horizont, der Fluchtpunkt der gegebenen Parallelen, außerhalb der Zeichenfläche angenommen wird, so haben wir die Aufgabe, um die Bilder der Parallelen zu finden, von den Punkten 1, 2, 3 die Geraden nach dem unzugänglichen Punkte F zu ziehen. Zu diesem Zwecke führen wir die Zeichnung zunächst in verkleinertem Maßstabe, hier im Verhältnis 2 : 1 aus, wobei wir den Hauptpunkt H als Ähnlichkeitspunkt benutzen: $\overline{H(A_t)} = \frac{1}{2}\overline{H(A)}$, $\overline{H1'} = \frac{1}{2}\overline{H1}$, $\overline{H2'} = \frac{1}{2}\overline{H2}$ usf. Die durch (A_t) zu (A)U gezogene Parallele trifft die Horizontlinie in F_t; $\overline{HF_t} = \frac{1}{2}\overline{HF}$ (Beweis!).

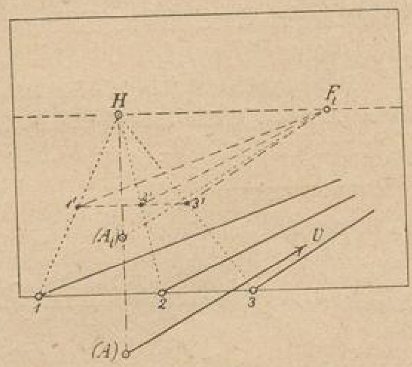


Fig. 149.

Ziehen wir jetzt durch die Spurpunkte 1, 2, 3 entsprechend zu $1'F_t$, $2'F_t$, $3'F_t$ die Parallelen, so gehen sie durch F. Der Beweis gründet sich auf die Umkehrung des Satzes: Parallele schneiden die Schenkel eines Winkels (Strahlen eines Strahlenbüschels) in verhältnisgleichen Strecken.

Die von uns gezeichnete Verkleinerung hätten wir als Bild erhalten, wenn Gegenstand und Auge ihre gegenseitige Lage behielten, aber die Bildebene parallel zu sich verschoben worden wäre, bis die Distanz nur $\frac{1}{2}$ der ursprünglichen beträgt. Der große Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß bei der nachfolgenden Vergrößerung auch die Ungenauigkeiten größer werden. Deshalb wird man, wenn ein hinreichend großer Tisch zur Verfügung steht, das Zeichenblatt auf diesen befestigen und mit einem langen Lineal oder gespannten Zwirnfaden den Fluchtpunkt bestimmen und mit einem Reißstift festlegen. Um diesen schlingt man einen dünnen Faden, der durch ein kleines Gewicht gespannt wird, und bestimmt mit ihm die nach dem Fluchtpunkt gehenden Linien, die mit Hilfe eines vorsichtig herangeschobenen Lineals gezogen werden.

Aufgabe 2. Von einem beliebigen Punkte 1 die Gerade nach dem unzugänglichen Fluchtpunkte F, der durch die Richtungslinie LM bestimmt ist, zu ziehen (Fig. 150).

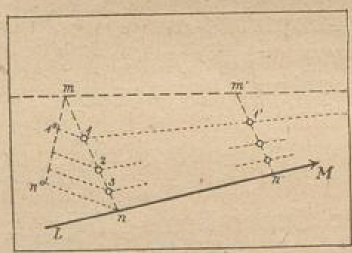


Fig. 150.

Ziehe durch 1 eine beliebige Gerade, die den Horizont in m und LM in n trifft, und in einiger Entfernung zu mn eine Parallele m'n'. Teile m'n' in 1' in demselben Verhältnis, wie mn durch 1 geteilt wird. 11' ist dann die gesuchte Gerade. Löse die Aufgabe auch für die Punkte 2 und 3, die auf mn liegen. Beweis!

§ 36. Von der Lage des Augpunktes.

Damit ein nach den Gesetzen der Perspektive dargestellter Gegenstand einen naturgetreuen Eindruck gewährt, muß der Beschauer sein Auge annähernd in den Augpunkt bringen, d. h. an die Stelle, an der vorher das Auge des Zeichners war oder für die Herstellung des Bildes angenommen wurde. Das zeigt sich besonders kraß bei dem in Fig. 147 gezeichneten Bilde der Kugel. Nur wenn man ein Auge, etwa das linke, über den Hauptpunkt in die Entfernung der Distanz bringt, erscheint die Umrißellipse als ein Kreis. Befindet sich dagegen das Auge an irgendeiner anderen Stelle, so sieht es den Umriß als Ellipse, was aber der tatsächlichen Wahrnehmung widerspricht, daß der Umriß einer Kugel dem Auge von jeder beliebigen Stelle aus stets als ein Kreis erscheint.[1])

Deswegen hat man auch heutzutage begonnen, trotzdem die Perspektive bei den heutigen Malern und Zeichnern sich keiner besonderen Wertschätzung erfreut, Gemälde und andere Bilder in Museen, Ausstellungen, ja selbst in Wohnungen in Augenhöhe des Beschauers aufzuhängen, so daß dieser immer den richtigen Standpunkt vor dem Bilde einnehmen kann. Geschieht dies, so geht das Bild nach der Ausdrucksweise des Malers tatsächlich auseinander. Man mache z. B. den Versuch mit dem Bild in Abb. 3, das man in der

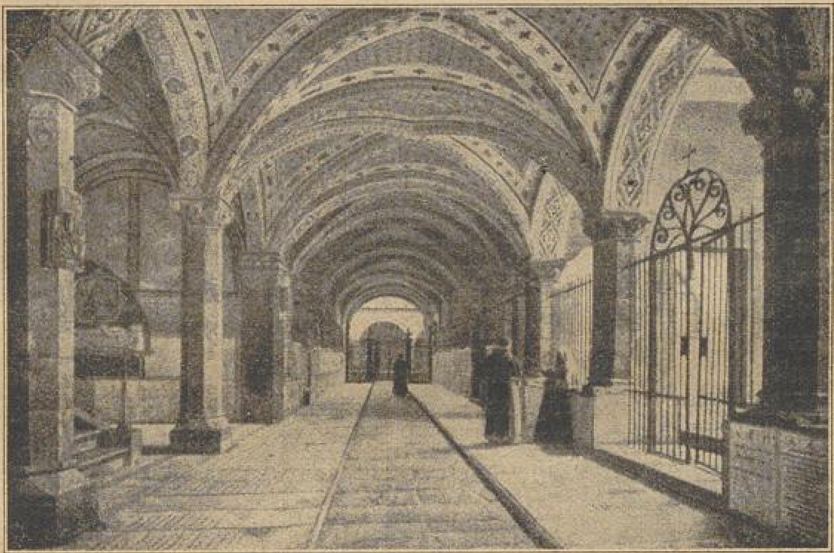


Abb. 3. Dominikanerkloster „Santa Maria Novella" in Florenz. Nach Barducci.

richtigen Entfernung vor das Auge hält. Wird das Bild in die richtige Aughöhe gebracht, so scheint der Gang auch wagerecht zu sein. Beachtenswert ist, daß der Gang dem Auge zu folgen scheint, wenn man das Bild von der Seite ansieht. Ermittle den Hauptpunkt und die Aughöhenlinie, ferner den rechten Distanzpunkt und den Augabstand.

Gerade durch die Rücksicht auf den Beschauer sind dem Zeichner für die Wahl des Augpunktes, dessen Lage bei einem Bilde durch den Hauptpunkt und die Angabe der Distanz völlig bestimmt ist, gewisse Grenzen gezogen. Da man Bilder niemals schief von der Seite, sondern stets von vorn betrachtet, so folgt zunächst für die Wahl des Hauptpunktes die Regel:

Der Hauptpunkt ist innerhalb der Bildfläche, und zwar ungefähr in der Mitte des Bildes zu wählen.

Betrachtet man ein lotrecht aufgehängtes oder aufgestelltes größeres Bild, so pflegt man mitten davor hinzutreten, und zwar um so weiter

[1]) Nur in dem einen Falle bildet sich der Umriß einer Kugel als Kreis ab, wenn ihr Mittelpunkt in den Hauptpunkt zu liegen kommt.

von ihm entfernt, je größer die Ausdehnung des Bildes ist, um mit einem Blick ohne lästige Bewegungen des Kopfes das Ganze übersehen zu können. Nun ist man imstande, mit einem Blick ein Gesichtsfeld zu überblicken, das einem Sehkegel mit einem Öffnungswinkel von ungefähr 60° entspricht. Das trifft zu, wenn der Augabstand von der Bildfläche, die Distanz, das ein- bis zweifache der größeren Ausdehnung des Bildes nach der Seite oder Höhe beträgt. Damit haben wir die zweite wichtige Regel:

Die Distanz ist gleich der ein- bis zweifachen größeren Ausdehnung des Bildes nach der Seite oder Höhe zu nehmen.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn man ein an die Grundlinie stoßendes Quadrat für verschiedene Distanzen abbildet. Ist die Distanz gleich der einfachen Bildbreite, so wird im Bilde die hintere Quadratseite gleich der Hälfte ihrer wahren Länge a, ist sie gleich der doppelten Bildbreite, so wird sie auf $\frac{2}{3}$ a verjüngt. Wird die Distanz so gewählt, daß die hintere Seite kleiner als $\frac{1}{2}$ a oder größer als $\frac{2}{3}$ a wird, so wirkt das Bild unnatürlich (Grund?).

Für die genauere Bestimmung des Hauptpunktes und des Augabstandes innerhalb des durch die Regeln gegebenen weiten Spielraums sind neben anderen Gründen, die sich aus der Natur der dargestellten Gegenstände ergeben, in der Hauptsache Schönheitsrücksichten maßgebend. So wird man bei einer senkrecht zur Bildebene verlaufenden Säulenhalle niemals den Hauptpunkt genau in der Mitte der beiden Säulenreihen annehmen, weil sonst das Bild einen steifen und einförmigen Eindruck machen würde. Bei architektonischen Gegenständen wie Gebäuden, die von der Straße aus gezeichnet werden sollen, ergibt sich die Aughöhe und damit auch die Lage des Hauptpunktes von selbst; sie ist gleich der Körperlänge des Zeichners zu nehmen.

Wird der Augabstand zu klein genommen, so treten an den Seiten starke perspektivische Verzerrungen auf. Bekannt ist ja, daß bei photographischen Gruppenaufnahmen die Personen an den Seiten leicht zu dick werden. Um das zu vermeiden, nimmt der Photograph eine große Distanz und läßt kräftige Personen möglichst in der Mitte Platz nehmen oder so sich aufstellen, daß sie die schmale Seite dem Apparat zukehren. Kleine Distanzen eignen sich jedoch für die Darstellung von Innenräumen, die man ja gewohnt ist aus geringer Entfernung zu sehen und die dadurch viel anheimelnder wirken. Es ist deswegen auch kein Zufall, daß bei Raffaels vatikanischen Gemälden und bei Leonardos Abendmahl die Distanz gleich der einfachen Bildbreite ist.

Bei zu großer Distanz geht der eigentümliche perspektivische Reiz verloren.

§ 37. Perspektivische Teilung und Messung von Breiten-, Höhen- und Tiefenlinien. Perspektivische Maßstäbe.

1) Tragen wir auf einer geraden Linie eine bestimmte Strecke, z. B. 1 cm, als Maßeinheit wiederholt ab, so erhalten wir einen Maßstab. Mit Hilfe eines solchen Maßstabes können wir bei Darstellungen in gerader Parallelprojektion Breiten-, Höhen- und Tiefenstrecken sowohl unmittelbar abtragen als auch umgekehrt aus ihren Bildern ihre wahren Längen unmittelbar bestimmen.[1]) Höchstens ist dabei die Verkleinerungszahl in Rechnung zu ziehen. Bei perspektivischen Darstellungen dagegen ist das nicht möglich. Hier bedürfen wir, um im Bilde Strecken nach der Breite, Höhe und Tiefe abzutragen und zu messen, der sogenannten **perspektivischen Maßstäbe,** der Breiten-, Höhen- und Tiefenmaßstäbe. Diese beziehen wir auf einen bestimmten Maßstab, den wir der Einfachheit halber auf der Grundlinie auftragen (Fig. 151), wo im allgemeinen 1 cm im Bilde 1 m in der Wirklichkeit entsprechen soll, und bezeichnen ihn deshalb als **Grundmaßstab.**

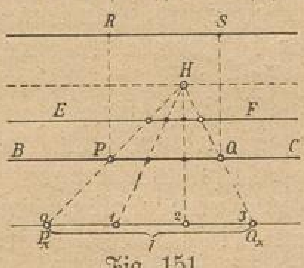


Fig. 151.

2a) Teilung und Messung von Breitenlinien. Breitenmaßstäbe.

Aufgabe 1. Auf der Bildbreitenlinie BC, die der Grundebene angehört, vom Punkte P aus die Strecke l = 3 cm perspektivisch abzutragen (Fig. 151).

Wir verbinden den Hauptpunkt H mit P und tragen vom Schnittpunkte P_x der Verlängerung von HP mit der Grundlinie die Strecke $P_xQ_x = l = 3$ cm ab. Die Tiefenlinie Q_xH trifft BC in Q. Die Strecke PQ ist dann perspektivisch gleich $P_xQ_x = l = 3$ cm. Beweis! Was für eine Figur stellt das Trapez P_xQ_xQP dar? Zeichne die Figur in der Grundebene!

Gehört die gegebene Breitenlinie, etwa RS, im Urbild nicht der Grundebene an, so tragen wir zunächst auf ihrem Grundriß (BC) die gegebene Strecke perspektivisch ab und finden durch Hinaufloten die gesuchte Bildstrecke RS = l.

Aufgabe 2. Die der Grundebene angehörende Bildstrecke PQ, die zur Grundlinie parallel ist, perspektivisch a) in n = 3 gleiche Teile, b) im Verhältnis m : n = 2 : 3 zu teilen.

Zu a) Man teile P_xQ_x (Fig. 151) in n = 3 gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit H. Die Bildstrecke PQ wird durch die Hauptstrahlen in n = 3 **gleiche** Teile geteilt. Zeichnung in der Grundebene!

Aufgabe 3. Die wahre Länge der Bildstrecke PQ, die der Grundlinie parallel ist und deren Urbild der Grundebene angehört, zu bestimmen (Fig. 152).

Die Lösung vollzieht sich umgekehrt wie die der Aufgabe 1.

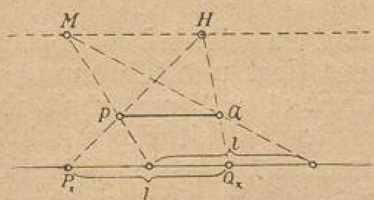


Fig. 152.

Da mit Hilfe des Hauptpunktes H Breitenstrecken des Bildes geteilt oder gemessen werden können, so wird H auch als **Teilungs-** oder **Meßpunkt für die Breitenlinien** bezeichnet. Zum Messen von Breitenstrecken kann auch jeder beliebige

[1]) Darin besteht ja hauptsächlich der Vorteil der geraden Parallelprojektion, dem sie auch ihre weitgehende praktische Anwendung verdankt.

auf dem Horizont gelegene Punkt, z. B. M, benutzt werden. Denn die Verlängerungen der von M nach P und Q gezogenen Verbindungsstrecken schneiden auf der Grundlinie ebenfalls die wahre Länge l der gegebenen Bildstrecke ab. Beweis!

Soll auf der Bildbreitenlinie BC (Fig. 151) vom Punkte P aus die Einheitsstrecke perspektivisch mehrfach abgetragen werden, so ziehen wir nach Aufg. 1 die Tiefenlinie HP, die die Grundlinie in P_x schneidet, tragen von P_x aus auf dieser die Längeneinheit, z. B. 1 cm, wiederholt ab und verbinden die Teilpunkte mit H.[1]) Die von den Tiefenlinien begrenzten Abschnitte auf der Breitenlinie BC sind einander gleich (Beweis!). Da jeder von ihnen der Längeneinheit in Wirklichkeit entspricht, so bildet die Strecke PQ den **Maßstab** für beliebige, auf der Breitenlinie BC liegende Strecken und alle Breitenlinien derselben Tiefe. Ebenso bildet die Breitenlinie EF mit ihren Abschnitten den Breitenmaßstab für alle Strecken, die auf der Breitenlinie EF liegen. Die Maßeinheiten für die Breitenlinien werden nach hinten immer kleiner, und zwar um so mehr, je weiter diese in Wirklichkeit hinter der Bildebene liegen.

b) Teilung und Messung von Höhenlinien. Höhenmaßstäbe.

Aufgabe 4. In einem Bildpunkte P, der der Grundebene angehört, die Höhenstrecke h = 4 cm perspektivisch aufzutragen (Fig. 153).

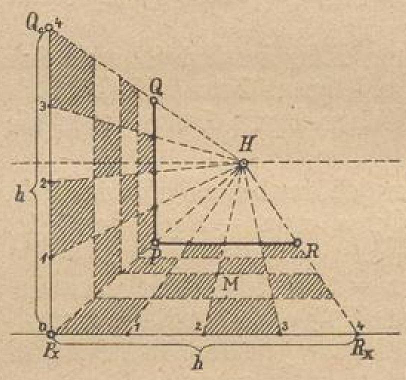


Fig. 153.

Wir ziehen die Tiefenlinie HP, die in ihrer Verlängerung die Grundlinie in P_x trifft, und errichten auf dieser das Lot $P_xQ_0 = h = 4$ cm. Die Tiefenlinie Q_0H schneidet die in P gezogene Höhenlinie in Q. PQ ist dann perspektivisch gleich $P_xQ_0 = h$. Beweis!

Eine andere Lösung ergibt sich, wenn wir durch P die Breitenlinie ziehen, auf ihr mit Hilfe des Grundmaßstabes die Strecke PR perspektivisch gleich $P_xR_x = h$ abschneiden und in P die Höhenstrecke PQ = PR ziehen. Beweis!

Tragen wir auf der Höhenlinie P_xQ_0 (Fig. 153), die in der Bildebene liegt und sich darauf in wahrer Größe abbildet, die Längeneinheit (1 cm) wiederholt ab und verbinden die Endpunkte der Einheitsstrecken mit H, so sind die von den Tiefenstrahlen auf PQ bestimmten Abschnitte bildgleich der Längeneinheit. Die Strecke PQ mit den einander gleichen Abschnitten bildet den **Höhenmaßstab für alle Höhenstrecken der gleichen Tiefe.** Das Auftragen von Höhen wird wesentlich vereinfacht durch die Anwendung der Höhenmaßstäbe.

Der Teilungspunkt für die Höhenlinien ist der Hauptpunkt.

[1]) Zeichne auch die zugehörige, in der Grundebene liegende Figur.

Die Maßeinheiten für die Höhenlinie PQ sind die gleichen wie die der Breitenlinie PR derselben Tiefe (Beweis! Vgl. die Perspektive eines Würfels in Frontansicht!). Es gilt daher der Satz:

Höhen- und Breitenlinien derselben Tiefe haben den gleichen Maßstab.

Von diesem Satze macht man Gebrauch, um bei Personen, die auf

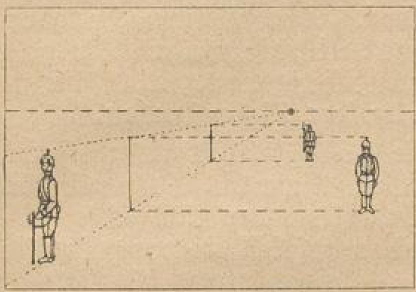


Fig. 154.

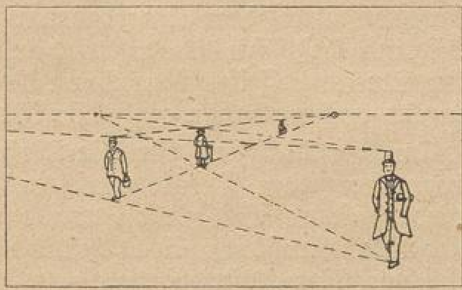


Fig. 155.

der Grundebene stehen, die Höhe von einer auf die andere zu übertragen (Fig. 154). Ein anderes allgemeineres Verfahren ist aus Fig. 155 ersichtlich.

c) Teilen und Messen von Tiefenstrecken. Tiefenmaßstäbe.

Aufgabe 6. Auf der Tiefenlinie $P_x H$, deren Urbild der Grundebene angehört, vom Punkte P aus die Strecke l perspektivisch abzutragen (Fig. 156).

Die Lösung erhellt sofort, wenn wir die Zeichnung in der Grundebene hinzufügen. Wir ziehen den Distanzstrahl $D_1 P$, dessen Verlängerung die Grundlinie in R trifft, tragen auf dieser $RS = l$ ab und verbinden S mit D_1. Die von den Distanzstrahlen RD_1 und SD_1 auf AH abgeschnittene Strecke PQ ist bildgleich $RS = l$.

Aufgabe 7. Die auf der Tiefenlinie $P_x H$ gelegene Bildstrecke PQ, deren Urbild der Grundebene angehört, a) in $n = 5$, b) im Verhältnis $m : n = 2 : 3$ perspektivisch zu teilen.

Die Lösungen ergeben sich leicht an der Hand der Zeichnung in der Grundebene (Fig. 156).

Zu a) Man ziehe die Distanzstrahlen $D_1 P$ und $D_1 Q$, die die Grundlinie in R und S treffen, teile RS in $n = 5$ gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit D. Die zu den Teilpunkten gehörigen Distanzstrahlen schneiden auf PQ $n = 5$ bildgleiche Abschnitte ab.

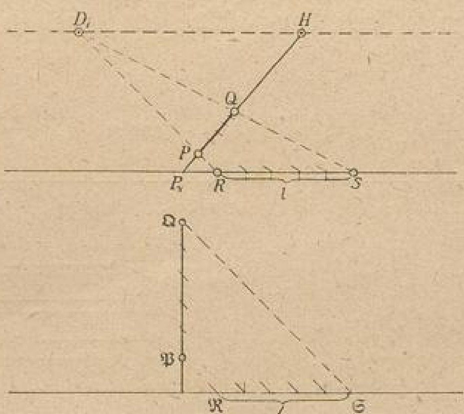


Fig. 156.

Aus den Lösungen der Aufgaben a) und b) folgt, daß die perspektivische Teilung von Tiefenstrecken mit Hilfe der Distanzpunkte geschieht. **Die Distanzpunkte sind deshalb die Teilungspunkte der Bildtiefenlinien** (vgl. Fig. 131).

Aufgabe 8. Die wahre Länge der Bildtiefenstrecke PQ, deren Urbild der Grundebene angehört, zu bestimmen (Fig. 156).

Als Umkehrung der Aufgabe 6 nimmt die Lösung der vorliegenden Aufgabe auch den umgekehrten Verlauf. Die Distanzstrahlen DP und DQ schneiden auf der Grundlinie die wahre Länge l der Strecke PQ im Maßstabe der Grundlinie aus. Die Distanzpunkte heißen daher auch die **Meßpunkte der Tiefenstrecken.**

Um den **Maßstab für die Tiefenlinie** 0H (Fig. 153) zu zeichnen, tragen wir vom Punkte 0 aus auf der Grundlinie die Längeneinheit wiederholt ab und ziehen von den Endpunkten der Einheitsstrecken die Distanzstrahlen nach D_1. Diese schneiden auf 0H die perspektivisch gleichen Einheitsstrecken ab.

Einen klaren Einblick in die Art und Weise, wie sich die Breiten-, Höhen- und Tiefenmaße nach hinten verjüngen, gewährt die in Fig. 153 gegebene Abbildung eines in der Grundebene und eines in einer Seitenebene (d. h. einer zur Grundlinie senkrechten Ebene) liegenden Netzes von Quadraten, deren Seitenlänge gleich der Längeneinheit 1 m des Grundmaßstabes ist. Die in Wirklichkeit gleich weit voneinander entfernten Breiten- und Höhenlinien rücken im Bilde immer näher zusammen.

Die Abbildung des in der Grundebene liegenden Quadratnetzes gibt die Möglichkeit, die Lage jedes Punktes der Grundebene aus seinem Bildpunkte zu bestimmen und umgekehrt. Wieviel Meter liegt z. B. der Bildpunkt M hinter der Bildebene und wieviel Meter rechts von der linken Begrenzungslinie? Gib das Bild des Punktes der Grundebene an, der 3 m rechts von der linken Begrenzungslinie und $2\frac{1}{2}$ m hinter der Bildebene liegt. Überzieht man Pläne von Straßenzügen, Gartenanlagen usw. mit einem solchen Netz von Quadraten, so kann man die Pläne leicht mit Hilfe des Netzes in Perspektive setzen.

3) Die perspektivischen Maßstäbe geben uns die Mittel an die Hand, die Perspektive eines beliebigen Gegenstandes, der durch seine Ausmessungen und seine Lage genau angegeben ist, unmittelbar zu zeichnen.

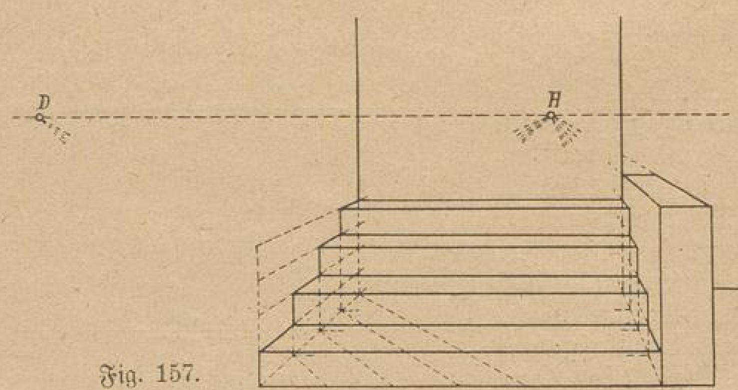


Fig. 157.

Aufgabe 9. Eine vierstufige einfache Treppe in Frontansicht zu zeichnen (Fig. 157).

Die erste Stufe liegt mit der vorderen Fläche in der Bildebene. Breite der Stufen 2,40 m, Höhe 0,20 m, Tiefe 0,40 m. Aughöhe 1,60 m und Augabstand 3 m. Maßstab der Zeichnung 1 : 50.

Lösung s. Zeichnung. In dieser ist rechts noch eine Wange von 1 m Höhe und 30 cm Breite gezeichnet.

Aufgabe 10. Einen zur Bildebene senkrechten Säulengang zu zeichnen.

Jede Säulenreihe werde von drei Säulen gebildet. Jede einzelne von diesen bestehe aus 7 würfelförmigen Quadern, deren Kantenlänge je 40 cm betrage. Der lichte Abstand der Säulen soll 2,40 m nach der Seite und nach der Tiefe betragen. Die Vorderfläche der ersten beiden Säulen liege 2 m hinter der Bildebene. Aughöhe 1,60; Distanz 4 m. Maßstab der Zeichnung 1 : 20.

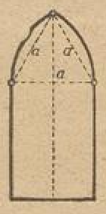


Fig. 158.

Aufgabe 11. Eine zur Bildebene senkrechte Bogenstellung (z. B. Fensterreihe mit Rund- oder Spitzbogen) in Perspektive zu setzen.

Zur Zeichnung eines Fensters mit Spitzbogen s. Fig. 158.

§ 38. Perspektivische Teilung beliebiger, der Grundebene angehörender Geraden. Teilungspunkt.

1) Aufgabe 1. Auf einer in der Grundebene gegebenen Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, die mit der Grundlinie den Winkel α bildet, ist die Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = l$ gegeben. Die Perspektive der Geraden samt der auf ihr liegenden Strecke zu zeichnen (Fig. 159).

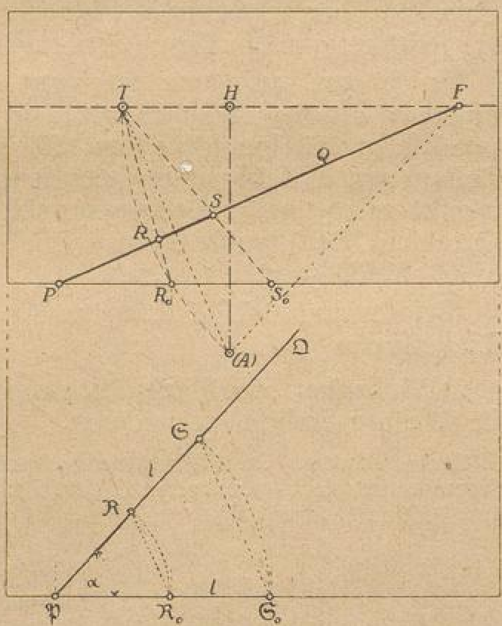


Fig. 159.

Mit Hilfe des herabgeschlagenen Augpunktes (A) ermitteln wir die durch den Fluchtpunkt F gehende Perspektive PQ der gegebenen Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, tragen auf der Grundachse $\mathfrak{P}\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{P}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$ ab und ziehen $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_0$. Die durch (A) zu diesen parallelen Verbindungsstrecken gezogene Parallele trifft den Horizont in T, ihrem gemeinsamen Fluchtpunkte. Verbinden wir ihre auf die Grundlinie hinaufgeloteten Spurpunkte R_0 und S_0 mit T, so schneiden R_0T und S_0T, die Perspektiven der durch $\mathfrak{R}_0\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}$ gehenden Geraden, auf PF die Strecke RS ab. Diese ist perspektivisch gleich der gegebenen Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = l$.

Ist die Bildgerade PQ, die den Horizont in F schneidet, und auf ihr der Punkt R gegeben, von dem aus die Strecke l perspektivisch abgetragen werden soll, so kann der für die Lösung wichtige Punkt T ohne Benutzung der Zeichnung in der Grundebene ermittelt werden. Denn Dreieck (A)TF ist ähnlich dem Dreieck $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_0\mathfrak{P}$ (Grund?) und, da dieses gleichschenklig ist, so muß TF = (A)F sein. Es ergibt sich daher der Punkt T, wenn wir auf dem Horizont vom Fluchtpunkte F der gegebenen Bildgeraden die Strecke FT = F(A) abtragen. Weiter ist R_0S_0 gleich $\mathfrak{R}_0\mathfrak{S}_0 = l$.

Aufgabe 2. Auf einer der Grundebene angehörenden Bildgeraden PQ vom gegebenen Punkte R eine der gegebenen Strecke l perspektivisch gleiche Strecke RS abzutragen (Fig. 160).

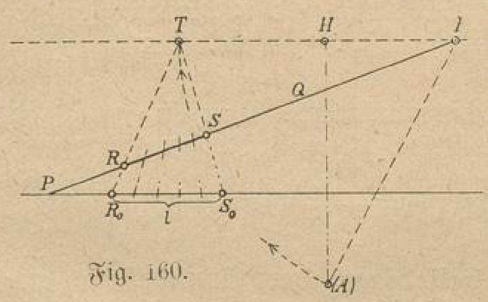


Fig. 160.

Trage auf der Aughöhenlinie FT = F(A) ab, verlängere die Verbindungsstrecke TR bis zum Schnittpunkt R_0 mit der Grundlinie und schneide auf dieser $R_0S_0 = l$ ab. S_0T trifft PT in S. Alsdann ist RS perspektivisch gleich $R_0S_0 = l$.

Aufgabe 3. Die Bildstrecke RS einer in der Grundebene liegenden Strecke a) in n = 5 gleiche Teile, b) im Verhältnis 2 : 3 zu teilen.

Lösung s. Fig. 160. Zum leichteren Verständnis und zur klaren Erfassung der Bedeutung des Punktes T führe gleichzeitig auch die Zeichnung in der Grundebene aus, trotzdem sie nicht erforderlich ist.

Ein solcher auf dem Horizont gelegener Punkt T, der nichts anderes als der Fluchtpunkt der in der Grundebene gelegenen parallelen Teilungsstrahlen ist und der zum perspektivischen Teilen von beliebigen in der Grundebene gelegenen Strecken verwandt wird, heißt Teilungspunkt und die von ihm ausgehenden Strahlen **Teilungsstrahlen.** Ein Teilungspunkt kann umgekehrt auch als **Meßpunkt** dienen.

Welches sind die Teilungspunkte der Breiten-, Höhen- und der Tiefenlinien?

2) Aufgabe. Die Perspektive eines Obelisken (s. § 34, Aufg. 11) in schräger Ansicht zu zeichnen.

Anmerkung. Durch Parallele, die man im Grundriß zu den beiden vorderen Grundkanten zieht, gewinnt man eine Teilung auf diesen, die man zunächst auf ihre Bilder überträgt usf.