UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

Darstellende Geometrie des Geländes. (Kotierte Projektion oder Zahlrißverfahren.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Visual Library

Anhang.

Darstellende Geometrie des Geländes.
(Kotierte Projektion oder Zahlrißverfahren.)

§ 1. Begriff der kotierten Projektion. Allgemeines.

1) Bedeutet P_0 (Fig. 1) einen beliebigen Punkt des Raumes und B eine wagerechte Bild- oder Zeichenebene, so ist seine Lage durch seinen senkrechten Riß P auf B[1]) und die Angabe der Länge und Richtung seines Abstandes p (z. B. p = 8 m oder p = — 5 m) eindeutig bestimmt. Die dem Riß P beigefügte Zahl heißt **Höhenzahl** oder **Kote,** der Riß P mit beigesetzter Höhenzahl **kotierter Riß** oder **Projektion.**

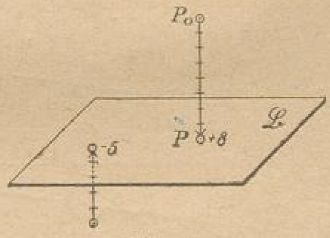

Fig. 1.

Dieses Rißverfahren wird hauptsächlich zur Darstellung von **Gelände-** oder **topographischen Flächen** verwandt. Darunter versteht man ein Stück der Erdoberfläche, das so klein ist, daß man die Richtungen der in allen ihren Punkten wirkenden Schwerkräfte als parallel ansehen kann.

2) In einer topographischen[2]) Karte kommt es zunächst darauf an, ein Stück der Erdoberfläche nach Lage und Höhe genügend genau darzustellen. Ein Bild, wie es die photographische Kamera des Fliegers liefert, würde über die Bodengestaltung und -bedeckung, über die Beschaffenheit der Wege, insbesondere aber über die Höhenverhältnisse nicht genügenden Aufschluß geben. Um die Höhenunterschiede kenntlich zu machen, pflegt man eine hinreichende Zahl wichtiger Punkte abzubilden und mit der zugehörigen Höhenzahl zu versehen, die ihren Abstand von einer festen Ebene, meist dem Meeresspiegel, in einer bestimmten Maßeinheit, z. B. in Metern, bezeichnen. Die Abbildung einzelner Punkte aber genügt nicht,

[1]) Die Risse von Punkten oder Geraden werden im folgenden der Einfachheit halber nicht besonders gekennzeichnet, also einfach z. B. mit A, B... oder g, ihre Urbilder dagegen entsprechend mit A_0, B_0... oder g_0 bezeichnet.

[2]) Topographie ist die möglichst genaue Darstellung und Beschreibung einer geographischen Örtlichkeit.

um auf der Karte die Geländeformen deutlich zur Anschauung zu bringen. Um das zu erreichen, denkt man sich in bestimmten, nicht zu großen Abständen, z. B. alle 10 m, wagerechte Schnittebenen (Niveauflächen) durch die abzubildende Geländefläche gelegt und die Risse der Schnittkurven, die man Höhen- oder Schichtlinien nennt, auf der Karte verzeichnet. Bei einem abgelassenen Teich kann man solche Schichtlinien, die Spuren früherer Wasserstände, sehr schön beobachten.

Das angegebene Darstellungsverfahren ist aus rein praktischen Bedürfnissen hervorgegangen, besonders aus militärischen und nautischen. Es findet im Vermessungs- und Kartenwesen, ferner in der Geologie und im Bergbau weitgehende Anwendung.

§ 2. Die Gerade. Grundbegriffe und Grundaufgaben.

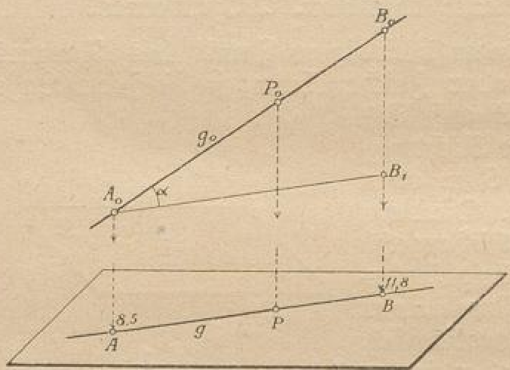

Fig. 2.

1) Eine Gerade g_0 im Raume (Fig. 2) ist durch die Zahlrisse zweier Punkte, z. B. A (8,5) und B (11,8) bestimmt.

Der Winkel α, unter dem g_0 gegen die wagrechte Bildebene geneigt ist, heißt der **Fallwinkel**, $\operatorname{tg}\alpha$ der **Anstieg** oder die **Böschung** der Geraden.

Anmerkung. Im folgenden haben wir es fast durchweg mit den Zeichnungen in der Bildebene zu tun. Wenn man deswegen z. B. einfach von dem Fallwinkel oder dem Anstieg der Geraden g, dem Riß von g_0, spricht, so hat man darunter die entsprechenden Größen der ursprünglichen Geraden zu verstehen.

Aufgabe 1. Eine Gerade g_0 ist durch die Zahlrisse A (8,5) und B (11,8) gegeben. Den Fallwinkel und den Anstieg der Geraden, endlich die Entfernung $A_0 B_0$ zu bestimmen.

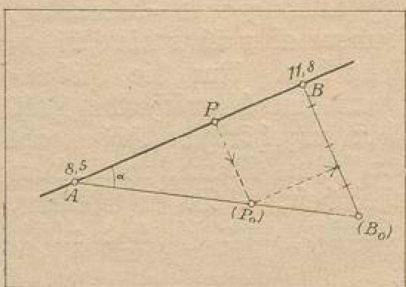

Fig. 3.

Man zeichne in der Bildebene (Fig. 3) das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten AB und $B(B_0) = B_1 B_0 = 3{,}3$ (vgl. Fig. 2). Die gesuchten Größen sind mit dem Winkelmesser und Maßstab zu entnehmen.

Aufgabe 2. Die Höhenzahl eines beliebigen auf der Geraden AB gelegenen Punktes P zu bestimmen **(Einschalten eines Punktes).**

Zur Lösung vgl. Fig. 3. Bedeuten a, b, p die entsprechenden Höhenzahlen der Punkte A_0, B_0 und P_0 (Fig. 2), so findet man die gesuchte Höhenzahl von P auch durch Rechnung (am bequemsten mit dem Rechenschieber) aus der Formel

$$p = a + \frac{AP}{AB}(b-a).$$

Aufgabe 3. Auf der Geraden AB den Punkt P mit der Höhenzahl p zu finden (vgl. Fig. 3).

Ermittle P auch durch Rechnung.

Aufgabe 4. Eine Gerade g_0, die durch die Risse A (37,6) und B (41,3) gegeben ist, zu **graduieren (maßteilen)**, d. h. die Punkte mit ganzen Höhenzahlen zu ermitteln (Fig. 4).

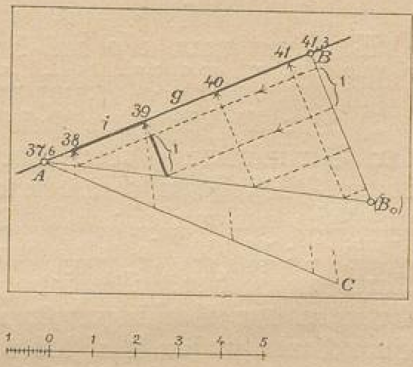

Fig. 4.

Man zeichne die Umlegung $AB(B_0)$ des rechtwinkligen Dreiecks $A_0B_0B_1$ mit der einen Kathete AB und der andern $B(B_0) = B_1B_0 = 3{,}7$ Einheiten, dem Höhenunterschied zwischen A_0 und B_0, und trage auf $B(B_0)$ von B 0,4 und dann die Maßeinheit wiederholt ab. Die Parallelen, die durch die erhaltenen Punkte zu AB gezogen werden, schneiden die Umlegung $A(B_0)$ in Punkten, deren zugehörige Risse ganzzahlig sind. Zieht man jetzt durch die gefundenen Punkte auf $A(B_0)$ die Parallelen zu $B(B_0)$, so ergeben diese die gesuchten ganzzahligen Rißpunkte auf AB, sie schneiden, wie man sagt, auf AB die **Graduierung (Maßteilung)** oder den **Gefällemaßstab** aus.

Einfacher wird die Aufgabe auf folgende Weise gelöst: Man ziehe von A aus einen beliebigen Strahl AC, trage auf ihm $AC = 3{,}7$ in beliebigen Einheiten und in den gleichen Einheiten von A aus 0,4 und weiter 1 ab. Die durch die erhaltenen Punkte zu CB gezogenen Parallelen schneiden auf AB die Graduierung aus.

Zur Graduierung genügt die Ermittlung zweier aufeinander folgender Risse mit ganzen Höhenzahlen, z. B. 38 und 39. Die Entfernung zweier solcher aufeinander folgender Punkte einer graduierten Geraden heißt ihr **Intervall** i.

Das Gefälle wird durch die Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 : i$$

bestimmt. Je steiler demnach der Anstieg der Geraden AB, um so kleiner ist ihr Intervall.

Wie groß ist der Fallwinkel für i = 1, 2, 5, 10, 20 und 100 und wieviel für Hundert beträgt in jedem Falle die Steigung?

2) Zwei Gerade g_0 und l_0 des Raumes schneiden sich nur dann, wenn ihre Bilder g und l einen Punkt mit gleicher Höhenzahl gemeinsam haben (Fig. 5 und 6). Sie sind parallel, wenn $g \parallel l$ ist und zugleich ihre Intervalle übereinstimmen (vgl. § 3 S. 111).

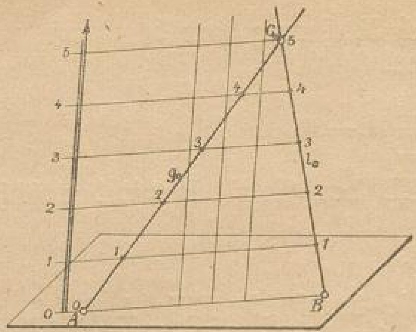

Fig. 5.

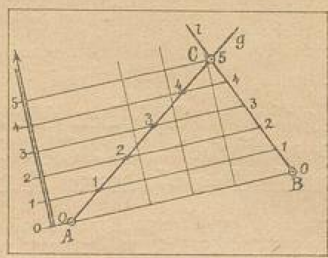

Fig. 6.

Wie kann man also aus den beiden Rissen zweier Geraden feststellen, ob sie sich schneiden oder parallel sind oder sich kreuzen?

3) Der **Maßstab der Zeichnung oder Karte** bezeichnet das Maß der Verkleinerung oder Verjüngung der Karte im Vergleich zur Natur. Besteht zwischen den wagerechten Entfernungen auf der Karte und den entsprechenden in Wirklichkeit das Verhältnis 1 : m, z. B. gleich 1 : 10000, so wird durch dieses Verhältnis der Maßstab der Karte angegeben. Die topographischen Karten bewegen sich in den Grenzen der Verjüngungsverhältnisse von 1 : 10000 bis 1 : 200000. Eine Karte großen Maßstabes wie 1 : 10000 kann naturgemäß mehr enthalten und so ein Geländestück genauer wiedergeben als eine von kleinerem Maßstabe wie etwa 1 : 100000, wird aber bei größeren Geländeabschnitten unhandlich.

Für den Maßstab 1 : m gilt für Längen die Beziehung $l_k : l_n = 1 : m$, wo l_k die Länge auf der Karte und l_n die entsprechende in der Natur bedeutet. Z. B. bei den Karten 1 : 25000 sind 1000 m in der Natur nur 4 cm. Denn $l_k = 1000 \text{ m} : 25000 = 4 \text{ cm}$. Wie groß ist umgekehrt l_n für $l_k = 5{,}2$ cm? Zur Vereinfachung ist auf jeder Karte der Maßstab aufgedruckt. Zeichne Maßstäbe für die Karten 1 : 100000, 1 : 80000, 1 : 25000, 1 : 10000!

Wichtige Geländegegenstände, wie Straßen und Eisenbahnlinien, werden nicht maßstabsgerecht gezeichnet, weil sie bei der Verjüngung auf einen kleinen Maßstab auf der Karte nur als ganz feine Linien erscheinen würden. Wie breit dürfte z. B. eine 10 m breite Straße auf einer Karte vom Maßstabe 1 : 100000 (Generalstabskarte) oder auf den Meßtischblättern (1 : 25000) nur gezeichnet werden?

Da die Höhen im Vergleich zu den Längen auf der Karte meist klein sind, werden bei Zeichnungen, wo auch die Höhen zur Darstellung kommen, diese in größerem Maßstabe gezeichnet (Überhöhung).

Verhalten sich auf einer Zeichnung vom Maßstabe 1 : m die Höhen zu den entsprechenden in der Wirklichkeit wie 1 : n, so beträgt die tatsächliche Entfernung zwischen zwei Punkten A_0 und B_0 mit den Höhenzahlen a und b (vgl. Fig. 2)

$$e = \sqrt{m^2 \, \overline{AB}^2 + n^2 \, (b - a)^2},$$

und der Anstieg der Geraden A_0B_0

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n(b-a)}{m.AB}.$$

n wird meist kleiner als m gewählt (Überhöhung). In welchem Falle wird $e = m \cdot AB$ und $\varphi = \alpha$, wo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b-a}{AB}$ ist?

§ 3. Darstellung der Ebene und krummer Flächen.

1 a) Eine Ebene ist bestimmt durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade. Graduiert man in Fig. 5 und 6 die Geraden und zieht die Verbindungslinien der Punkte mit gleicher Höhenzahl, so erhält man die Höhen- oder Schichtlinien der durch sie bestimmten Ebene.

Die zu den Höhenlinien senkrechten Geraden der Ebene (Fig. 5) werden **Fallinien** genannt. Ihre Risse verlaufen ebenfalls senkrecht[1]) zu den Bildern der Schichtlinien und werden von ihnen graduiert. Eine Ebene ist durch eine beliebige graduierte Fallinie, die man als ihren **Böschungs-** oder **Gefällemaßstab** bezeichnet, völlig bestimmt (inwiefern?). Der Böschungsmaßstab wird in der Regel als maßgeteilte Doppelgerade dargestellt und die dabei als eigentliche Fallinie geltende Gerade mit einer Pfeilspitze gekennzeichnet.

Der Fallwinkel α der Fallinien heißt das Fallen der Ebene und $\operatorname{tg}\alpha$ ihre Böschung. Die Anstiegrichtung der Ebene wird durch die zunehmenden Höhenzahlen der Fallinien bezeichnet.

Aufgabe. Die Zahlrisse dreier Punkte A (27,3), B (32,5), C (35,8) sind gegeben. Den Böschungsmaßstab der Ebene ABC zu zeichnen (Fig. 7).

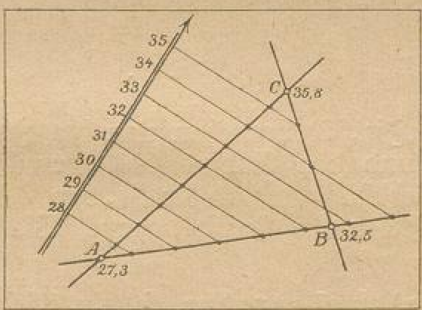

Fig. 7.

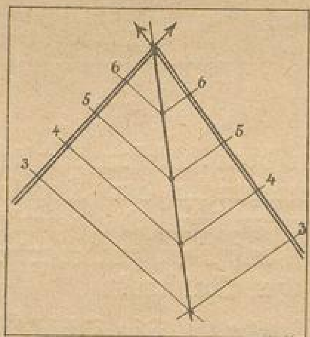

Fig. 8.

Ziehe die drei Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte, maßteile sie, zeichne die Schichtlinien der Ebene und endlich senkrecht zu ihnen den Böschungsmaßstab.

b) Aufgabe. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu bestimmen (Fig. 8).

---

1) Vgl. § 18, 2).

Die Schnittgerade ergibt sich als Ort der Schnittpunkte der Schichtlinien mit gleicher Höhenzahl, die zugleich ihre Graduierung bewirken. Haben die gegebenen Ebenen gleiche Böschung, so halbiert die Schnittgerade im Bilde die von den gleichzahligen Schichtlinien gebildeten Winkel.

2) Aufgabe 1. Die Schichtlinien a) eines geraden, b) eines schiefen auf der Zeichenebene stehenden Kreiskegels zu zeichnen.

Die Schichtlinien des geraden Kegels sind konzentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Riß der Spitze ist. Was braucht in der Zeichenebene nur gegeben zu sein?

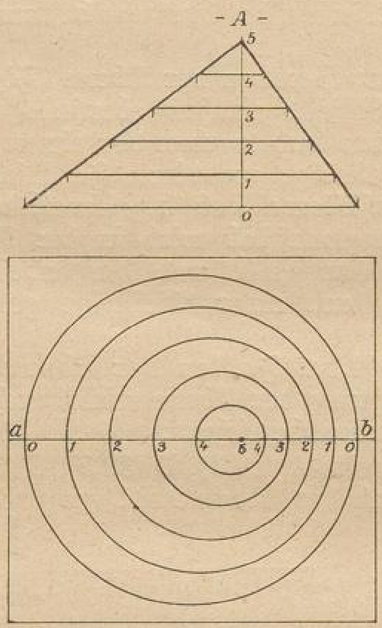

Fig. 9.

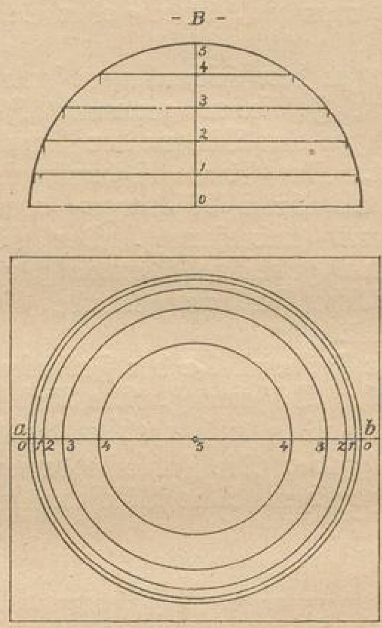

Fig. 10.

Von dem schiefen Kreiskegel (Fig. 9) brauchen nur die Zahlrisse der Endpunkte der Kegelachse und der Radius des Grundkreises gegeben zu sein. Die gesuchten Schichtlinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf dem graduierten Riß der Kegelachse liegen. Wie findet man ihre Radien?

Aufgabe 2. Die Schichtlinien a) eines geraden, b) eines schiefen Kreiszylinders mit wagerechten Grundflächen zu finden, wenn die Zahlrisse der Endpunkte der Achse und der Grundkreisradius gegeben sind.

Aufgabe 3. Die obere Hälfte eines geraden Kreiszylinders, der mit seiner ebenen Seitenfläche auf der Bildebene ruht, durch seine Schichtlinien darzustellen.

Aufgabe 4. Eine Halbkugel, deren ebene Fläche auf der Bildebene ruht, durch ihre Schichtlinien darzustellen (Fig. 10).

Aufgabe 5. Von einem Umdrehungskörper, der die Gestalt eines spitzen, geraden Kegels mit hohlen Seitenflächen hat (Fig. 11), das Schichtlinienbild zu zeichnen.

Betrachtet man die in den Fig. 9—11 durch ihre Schichtlinienbilder und lotrechten Schnitte dargestellten Körper A—C als Bergkörper, so hat man es bei A mit einem Bergkegel, bei B mit einer Kuppe und bei C mit einer sogenannten Spitze oder Nadel zu tun. Besteigt man die einzelnen Bergkörper und geht im Geiste von a nach b, so erkennt man unter Beachtung des zugehörigen lotrechten Schnittes leicht folgendes: Bei A sind An- und Abstieg unter sich gleichmäßig, aber der Abstieg ist steiler. Die durch den Weg gehenden Schichtlinien für den An- und Abstieg haben dementsprechend unter sich gleiche Abstände, aber für den Abstieg liegen sie enger aneinander. Die Kuppe im Bilde B steigt vom Fuße seitlich steil an, dann verflacht sie sich mehr und mehr. Dementsprechend drängen sich die Schichtlinien am Fuße, wo der Anstieg am stärksten ist, enger aneinander, während sie sich weiter oben mehr voneinander entfernen. Die „Spitze“ im Bilde C steigt zunächst sanft an, deshalb sind die Höhenschichtlinien weit voneinander entfernt. Dann strebt sie steiler empor. Demgemäß nähern sich die Schichtlinien mehr und mehr. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich folgendes: Schichtlinien in weiten Abständen kennzeichnen ein allmählich ansteigendes, in engen Abständen ein stark ansteigendes Gelände.

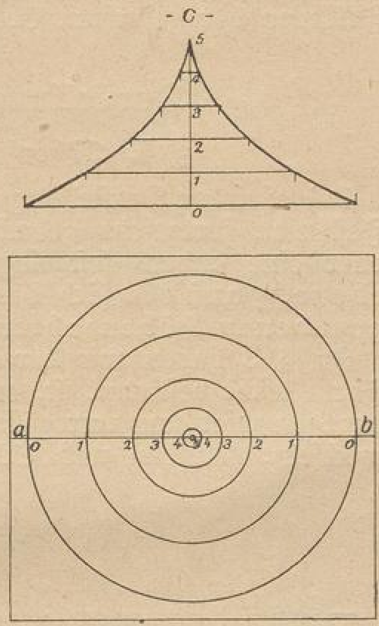

Fig. 11.

Schichtlinien von Bergkörpern, die oben weit und nach unten zu sich immer mehr nähernd verlaufen, deuten auf einen nach außen gewölbten — erhabenen — Hang. Wie verlaufen die Schichtlinien bei einem nach innen gebogenen — hohlen — und wie bei einem gleichmäßig verlaufenden — steten — Hang?

3) Alle Ebenen gleicher Böschung, die durch denselben Punkt P gehen, umhüllen einen geraden Kreiskegel, den sogenannten **Böschungskegel.**

Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade die Ebenen von gegebener Böschung zu zeichnen.

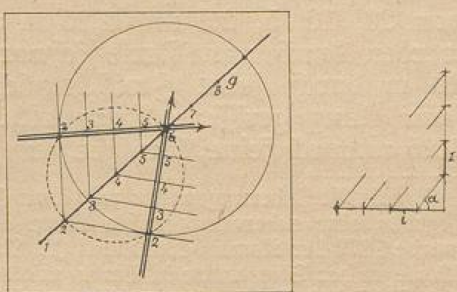
Fig. 12.

Man wähle (Fig. 12) einen beliebigen Punkt der Geraden g, z. B. 6, als Spitze des Kegels mit der gegebenen Böschung, zeichne den zu einem beliebigen Punkte von g, etwa 2, gehörigen Schichtkreis und ziehe von 2 an ihn die beiden Tangenten. Die nach den Berührungspunkten von Punkt 6 aus gezogenen Radien sind dann Fallinien der gesuchten Ebenen. Wie erfolgt ihre Graduierung?

Darstellung von Geländeflächen.

§ 4. Höhenschichtlinien. Längenprofile.

1 a) Bei der Darstellung von Geländeflächen dient die unter dem Festlande fortgesetzt gedachte mittlere Ebene des Meeresspiegels oder eine anders festgelegte wagerechte Ebene als Vergleichsebene,[1]) auf die sich die in der Karte oder Zeichnung angegebenen Höhenzahlen beziehen.

In § 3 haben wir bereits einige einfache Körperflächen, deren Form leicht bestimmt ist, durch Schichtlinien dargestellt. Die Natur dagegen zeigt ganz unregelmäßige Geländeformen. Berge und Täler wechseln. Mulden und Schluchten greifen tief in Bergkörper ein, Rücken und Vorsprünge wachsen heraus. Um von einer solch mannigfach gestalteten Oberfläche eines Geländestückes ein deutliches und hinreichend genaues Bild zu geben, denken wir uns dieses (vgl. Fig. 13 a), wie vorher die einfachen Körper, durch eine genügende Anzahl wagerechter Ebenen (Niveauflächen), die in gleichen Abständen, z. B. 20 m, übereinander liegen, geschnitten. Die Schnittkurven dieser Ebenen mit der Geländefläche, die **Höhenschichtlinien,** werden in verjüngtem Maßstabe auf die wagerechte Zeichenebene abgebildet. Die Abbildungen nennt man der Einfachheit halber ebenfalls kurz Schichtlinien. Die Landesaufnahme hat Schichthöhen von 20, 10, 5, 2,5 und 1,25 m festgesetzt. Schichthöhen von 20 m werden durch mittelstarke schwarze Hauptschichtlinien, die von 10 m durch feine Zwischenschichtlinien, die von 5 m durch feine, lang gerissene Normalhöhenlinien und die von 2,5 und 1,25 m durch feine, kurz gerissene Hilfsschichtlinien bezeichnet.

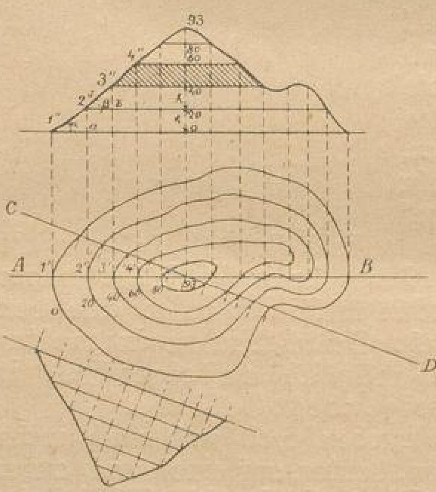

Fig. 13a.

[1]) Die Veränderungen der mittleren Höhe des Meeresspiegels haben Veranlassung gegeben, eine andere wagerechte Ebene als Vergleichsebene zu wählen. In Preußen wurde 1879 der Normal-Nullpunkt (N. N.) für Höhenmessung durch Anbringen einer Marke an der Sternwarte in Berlin mit der Höhenzahl 37 m festgelegt. Nach Abbruch des Gebäudes ist der Normal-Nullpunkt durch 5 versenkte Marken auf der Straße Berlin—Mantschow bei Hoppegarten bestimmt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN