Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 34. Die zweite Grundaufgabe. Perspektivische Darstellung einfacher Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Bilder der Punkte 1, 2, 3, 4 und die der Tangenten in diesen Punkten. Die Bilder der Punkte 5, 6, 7, 8 liegen auf den bereits abgebildeten Diagonalen, ferner auf den Perspektiven der durch die Punktpaare 8, 5 und 6, 7 gehenden Tiefenlinien. Die Abbildung der 8 Kreispunkte samt den Tangenten in den Hauptpunkten 1, 2, 3, 4 genügt, um die Perspektive der Kurve, die hier eine Ellipse ist, mit hinreichender Genauigkeit zu zeichnen.

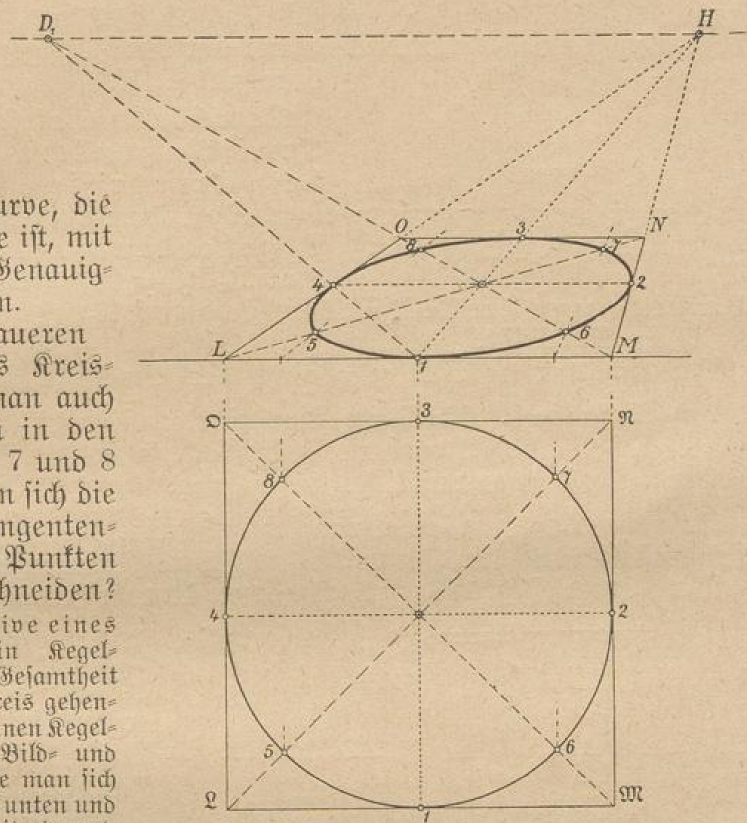

Fig. 141.

Zur genaueren Zeichnung des Kreisbildes bilde man auch die Tangenten in den Punkten 5, 6, 7 und 8 ab. Wo müssen sich die Bilder der Tangentenpaare in den Punkten 5, 7 und 6, 8 schneiden?

Die Perspektive eines Kreises ist ein Kegelschnitt, da die Gesamtheit der nach dem Kreis gehenden Sehstrahlen einen Kegelmantel bilden. Bild- und Grundebene denke man sich entsprechend nach unten und nach vorn erweitert und den in der Grundebene liegenden Kreis auch nach vorn vor die Grundlinie verschoben, so daß er die durch den Grundriß des Augpunktes zur Grundlinie gezogene Parallele, die „Fluchtlinie" der Bildebene, 1. nicht schneidet, 2. berührt und 3. schneidet. In welchem Falle ist seine Perspektive eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel?

§ 34. Die zweite Grundaufgabe. Perspektivische Darstellung einfacher Körper.

1) Zweite Grundaufgabe. Die Perspektive eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, dessen Grundriß $\mathfrak{P}_1$ und Abstand von der Grundebene gegeben sind (Fig. 142).

Das Bild des Grundrisses $\mathfrak{P}_1$ kann ohne weiteres nach der ersten Grundaufgabe bestimmt werden. Da die Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ senkrecht zur Grundebene ist, so muß auch ihre Perspektive als Höhenlinie erscheinen und kann daher ihrer Richtung nach schon gezeichnet werden. Denken wir uns durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ die Tiefenlinien gezogen, die $\mathfrak{B}$ in P_x und P_0 treffen (Schrägbild!), so ist $P_x\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}P_0$ ein Rechteck, dessen

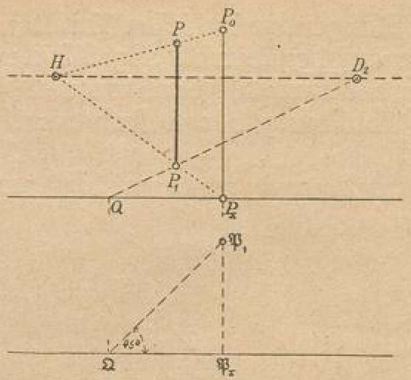

Fig. 142.

in $\mathfrak{B}$ gelegene Seite $P_x P_0$, der Aufriß von $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$, sich in wahrer Größe abbildet. Da die Tiefenstrecke $P_0 P$ ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkte hat, so ergibt sich das Bild P von $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt der durch P_1 gezogenen Höhenlinie mit $P_0 H$.

Danach haben wir folgende Lösung: Ermittle zunächst das Bild P_1 des Grundrisses $\mathfrak{P}_1$, errichte im Spurpunkte P_x des durch P_1 gehenden Hauptstrahls das Lot $P_x P_0 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ und ziehe die Verbindungsstrecke $P_0 H$, die die durch P_1 gehende Höhenlinie in P trifft.

$P_1 P$ ist „perspektivisch gleich" der Strecke $P_x P_0 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$.

2 a) **Aufgabe 1.** Die Perspektive eines auf der Grundebene ruhenden Würfels, dessen vordere Seitenfläche a) in der Bildebene liegt, b) der Bildebene parallel ist, zu zeichnen.

Aufgabe 2. Eine quadratische Säule, die auf quadratischer Grundplatte steht, in Perspektive zu setzen (Frontansicht!).

Der Körper (Fig. 143) ist durch seinen Grundriß und die Höhen der Grundplatte und der Säule gegeben. Die Abbildung der Grundfläche ergibt sich in bekannter Weise mit Hilfe zweier Hauptstrahlen und eines Distanzstrahles.

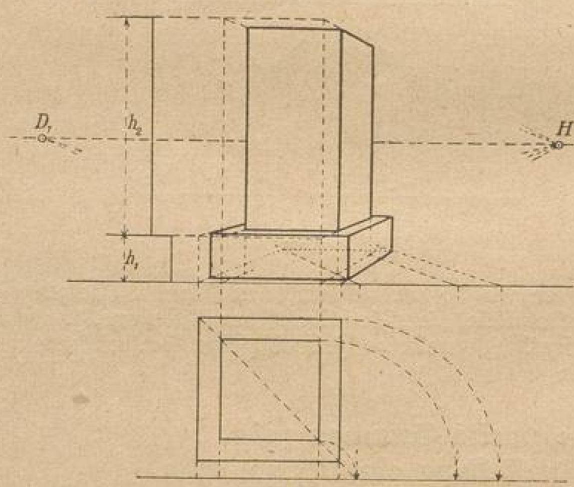

Fig. 143.

Bemerkung. Die Abbildung von wagerechten Flächen gestattet einen Einblick in die Gestaltungseigentümlichkeiten des perspektivischen Bildes. Auf wagerechte Flächen, die unter Aughöhe liegen, hat man im Bilde „Aufsicht", auf höherliegende „Untersicht". Wie bilden sich wagerechte Flächen in Aughöhe ab? Man bilde z. B. einen Quader in Frontstellung ab und zeichne eine Anzahl wagerechter Schnitte.

Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide, die auf ihrer Grundfläche ruht, in Perspektive zu setzen.

Von dem Körper ist die Grundfläche ihrer Lage nach in der Grundebene und die Höhe h gegeben. Nach Abbildung der Grundfläche und ihres Mittelpunktes M bestimmt man nach der zweiten Grundaufgabe das Bild der Spitze.

Aufgabe 4. Das perspektivische Bild eines Kreiskegels, der auf der Grundfläche ruht, zu zeichnen.

Der Kegel ist durch die Lage des Mittelpunktes M des Grundkreises in der Grundebene, dessen Radius r und die Höhe h gegeben. Nach Abbildung des Grundkreises und der Spitze zieht man von S, dem Bilde der Spitze, an die Perspektive des Grundkreises die Tangenten, die die Umrißlinien auf dem Mantel darstellen.

Will man die Umrißmantellinien konstruieren, so ist zu beachten, daß sie die Berührungslinien der durch den Augpunkt A an den Kegel gelegten Sehstrahlenebenen bilden (Schrägbild!). Ihre Schnittgerade AS trifft die Grundebene im Punkte T, den man durch Umlegung der Strecke AS um ihren Grundriß in die Grundebene G leicht finden kann. Die von T an den Grundkreis gezogenen Tangenten bestimmen die Berührungspunkte der Sehstrahlenebenen auf dem Grundkreis.

Aufgabe 5. Eine regelmäßig-sechsseitige Säule, die auf der Grundebene steht, in Perspektive zu setzen. Vgl. § 33 Aufg. 5.

Aufgabe 6. Einen auf der Grundebene stehenden geraden Kreiszylinder in Perspektive zu setzen.

Der Zylinder ist durch die Lage des Mittelpunktes M und den Radius r des Grundkreises, ferner durch die Höhe h gegeben. Unter Benutzung des umgeschriebenen Quadrates, von dem ein Seitenpaar der Grundlinie parallel ist, bildet man zunächst den Grundkreis ab und bestimmt dann das Bild des dem Zylinder umgeschriebenen regelmäßig-vierseitigen Prismas. In das Bild der Deckfläche des Prismas zeichnet man nach Ermittlung wichtiger Bildpunkte die Perspektive des Deckkreises ein. Schließlich zieht man an die beiden Ellipsen, die sich als die Perspektiven der Grund- und Deckfläche ergeben, die gemeinsamen Tangenten, die die Umrißmantellinien, durch die der Körper seitlich begrenzt erscheint, darstellen (Konstruktion!). Die Tangenten müssen parallel zur Zylinderachse sein, was für die Genauigkeitsprobe der Zeichnung von Wichtigkeit ist.

Aufgabe 7. Eine zylindrische Säule a) auf quadratischer, b) auf zylindrischer Grundplatte in Perspektive zu setzen.

b) **Aufgabe 8.** Das perspektivische Bild eines auf der Grundebene stehenden Quaders in Übereckstellung zu zeichnen.

Zur Abbildung der zur Grundebene parallelen Strecken benutzt man ihre Fluchtpunkte, die ja auf der Aughöhenlinie liegen. Die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der zur Grundebene parallelen Kanten und der „Diagonalfluchtpunkt" werden mit Hilfe des umgelegten Augpunktes bestimmt. Zur Lösung vgl. § 33 Aufgabe 4.

Aufgabe 9. Die Perspektive einer quadratischen Säule, die auf einem quadratischen Sockel steht, in schräger Ansicht zu zeichnen.

Aufgabe 10. Die Perspektive eines Hauses mit Walmdach in schräger Ansicht zu bestimmen (Fig. 144).

Von den Umrissen des Hauses ist der Grundriß vollständig gegeben. Vom Aufriß dagegen ist nur so viel über der Grundlinie, und zwar in gerader Ansicht, gezeichnet, als zur Entnahme der Höhe der First-linie und der lotrechten Hauskanten erforderlich ist. Lösung s. Fig.

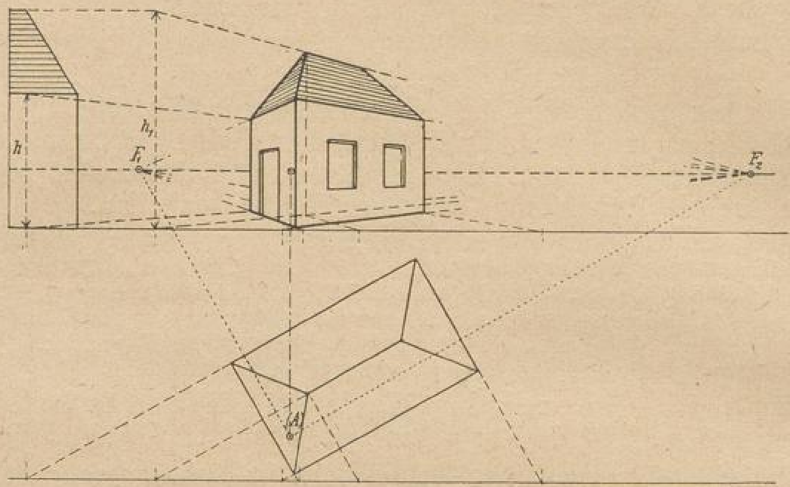

Fig. 144.

Aufgabe 11. Das perspektivische Bild eines quadratischen Obelisken samt Sockel und aufgesetzter Pyramide a) in Frontstellung, b) in Übereckstellung zu entwerfen.

Von dem Körper ist in Fig. 145 die Hälfte des Aufrisses in Frontansicht gezeichnet. Der Grundriß ist durch die beigefügten Maße (cm) mit gegeben, da der Querschnitt quadratisch ist.

Bemerkung. Freistehende Gegenstände bildet man gern in schräger Stellung (Übereckstellung) ab, weil die Bilder so einen frischen und natürlichen Eindruck machen. Im Gegensatz dazu wirken die Frontalansichten solcher Gegenstände oft steif und gezwungen. Das rührt daher, daß die Frontfiguren sämtlich durch ähnliche abgebildet werden, während die unmittelbar anstoßenden seitlichen Figuren im Bilde stark verzerrt erscheinen. Für Innenansichten jedoch ist die Frontansicht vorzuziehen.

Fig. 145.

3) **Aufgabe 12.** Die Perspektive einer auf der Grundebene ruhenden Kugel, die die Bildebene berührt, zu entwerfen.

Bevor wir zur Lösung übergehen, ist eine kurze geometrische Betrachtung erforderlich. Fig. 146 stellt den Achsenschnitt eines Kreiskegels dar, der von einer beliebigen Ebene B geschnitten wird, die mit dem Achsenschnitt die Linie AB gemeinsam hat. In den Kegel denken wir uns die Berührungskugeln K und K_1 gelegt, die die Schnittebene B in F_1 und F_2 berühren (vgl. L. II. § 51, 2). Betrachten wir die Spitze S des Kegels als den Augpunkt, die Kugel K als die abzubildende Kugel und B als die Bildebene, so sind die die Kugelfläche berührenden Sehstrahlen nichts anderes als die Mantellinien des Kegels. Ihr Schnitt mit B ist das Umrißbild der Kugel. Dieser Schnitt ist (Bew. s. L. II. § 51, 2) eine Ellipse mit den Brennpunkten

F_1 und F_2. Verlängern wir den Sehstrahl $S F_2$ bis zum zweiten Schnittpunkt F' mit der Kugel K, so ist, weil S äußerer Ähnlichkeitspunkt für die beiden Berührungskugeln ist, $K F' \parallel K_1 F_2$ und, da $K_1 F_2 \perp A B$ ist, ebenfalls senkrecht zu $A B$. Daher liegt $K F'$ in der Verlängerung des zu $A B$ senkrechten Kugelradius $K F_1$. Damit erhalten wir den für die Konstruktion der Umrißellipse wichtigen Satz:

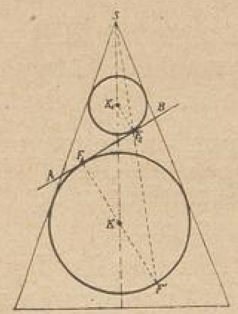

Fig. 146.

Die Perspektive einer Kugel ist im allgemeinen eine Ellipse. Ihre Brennpunkte sind die Bilder der Endpunkte des zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers.

Lösung. (Fig. 147.) Wir bestimmen zunächst unter Benutzung der umgeschriebenen Quadrate die Perspektiven der drei Hauptkreise, nämlich des wagrechten, des zu B senkrechten und des frontalen Kreises. $B_1 B_2$ ist das Bild der frontalen, $N_1 N_2$ das der lotrechten

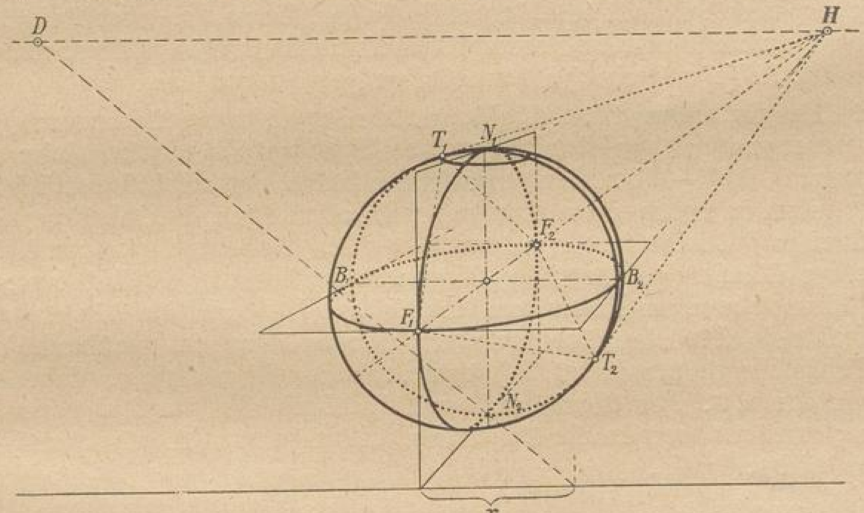

Fig. 147.

Achse des Achsenkreuzes der Kugel. Die Endpunkte der Tiefenachse ergeben die Brennpunkte F_1 und F_2 der gesuchten Umrißellipse. Der Mittelpunkt M von $F_1 F_2$ ist der Mittelpunkt der großen Achse. Um die Kurve aus ihren Hauptachsen bestimmen zu können, ist noch ein Bestimmungsstück nötig, z. B. die Kenntnis eines Punktes der Kurve. Ziehen wir in irgendeinem Punkte des Frontalkreisbildes $B_1 N_2 B_2 N_1$ die Hauptstrahlen, z. B. in B_1 und B_2 $B_1 H$ und $B_2 H$, so geben diese Randtangenten die Richtung an, in der das Bild des Breitenkreises das Bild des frontalen Hauptkreises schneidet. Unter den sämtlichen Breitenkreisen gibt es zwei, nämlich den durch T_1 und den durch T_2, bei denen je eine Randtangente zugleich Tangente des frontalen Hauptkreises ist. Die von H an diesen Kreis gezogenen

Tangenten HT_1 und HT_2 bestimmen also die Punkte T_1 und T_2, in denen die Tangenten des Kreises mit der Umrißellipse zusammenfallen. Die Berührungspunkte T_1 und T_2 sind somit Punkte der gesuchten Ellipse, und die Summe der Brennstrahlen von T_1 (oder T_2), $T_1F_1 + T_1F_2 = 2a$, liefert uns jetzt die Länge der großen Achse $2a$. Daraus kann die kleine Achse und schließlich die Umrißellipse bestimmt werden.

Um die Anschaulichkeit des erhaltenen Bildes zu heben, teile man den lotrechten Durchmesser in eine Anzahl perspektivisch gleicher Teile, lege durch die Teilpunkte wagerechte Schnittebenen, die die Kugel in Parallelkreisen schneiden, und bilde diese ab. Die Perspektiven dieser Kreise sind Ellipsen. Die sie umhüllende Ellipse ist die Umrißfigur der Kugel.

Bemerkung 1. Ebenso wie die Kugel kann jeder auf wagerechter Unterlage ruhende Umdrehungskörper (z. B. eine Schale oder Vase), der durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse entstanden ist, durch Abbildung wagerechter Schnitte abgebildet werden. Denn jeder wagerechte Schnitt des Körpers ist ein sog. Parallel- oder Breitenkreis. Für die Darstellung braucht von einem Umdrehungskörper nur die Lage der Achse und ein Halbmeridian gegeben zu sein.

2. Die zentralprojektive Abbildung der Kugel findet Anwendung bei der **stereographischen Projektion der Erdoberfläche.** Bei dieser von Hipparch (160—125 v. Chr.) ersonnenen Abbildungsart befindet sich der Augpunkt A in irgend einem Punkte der Erdoberfläche; als Bildebene dient die Berührungsebene im Gegenpunkte von A. So nimmt man zur Abbildung der südlichen Halbkugel den Augpunkt im Nordpol, als Bildebene die Berührungsebene im Südpol an. Wie bilden sich dabei die Längen- und Breitenkreise ab? Diese Abbildungsart, die man besonders zur Darstellung der Erdhalbkugeln verwendet, besitzt zwei wichtige Eigenschaften. Erstens ist sie winkeltreu, d. h. die Winkel auf der Kugeloberfläche sind gleich denen im Bilde; zweitens werden alle Kugelkreise, die nicht durch A gehen, auch im Bilde wieder Kreise.

§ 35. Verfahren beim Hinausfallen eines Distanz- oder anderen Fluchtpunktes.

1) Bei der perspektivischen Darstellung größerer Gegenstände muß die Augdistanz entsprechend größer gewählt werden, da sonst starke Verzerrungen in der Zeichnung auftreten, die aus Schönheitsrücksichten möglichst vermieden werden müssen. Infolgedessen fallen dann häufig die Distanzpunkte über die Grenzen der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche hinaus. In solchen Fällen benutzt man Teile der Distanz und bezeichnet, je nachdem man vom Hauptpunkt die Hälfte, ein Drittel oder ein Viertel der Distanz abträgt, die erhaltenen **Teildistanzpunkte** D_t als Halb-, Drittel- oder Vierteldistanzpunkte $\left(D_{(\frac{1}{2})}, D_{(\frac{1}{3})}, D_{(\frac{1}{4})}\right)$.

Aufgabe. Das Bild eines in der Grundebene gelegenen Punktes P