Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

§ 2. Die Gerade. Grundbegriffe und Grundaufgaben.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

um auf der Karte die Geländeformen deutlich zur Anschauung zu bringen. Um das zu erreichen, denkt man sich in bestimmten, nicht zu großen Abständen, z. B. alle 10 m, wagerechte Schnittebenen (Niveauflächen) durch die abzubildende Geländefläche gelegt und die Risse der Schnittkurven, die man Höhen- oder Schichtlinien nennt, auf der Karte verzeichnet. Bei einem abgelassenen Teich kann man solche Schichtlinien, die Spuren früherer Wasserstände, sehr schön beobachten.

Das angegebene Darstellungsverfahren ist aus rein praktischen Bedürfnissen hervorgegangen, besonders aus militärischen und nautischen. Es findet im Vermessungs- und Kartenwesen, ferner in der Geologie und im Bergbau weitgehende Anwendung.

§ 2. Die Gerade. Grundbegriffe und Grundaufgaben.

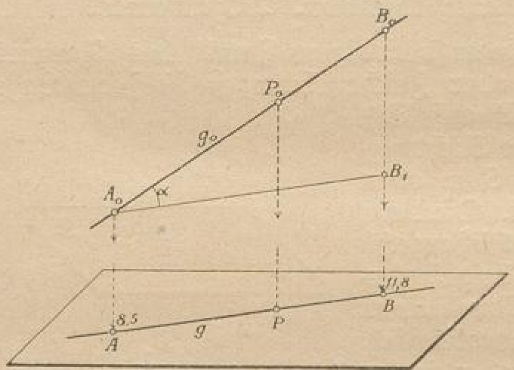

Fig. 2.

1) Eine Gerade g_0 im Raume (Fig. 2) ist durch die Zahlrisse zweier Punkte, z. B. A (8,5) und B (11,8) bestimmt.

Der Winkel α, unter dem g_0 gegen die wagrechte Bildebene geneigt ist, heißt der **Fallwinkel,** $\operatorname{tg}\alpha$ der **Anstieg** oder die **Böschung** der Geraden.

Anmerkung. Im folgenden haben wir es fast durchweg mit den Zeichnungen in der Bildebene zu tun. Wenn man deswegen z. B. einfach von dem Fallwinkel oder dem Anstieg der Geraden g, dem Riß von g_0, spricht, so hat man darunter die entsprechenden Größen der ursprünglichen Geraden zu verstehen.

Aufgabe 1. Eine Gerade g_0 ist durch die Zahlrisse A (8,5) und B (11,8) gegeben. Den Fallwinkel und den Anstieg der Geraden, endlich die Entfernung $A_0 B_0$ zu bestimmen.

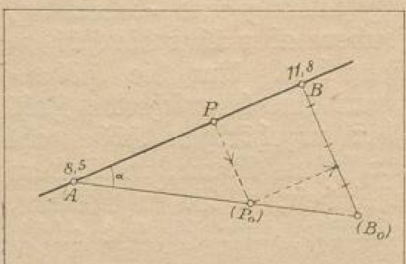

Fig. 3.

Man zeichne in der Bildebene (Fig. 3) das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten AB und $B(B_0) = B_1 B_0 = 3{,}3$ (vgl. Fig. 2). Die gesuchten Größen sind mit dem Winkelmesser und Maßstab zu entnehmen.

Aufgabe 2. Die Höhenzahl eines beliebigen auf der Geraden AB gelegenen Punktes P zu bestimmen **(Einschalten eines Punktes).**

Zur Lösung vgl. Fig. 3. Bedeuten a, b, p die entsprechenden Höhenzahlen der Punkte A_0, B_0 und P_0 (Fig. 2), so findet man die gesuchte Höhenzahl von P auch durch Rechnung (am bequemsten mit dem Rechenschieber) aus der Formel

$$p = a + \frac{AP}{AB}(b - a).$$

Aufgabe 3. Auf der Geraden AB den Punkt P mit der Höhenzahl p zu finden (vgl. Fig. 3).

Ermittle P auch durch Rechnung.

Aufgabe 4. Eine Gerade g_0, die durch die Risse A (37,6) und B (41,3) gegeben ist, zu **graduieren (maßteilen)**, d. h. die Punkte mit ganzen Höhenzahlen zu ermitteln (Fig. 4).

Man zeichne die Umlegung $AB(B_0)$ des rechtwinkligen Dreiecks $A_0B_0B_1$ mit der einen Kathete AB und der andern $B(B_0) = B_1B_0 = 3{,}7$ Einheiten, dem Höhenunterschied zwischen A_0 und B_0, und trage auf $B(B_0)$ von B 0,4 und dann die Maßeinheit wiederholt ab. Die Parallelen, die durch die erhaltenen Punkte zu AB gezogen werden, schneiden die Umlegung $A(B_0)$ in Punkten, deren zugehörige Risse

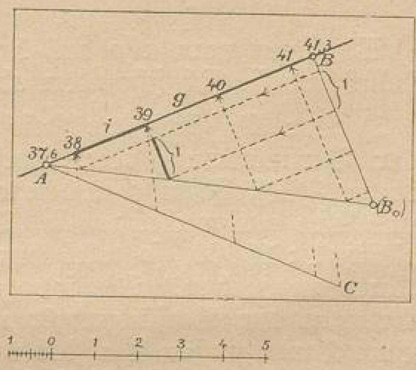

Fig. 4.

ganzzahlig sind. Zieht man jetzt durch die gefundenen Punkte auf $A(B_0)$ die Parallelen zu $B(B_0)$, so ergeben diese die gesuchten ganzzahligen Rißpunkte auf AB, sie schneiden, wie man sagt, auf AB die **Graduierung (Maßteilung)** oder den **Gefällemaßstab** aus.

Einfacher wird die Aufgabe auf folgende Weise gelöst: Man ziehe von A aus einen beliebigen Strahl AC, trage auf ihm AC = 3,7 in beliebigen Einheiten und in den gleichen Einheiten von A aus 0,4 und weiter 1 ab. Die durch die erhaltenen Punkte zu CB gezogenen Parallelen schneiden auf AB die Graduierung aus.

Zur Graduierung genügt die Ermittlung zweier aufeinander folgender Risse mit ganzen Höhenzahlen, z. B. 38 und 39. Die Entfernung zweier solcher aufeinander folgender Punkte einer graduierten Geraden heißt ihr **Intervall** i.

Das Gefälle wird durch die Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 : i$$

bestimmt. Je steiler demnach der Anstieg der Geraden AB, um so kleiner ist ihr Intervall.

Wie groß ist der Fallwinkel für i = 1, 2, 5, 10, 20 und 100 und wieviel für Hundert beträgt in jedem Falle die Steigung?

2) Zwei Gerade g_0 und l_0 des Raumes schneiden sich nur dann, wenn ihre Bilder g und l einen Punkt mit gleicher Höhenzahl gemeinsam haben (Fig. 5 und 6). Sie sind parallel, wenn $g \parallel l$ ist und zugleich ihre Intervalle übereinstimmen (vgl. § 3 S. 111).

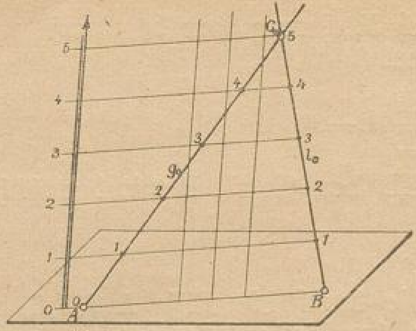

Fig. 5.

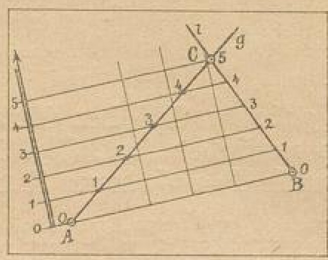

Fig. 6.

Wie kann man also aus den beiden Rissen zweier Geraden feststellen, ob sie sich schneiden oder parallel sind oder sich kreuzen?

3) Der **Maßstab der Zeichnung oder Karte** bezeichnet das Maß der Verkleinerung oder Verjüngung der Karte im Vergleich zur Natur. Besteht zwischen den wagerechten Entfernungen auf der Karte und den entsprechenden in Wirklichkeit das Verhältnis 1 : m, z. B. gleich 1 : 10000, so wird durch dieses Verhältnis der Maßstab der Karte angegeben. Die topographischen Karten bewegen sich in den Grenzen der Verjüngungsverhältnisse von 1 : 10000 bis 1 : 200000. Eine Karte großen Maßstabes wie 1 : 10000 kann naturgemäß mehr enthalten und so ein Geländestück genauer wiedergeben als eine von kleinerem Maßstabe wie etwa 1 : 100000, wird aber bei größeren Geländeabschnitten unhandlich.

Für den Maßstab 1 : m gilt für Längen die Beziehung $l_k : l_n = 1 : m$, wo l_k die Länge auf der Karte und l_n die entsprechende in der Natur bedeutet. Z. B. bei den Karten 1 : 25000 sind 1000 m in der Natur nur 4 cm. Denn $l_k = 1000 \text{ m} : 25000 = 4 \text{ cm}$. Wie groß ist umgekehrt l_n für $l_k = 5{,}2$ cm? Zur Vereinfachung ist auf jeder Karte der Maßstab aufgedruckt. Zeichne Maßstäbe für die Karten 1 : 100000, 1 : 80000, 1 : 25000, 1 : 10000!

Wichtige Geländegegenstände, wie Straßen und Eisenbahnlinien, werden nicht maßstabsgerecht gezeichnet, weil sie bei der Verjüngung auf einen kleinen Maßstab auf der Karte nur als ganz feine Linien erscheinen würden. Wie breit dürfte z. B. eine 10 m breite Straße auf einer Karte vom Maßstabe 1 : 100000 (Generalstabskarte) oder auf den Meßtischblättern (1 : 25000) nur gezeichnet werden?

Da die Höhen im Vergleich zu den Längen auf der Karte meist klein sind, werden bei Zeichnungen, wo auch die Höhen zur Darstellung kommen, diese in größerem Maßstabe gezeichnet (Überhöhung).

Verhalten sich auf einer Zeichnung vom Maßstabe 1 : m die Höhen zu den entsprechenden in der Wirklichkeit wie 1 : n, so beträgt die tatsächliche Entfernung zwischen zwei Punkten A_0 und B_0 mit den Höhenzahlen a und b (vgl. Fig. 2)

$$e = \sqrt{m^2\,\overline{AB}^2 + n^2\,(b-a)^2},$$

und der Anstieg der Geraden A_0B_0

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n\,(b-a)}{m.AB}.$$

n wird meist kleiner als m gewählt (Überhöhung). In welchem Falle wird $e = m \cdot AB$ und $\varphi = \alpha$, wo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b-a}{AB}$ ist?

§ 3. Darstellung der Ebene und krummer Flächen.

1 a) Eine Ebene ist bestimmt durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade. Graduiert man in Fig. 5 und 6 die Geraden und zieht die Verbindungslinien der Punkte mit gleicher Höhenzahl, so erhält man die Höhen- oder Schichtlinien der durch sie bestimmten Ebene.

Die zu den Höhenlinien senkrechten Geraden der Ebene (Fig. 5) werden **Fallinien** genannt. Ihre Risse verlaufen ebenfalls senkrecht[1]) zu den Bildern der Schichtlinien und werden von ihnen graduiert. Eine Ebene ist durch eine beliebige graduierte Fallinie, die man als ihren **Böschungs-** oder **Gefällemaßstab** bezeichnet, völlig bestimmt (inwiefern?). Der Böschungsmaßstab wird in der Regel als maßgeteilte Doppelgerade dargestellt und die dabei als eigentliche Fallinie geltende Gerade mit einer Pfeilspitze gekennzeichnet.

Der Fallwinkel α der Fallinien heißt das Fallen der Ebene und $\operatorname{tg}\alpha$ ihre Böschung. Die Anstiegrichtung der Ebene wird durch die zunehmenden Höhenzahlen der Fallinien bezeichnet.

Aufgabe. Die Zahlrisse dreier Punkte A (27,3), B (32,5), C (35,8) sind gegeben. Den Böschungsmaßstab der Ebene ABC zu zeichnen (Fig. 7).

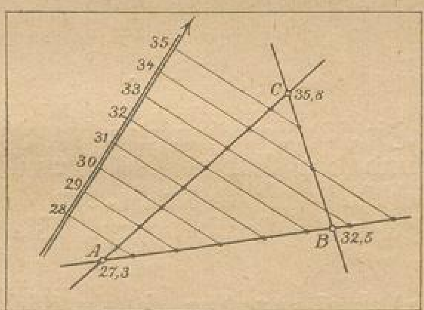

Fig. 7.

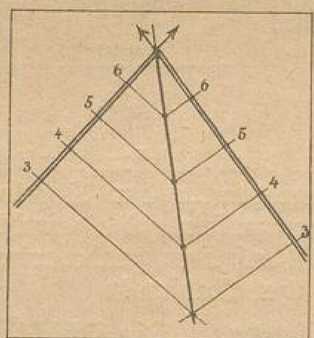

Fig. 8.

Ziehe die drei Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte, maßteile sie, zeichne die Schichtlinien der Ebene und endlich senkrecht zu ihnen den Böschungsmaßstab.

b) Aufgabe. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu bestimmen (Fig. 8).

[1]) Vgl. § 18, 2).