Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 35. Verfahren beim Hinausfallen eines Distanz- oder anderen Fluchtpunktes.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Tangenten HT_1 und HT_2 bestimmen also die Punkte T_1 und T_2, in denen die Tangenten des Kreises mit der Umrißellipse zusammenfallen. Die Berührungspunkte T_1 und T_2 sind somit Punkte der gesuchten Ellipse, und die Summe der Brennstrahlen von T_1 (oder T_2), $T_1F_1 + T_1F_2 = 2a$, liefert uns jetzt die Länge der großen Achse $2a$. Daraus kann die kleine Achse und schließlich die Umrißellipse bestimmt werden.

Um die Anschaulichkeit des erhaltenen Bildes zu heben, teile man den lotrechten Durchmesser in eine Anzahl perspektivisch gleicher Teile, lege durch die Teilpunkte wagerechte Schnittebenen, die die Kugel in Parallelkreisen schneiden, und bilde diese ab. Die Perspektiven dieser Kreise sind Ellipsen. Die sie umhüllende Ellipse ist die Umrißfigur der Kugel.

Bemerkung 1. Ebenso wie die Kugel kann jeder auf wagerechter Unterlage ruhende Umdrehungskörper (z. B. eine Schale oder Vase), der durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse entstanden ist, durch Abbildung wagerechter Schnitte abgebildet werden. Denn jeder wagerechte Schnitt des Körpers ist ein sog. Parallel- oder Breitenkreis. Für die Darstellung braucht von einem Umdrehungskörper nur die Lage der Achse und ein Halbmeridian gegeben zu sein.

2. Die zentralprojektive Abbildung der Kugel findet Anwendung bei der **stereographischen Projektion der Erdoberfläche.** Bei dieser von Hipparch (160—125 v. Chr.) ersonnenen Abbildungsart befindet sich der Augpunkt A in irgend einem Punkte der Erdoberfläche; als Bildebene dient die Berührungsebene im Gegenpunkte von A. So nimmt man zur Abbildung der südlichen Halbkugel den Augpunkt im Nordpol, als Bildebene die Berührungsebene im Südpol an. Wie bilden sich dabei die Längen- und Breitenkreise ab? Diese Abbildungsart, die man besonders zur Darstellung der Erdhalbkugeln verwendet, besitzt zwei wichtige Eigenschaften. Erstens ist sie winkeltreu, d. h. die Winkel auf der Kugeloberfläche sind gleich denen im Bilde; zweitens werden alle Kugelkreise, die nicht durch A gehen, auch im Bilde wieder Kreise.

§ 35. Verfahren beim Hinausfallen eines Distanz- oder anderen Fluchtpunktes.

1) Bei der perspektivischen Darstellung größerer Gegenstände muß die Augdistanz entsprechend größer gewählt werden, da sonst starke Verzerrungen in der Zeichnung auftreten, die aus Schönheitsrücksichten möglichst vermieden werden müssen. Infolgedessen fallen dann häufig die Distanzpunkte über die Grenzen der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche hinaus. In solchen Fällen benutzt man Teile der Distanz und bezeichnet, je nachdem man vom Hauptpunkt die Hälfte, ein Drittel oder ein Viertel der Distanz abträgt, die erhaltenen **Teildistanzpunkte** D_t als Halb-, Drittel- oder Vierteldistanzpunkte $\left(D_{(\frac{1}{2})}, D_{(\frac{1}{3})}, D_{(\frac{1}{4})}\right)$.

Aufgabe. Das Bild eines in der Grundebene gelegenen Punktes P zu bestimmen, wenn auf der Zeichenfläche nur ein Drittel der Distanz auf der Aughöhenlinie abgetragen werden kann (Fig. 148).

Bestimmen wir wie früher das Bild P in der erweitert gedachten Zeichenebene mit Hilfe des Distanzpunktes D, so wird durch P der Hauptstrahl $P_x H$ im Verhältnis des Tiefenabstandes $\mathfrak{P}_x\mathfrak{P} = t$ des gegebenen Punktes $\mathfrak{P}$ zur Distanz d geteilt, also $P_x P : PH = t : d$. Um nun $P_x H$ im gleichen Verhältnis zu teilen, wenn $HD_t = \frac{1}{3} d$ auf der Aughöhenlinie gegeben ist, tragen wir auf der Grundlinie von P_x $P_x R = \frac{1}{3} t$ ab. Durch die Verbindungsstrecke RD_t wird dann $P_x H$ ebenfalls im Verhältnis $t : d$ geteilt (Beweis!). Der erhaltene Teilpunkt fällt also mit dem nach der ersten Grundaufgabe bestimmten Punkte P zusammen.

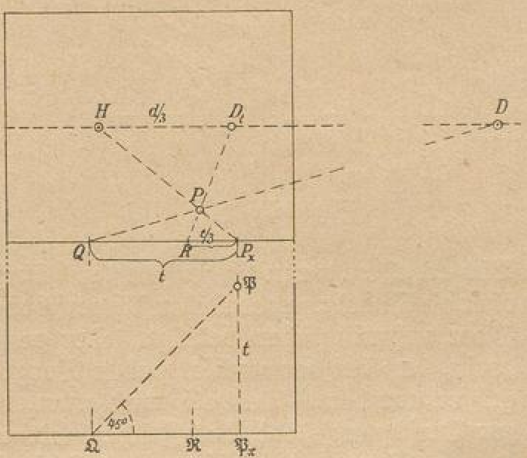

Fig. 148.

Löse auch die Aufgabe, wenn nur $\frac{1}{4}$ der Distanz benutzt werden kann.

Löse zur Übung die Aufgaben §§ 33 und 34 mit Hilfe von Halb- und Vierteldistanzpunkten.

2) Bei Darstellungen in schräger Ansicht kommt häufig ein Hauptfluchtpunkt außerhalb der Grenzen der Zeichenfläche zu liegen. Es entsteht dann die Aufgabe, von einem Bildpunkte aus eine Gerade nach dem auf der Aughöhenlinie liegenden „unzugänglichen“ Fluchtpunkte zu ziehen, dessen Lage immer durch zwei gegebene Gerade bestimmt ist. Dieser Schwierigkeit kann man in doppelter Weise begegnen, entweder auf geometrischem Wege oder technisch mit mechanischen Hilfsmitteln.

Aufgabe 1. Die Perspektive dreier in der Grundebene gelegener Parallelen zu zeichnen, wenn ihr Fluchtpunkt außerhalb der Grenzen der Bildfläche liegt (Fig. 149).

Es sei (A) der herabgeschlagene Augpunkt und (A)U der herabgeschlagene Fluchtstrahl der in der Grundebene gelegenen Parallelen, deren Spurpunkte auf der Grundlinie 1, 2 und 3 seien. Da der Schnittpunkt F des Fluchtstrahls (A)U mit dem Horizont, der Fluchtpunkt der gegebenen Parallelen, außerhalb der Zeichenfläche angenommen wird, so haben wir die Aufgabe, um die Bilder der Parallelen zu finden, von den Punkten 1, 2, 3 die Geraden nach dem unzugänglichen Punkte F zu ziehen. Zu diesem Zwecke führen wir die Zeichnung zunächst in verkleinertem Maßstabe, hier im Verhältnis 2 : 1 aus, wobei wir den Hauptpunkt H als Ähnlichkeitspunkt benutzen: $\overline{H(A_t)} = \frac{1}{2}\overline{H(A)}$, $\overline{H1'} = \frac{1}{2}\overline{H1}$, $\overline{H2'} = \frac{1}{2}\overline{H2}$ usf. Die durch (A_t) zu (A)U gezogene Parallele trifft die Horizontlinie in F_t; $\overline{HF_t} = \frac{1}{2}\overline{HF}$ (Beweis!).

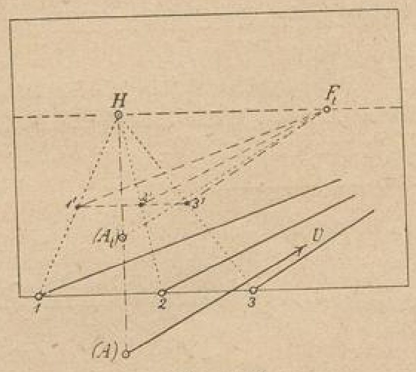

Fig. 149.

Ziehen wir jetzt durch die Spurpunkte 1, 2, 3 entsprechend zu $1'F_t$, $2'F_t$, $3'F_t$ die Parallelen, so gehen sie durch F. Der Beweis gründet sich auf die Umkehrung des Satzes: Parallele schneiden die Schenkel eines Winkels (Strahlen eines Strahlenbüschels) in verhältnisgleichen Strecken.

Die von uns gezeichnete Verkleinerung hätten wir als Bild erhalten, wenn Gegenstand und Auge ihre gegenseitige Lage behielten, aber die Bildebene parallel zu sich verschoben worden wäre, bis die Distanz nur $\frac{1}{2}$ der ursprünglichen beträgt. Der große Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß bei der nachfolgenden Vergrößerung auch die Ungenauigkeiten größer werden. Deshalb wird man, wenn ein hinreichend großer Tisch zur Verfügung steht, das Zeichenblatt auf diesen befestigen und mit einem langen Lineal oder gespannten Zwirnfaden den Fluchtpunkt bestimmen und mit einem Reißstift festlegen. Um diesen schlingt man einen dünnen Faden, der durch ein kleines Gewicht gespannt wird, und bestimmt mit ihm die nach dem Fluchtpunkt gehenden Linien, die mit Hilfe eines vorsichtig herangeschobenen Lineals gezogen werden.

Aufgabe 2. Von einem beliebigen Punkte 1 die Gerade nach dem unzugänglichen Fluchtpunkte F, der durch die Richtungslinie LM bestimmt ist, zu ziehen (Fig. 150).

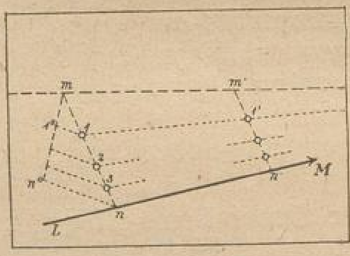

Fig. 150.

Ziehe durch 1 eine beliebige Gerade, die den Horizont in m und LM in n trifft, und in einiger Entfernung zu mn eine Parallele m'n'. Teile m'n' in 1' in demselben Verhältnis, wie mn durch 1 geteilt wird. 11' ist dann die gesuchte Gerade. Löse die Aufgabe auch für die Punkte 2 und 3, die auf mn liegen. Beweis!

§ 36. Von der Lage des Augpunktes.

Damit ein nach den Gesetzen der Perspektive dargestellter Gegenstand einen naturgetreuen Eindruck gewährt, muß der Beschauer sein Auge annähernd in den Augpunkt bringen, d. h. an die Stelle, an der vorher das Auge des Zeichners war oder für die Herstellung des Bildes angenommen wurde. Das zeigt sich besonders kraß bei dem in Fig. 147 gezeichneten Bilde der Kugel. Nur wenn man ein Auge, etwa das linke, über den Hauptpunkt in die Entfernung der Distanz bringt, erscheint die Umrißellipse als ein Kreis. Befindet sich dagegen das Auge an irgendeiner anderen Stelle, so sieht es den Umriß als Ellipse, was aber der tatsächlichen Wahrnehmung