Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 33. Perspektivische Darstellung ebener in der Grundebene gelegener Figuren.

überflüssig, die uns zugleich deutlich die Wichtigkeit der 45°-Linien für unsere Aufgabe zeigt. Der Sehstrahl $A\mathfrak{P}$ (Fig. 135) wird durch P im Verhältnis $AH : P_x P = d : t$, d. h. der Distanz zum Tiefenabstand des Punktes $\mathfrak{P}$ geteilt. Im gleichen Verhältnis wird auch $P_x H$ durch P geteilt, so daß wir P am einfachsten dadurch finden, daß wir auf der Aughöhenlinie $HD_2 = AH = d$ und auf der Grundlinie $P_x Q = P_x P = t$ abtragen und Q mit D_2 verbinden. Der Sehstrahl $A\mathfrak{P}$ ist also für die Lösung nicht erforderlich! Von welchen Sehstrahlenebenen sind $P_x H$ und QD_2 die Spuren?

Als Bildfläche benutzen wir im folgenden stets einen Teil der lotrecht gedachten Zeichenebene, der unten (Fig. 135) durch die Grundlinie $X_1 X_2$ begrenzt ist. Um gleichzeitig auch den Grundriß des abzubildenden Gegenstandes vor Augen zu haben, denken wir uns die Grundebene $\mathfrak{G}$ hinreichend weit nach vorn so verschoben, daß jeder Punkt in ihr sich senkrecht zur Bildebene bewegt, und dann um ihre Schnittgerade mit $\mathfrak{B}$ in die Zeichenebene nach unten geklappt (Fig. 136). Dadurch ermöglichen wir das Zeichnen in einer Ebene. Jedoch ist es unbedingt erforderlich, sich dauernd die wahre Lage vor Augen zu halten.

Wird in der angegebenen Weise für unsere Grundaufgabe die Grundebene mit der Bildebene vereinigt, so ergibt sich die Darstellung in Fig. 136. Die Lösung der Grundaufgabe gestaltet sich nunmehr folgendermaßen:

Wir ziehen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_x$ senkrecht zu $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ unter einem Winkel von 45° zu $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, loten $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{Q}$ auf die Grundlinie $X_1 X_2$ hinauf und verbinden P_x mit dem Hauptpunkt H und Q mit dem zugehörigen Distanzpunkt D_2. Der Schnittpunkt der Verbindungsstrecken ist der gesuchte Punkt P.

Weil $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_x$ ist, so ergibt sich auch $\mathfrak{Q}$, wenn auf der Grundachse $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ von $\mathfrak{P}_x$ $\mathfrak{P}_x\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_x\mathfrak{P}$, gleich der Tiefe des gegebenen Punktes, abgetragen wird.

Statt des rechten Distanzpunktes hätte auch der linke benutzt werden dürfen. Welches ist die Abbildung des in der Grundebene gelegenen Dreiecks $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_x\mathfrak{P}$?

2) Übungsaufgaben. Die Perspektive a) einer beliebig in der Grundebene liegenden Strecke $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$, b) eines beliebig in der Grundebene gelegenen Dreiecks $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ zu zeichnen.

§ 33. Perspektivische Darstellung ebener in der Grundebene gelegener Figuren.

1) Aufgabe 1. Die Perspektive eines in der Grundebene gelegenen Rechtecks $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{O}$, dessen Seiten $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$ der Grundlinie parallel sind, zu zeichnen[1]) (Fig. 137).

[1]) Bei der Anfertigung von Zeichnungen ist es vielleicht zu empfehlen, statt der schwer in Druckform zu gebenden deutschen Buchstaben kleine lateinische zu benutzen.

Wir verlängern die Tiefenstrecken $\mathfrak{L}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ bis zu ihren Schnittpunkten $\mathfrak{L}_x$ und $\mathfrak{M}_x$ mit der Grundachse $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ und loten diese Punkte auf die Bildachse X_1X_2 hinauf. Die Perspektiven der Tiefenstrecken $\mathfrak{L}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ liegen dann auf den nach dem Hauptpunkt H gehenden Strecken L_xH und M_xH. Die Bilder L und M der Punkte $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ finden wir durch Abbildung der durch diese Punkte gelegten 45°-Linien $\mathfrak{L}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}$. Weil Breitenlinien im Bilde auch als solche erscheinen, haben wir nur noch durch L und O zur Bildachse die Parallelen zu ziehen, die M_xH in M und N treffen. Das Trapez LMNO ist das Bild des gegebenen Rechtecks.

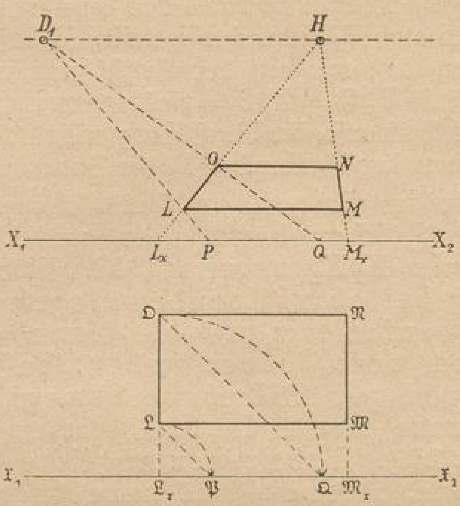
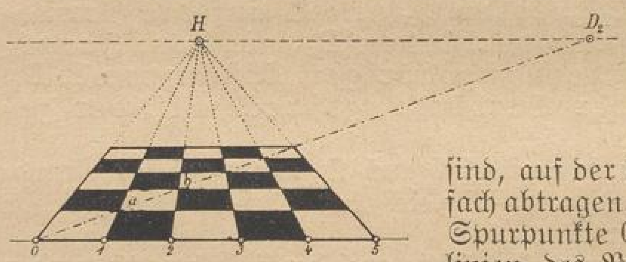


Fig. 137.

Aufgabe 2. Das perspektivische Bild eines in der Grundebene liegenden Q u a d r a t n e t z e s (z. B. eines quadratisch gefelderten Fußbodens) zu zeichnen (Fig. 138).

Die erste Reihe der quadratischen Felder stoße unmittelbar an die Grundlinie. Ihre vorderen Seiten bilden sich deshalb in wahrer Größe ab. Ihre Bilder ergeben sich also, wenn wir die Seite eines quadratischen Feldes, von denen einige an der G r u n d a c h s e[1]) (Spurlinie) in wahrer Größe gezeichnet sind, auf der Grundlinie X_1X_2 mehrfach abtragen. Damit erhalten wir die Spurpunkte 0, 1, 2, 3 . . . der Tiefenlinien des Netzes, deren Bilder im Hauptpunkt H zusammenlaufen. Die Breitenlinien des Netzes werden auch im Bilde Breitenlinien. Zu ihrer Bestimmung genügt, falls die Gesamtheit aller Quadrate ein großes Quadrat darstellt, die Abbildung e i n e r einzigen Diagonale des großen Quadrates, etwa der von Punkt 0 ausgehenden, deren Fluchtpunkt wegen ihrer Eigenschaft als 45°-Linie der rechte Distanzpunkt ist. Werden jetzt durch die Schnittpunkte (z. B. a und b) von $\overline{0D_2}$ mit den Perspektiven der Tiefenlinien die Breitenlinien gezogen, so ist die Abbildung des Netzes fertig. (Genauigkeitsprobe mit Hilfe des Distanzstrahles $\overline{5D_1}$!)



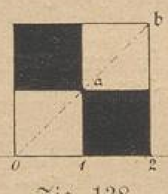


Fig. 138.

[1]) Das ist die im folgenden angewandte Bezeichnung für $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ (s. Fig. 136).

Das Quadratnetz hat zwei Scharen paralleler Diagonalen. Welches sind ihre Fluchtpunkte?

2) Die Perspektive beliebiger in der Grundebene gelegener (oder ihr paralleler) Vielecke kann stets durch mehrfache Anwendung der Grundaufgabe ermittelt werden. Dabei werden nur der Hauptpunkt und die Fluchtpunkte der 45°-Linien, die Distanzpunkte, benutzt. Kommen aber Parallelen von beliebiger Richtung vor, so ist die Verwendung ihres Fluchtpunkts für eine genaue und rasche Zeichnung geradezu geboten.

Aufgabe 3. Das perspektivische Bild einer beliebig in der Grundebene gelegenen Geraden ST zu bestimmen.

Ziehen wir durch den Augpunkt A (s. Schrägbild Fig. 139a) den Parallelstrahl zu ST, der die Bildebene im Punkte F auf der Aughöhenlinie trifft, so ist F der Fluchtpunkt der Geraden ST und die Verbindungsstrecke ihres Spurpunktes S mit F ist ihr Bild.

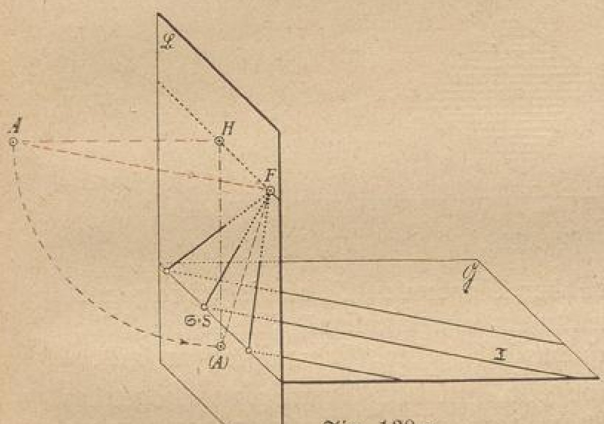


Fig. 139 a.

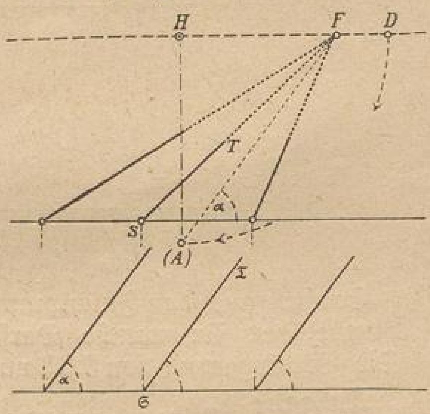


Fig. 139 b.

Um die Zeichnung in einer Ebene ausführen zu können, denken wir uns das rechtwinklige Dreieck AHF in die Bildebene herabgeschlagen, so daß der Augpunkt in die Lage (A) kommt, und die Grundebene in der vorher angegebenen Weise mit der Bildebene vereinigt (Fig. 139b). Dabei bleibt (A) F || ST.

Die Lösung gestaltet sich danach folgendermaßen: Man zeichne H(A) (Fig. 139b) gleich der Distanz HD senkrecht zur Aughöhenlinie, ziehe durch den „herabgeschlagenen Augpunkt" (A) die Parallele zu ST, die die Aughöhenlinie in F trifft, und lote den Spurpunkt S auf die Grundlinie X_1X_2 hinauf. SF ist alsdann das Bild der Geraden ST. Wie findet man die Bilder der zu ST parallelen Geraden in Fig. 139a und b?

Die angegebene Bestimmung des Fluchtpunktes F gilt auch dann, wenn ST nicht in der Grundebene liegt, sondern ihr parallel ist.

Aufgabe 4. Die Perspektive eines in der Grundebene beliebig liegenden Quadrates zu bestimmen (Fig. 140).

Wir schlagen den Hauptstrahl HA, der die als bekannt vorausgesetzte Distanz angibt, in die Bildebene herab und ermitteln nach Aufg. 3 die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der durch die parallelen Seiten des Quadrates 𝔏𝔐𝔑𝔒 bestimmten Geraden. Durch Verlängern der parallelen Seiten 𝔏𝔐, 𝔒𝔑 und 𝔏𝔒, 𝔐𝔑 finden wir ihre Spuren (1), (2), (3), (4) auf der Grundachse, die wir durch Hinaufloten auf die Grundlinie übertragen. Das von den vier Fluchtstrahlen $\overline{1F_2}$, $\overline{2F_2}$, $\overline{3F_1}$ und $\overline{4F_1}$ begrenzte Viereck ist die gesuchte Abbildung.

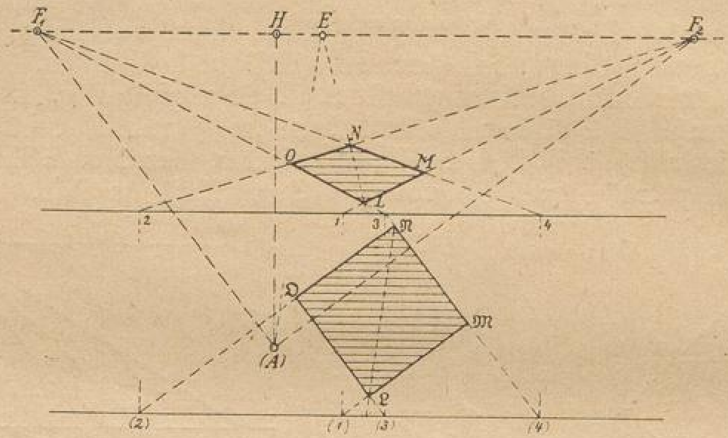


Fig. 140.

Ermittle auch den Fluchtpunkt E der Diagonale 𝔏𝔑, den sog. Diagonalpunkt, der für manche Darstellungen ein wichtiges Hilfsmittel bildet. Die Verlängerung von LN muß durch E gehen (Genauigkeitsprobe!).

Aufgabe 5. Die Perspektive eines in der Grundebene liegenden regelmäßigen Sechsecks, von dem ein Seitenpaar der Grundlinie parallel ist, zu zeichnen.

Mit Einrechnung der Hauptdiagonalen kommen drei Parallelenscharen vor!

Aufgabe 6. Einen Fußboden mit regelmäßigen sechseckigen Feldern in Perspektive zu setzen.

3) Das perspektivische **Bild einer Kurve** ergibt sich dadurch, daß man eine hinreichend große Anzahl von Kurvenpunkten abbildet und die erhaltenen Bildpunkte durch einen zusammenhängenden Kurvenzug verbindet.

Aufgabe 7. Einen in der Grundebene liegenden Kreis in Perspektive zu setzen (Fig. 141).

Wir zeichnen das dem Kreise umgeschriebene Quadrat 𝔏𝔐𝔑𝔒, dessen Seiten der Breiten- und Tiefenrichtung parallel sind und den Kreis in den Punkten 1, 2, 3, 4 berühren. Dieses Quadrat bilden wir samt den Diagonalen, die den Kreis in den Punkten 5, 6, 7, 8 treffen, mit Hilfe des Distanzpunktes D_1 ab.[1]) Damit erhalten wir auch die

[1]) Es braucht dabei nur ein Distanzstrahl, nämlich LD_1, auf dem das Bild der Diagonale LP liegt, verwandt zu werden.

Bilder der Punkte 1, 2, 3, 4 und die der Tangenten in diesen Punkten. Die Bilder der Punkte 5, 6, 7, 8 liegen auf den bereits abgebildeten Diagonalen, ferner auf den Perspektiven der durch die Punktpaare 8, 5 und 6, 7 gehenden Tiefenlinien. Die Abbildung der 8 Kreispunkte samt den Tangenten in den Hauptpunkten 1, 2, 3, 4 genügt, um die Perspektive der Kurve, die hier eine Ellipse ist, mit hinreichender Genauigkeit zu zeichnen.

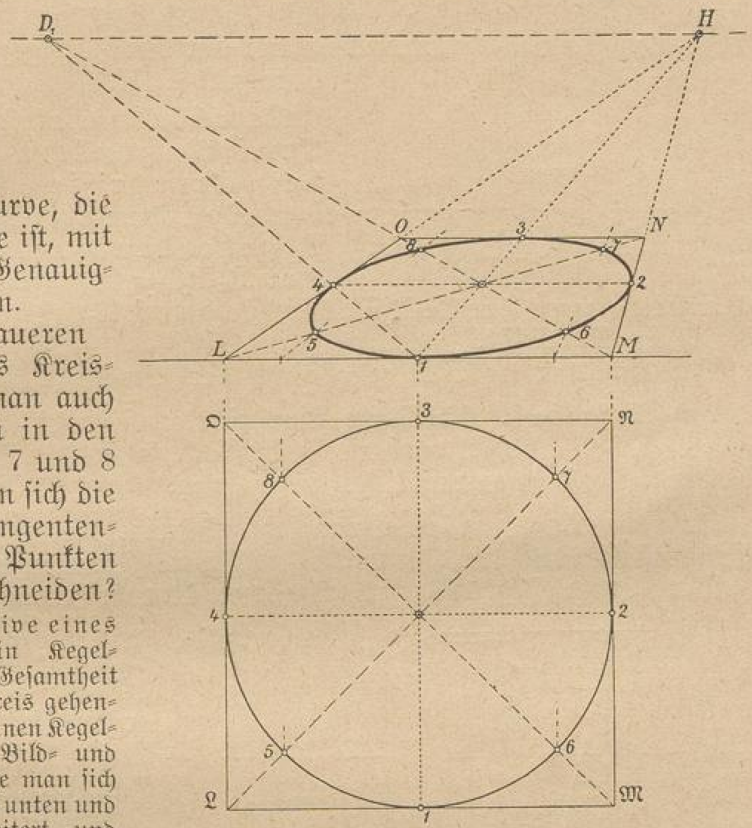


Fig. 141.

Zur genaueren Zeichnung des Kreisbildes bilde man auch die Tangenten in den Punkten 5, 6, 7 und 8 ab. Wo müssen sich die Bilder der Tangentenpaare in den Punkten 5, 7 und 6, 8 schneiden?

Die Perspektive eines Kreises ist ein Kegelschnitt, da die Gesamtheit der nach dem Kreis gehenden Sehstrahlen einen Kegelmantel bilden. Bild- und Grundebene denke man sich entsprechend nach unten und nach vorn erweitert und den in der Grundebene liegenden Kreis auch nach vorn vor die Grundlinie verschoben, so daß er die durch den Grundriß des Augpunktes zur Grundlinie gezogene Parallele, die „Fluchtlinie" der Bildebene, 1. nicht schneidet, 2. berührt und 3. schneidet. In welchem Falle ist seine Perspektive eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel?

§ 34. Die zweite Grundaufgabe. Perspektivische Darstellung einfacher Körper.

1) **Zweite Grundaufgabe. Die Perspektive eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, dessen Grundriß $\mathfrak{P}_1$ und Abstand von der Grundebene gegeben sind** (Fig. 142).

Das Bild des Grundrisses $\mathfrak{P}_1$ kann ohne weiteres nach der ersten Grundaufgabe bestimmt werden. Da die Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ senkrecht zur Grundebene ist, so muß auch ihre Perspektive als Höhenlinie erscheinen und kann daher ihrer Richtung nach schon gezeichnet werden. Denken wir uns durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ die Tiefenlinien gezogen, die $\mathfrak{B}$ in P_x und P_0 treffen (Schrägbild!), so ist $P_x\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}P_0$ ein Rechteck, dessen