Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 89. Richtungs-Änderung und Coordinaten-Änderung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Die hier mit aufgenommenen Meridianconvergenzen γ sind dieselben, wie schon auf S. 204 angegeben, und die Summen $\gamma + \alpha$ geben die ausgeglichenen T von S. 204.

Wenn man aus den vorher mitgeteilten Breiten und Längen wieder die Azimute, Meridianconvergenzen und die *log S* rückwärts berechnet, so wird man die letzten Stellen nicht völlig in Übereinstimmung finden, erstens aus begreiflichen Abrundungsgründen, zweitens aber auch deswegen, weil in den Rechnungen der Landesaufnahme die Meridianconvergenzen und Azimute nicht bloss aus den geographischen Coordinaten, sondern auch auf dem *schärferen* Wege der rechtwinkligen Coordinaten (14) S. 205 übertragen werden, was in vorstehenden γ und α geschehen ist.

Unsere in diesem § 87. zusammengestellten Werte nebst den früheren von § 61. und § 63. sind diejenigen, welche voraussichtlich in den „Abrissen und Coordinaten" der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, etwa Band XVII, veröffentlicht werden werden.

Kapitel III.

Punktbestimmung durch Coordinatenausgleichung.

§ 88. Allgemeines.

Im vorigen Kapitel haben wir die Ausgleichung von Triangulierungs-Netzen nach der Methode der *bedingten Beobachtungen* behandelt, wobei zuerst die Bedingungsgleichungen aufgesucht werden mussten, welche zwischen den gemessenen Winkeln oder Richtungen nach der Natur des geometrischen Netzzusammenhanges bestehen; worauf eine der Zahl dieser Bedingungsgleichungen gleiche Zahl von Normalgleichungen aufzulösen war.

Wir gehen nun über zu einer anderen Art der Ausgleichung trigonometrischer Messungen, wobei die *Coordinaten* der zu bestimmenden Punkte als unabhängige Unbekannte angenommen, und die gemessenen Winkel oder Richtungen als Funktionen dieser Coordinaten dargestellt werden, so dass darauf eine Ausgleichung nach *vermittelnden Beobachtungen gegründet werden kann.*

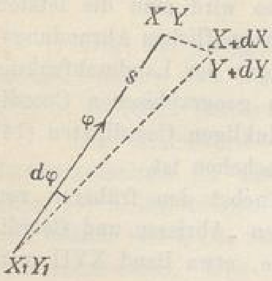
Der einfachste Fall von Coordinatenausgleichung liegt vor, wenn *ein* neuer Punkt an mehrere fest gegebene alte Punkte angeschlossen werden soll. Wir werden daher im folgenden zuerst auf diese einfachste Aufgabe ausgehen.

§ 89. Richtungs-Änderung und Coordinaten-Änderung.

Bei allen Coordinatenausgleichungen werden wir eine Grundaufgabe wiederkehren sehen, welche wir deshalb ein- für allemal vorausschicken.

In Fig. 1. S. 326 haben wir einen festen Punkt P_1 mit den rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1 und einen zweiten veränderlichen Punkt P mit den Coordinaten x y; die Entfernung von P_1 nach P sei $= s$ und der Richtungswinkel (Katasterbenennung „Neigung") des Strahles von P_1 nach P sei $(P_1 P)$ oder kürzer bezeichnet $= \varphi$. Dann bestehen bekanntlich die Gleichungen:

Fig. 1.



$$y - y_1 = s \sin \varphi \qquad x - x_1 = s \cos \varphi \tag{1}$$

$$\tan \varphi = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{2}$$

oder

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{3}$$

(In Fig. 1. und Fig. 2. entsprechen X und Y den Zeichen x und y des Textes.)

Nun wollen wir den Punkt P nach P' rücken lassen, wobei seine Coordinaten von x , y übergehen in die nahe benachbarten $x + d\,x$, $y + d\,y$; und wir fragen, welche Änderung dadurch der Richtungswinkel φ erleidet? Insofern diese Änderung $d\,\varphi$ nur klein sein soll, werden wir sie durch Differentiieren bestimmen, nämlich nach (2):

$$d\,\varphi = \frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial x} d\,x + \frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial y} d\,y \tag{4}$$

die beiden Teile für sich abgeleitet geben:

$$\frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)^2} \left(-\frac{y - y_1}{(x - x_1)^2}\right)$$

und

$$\frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)^2} \left(\frac{1}{x - x_1}\right)$$

Wenn man daraus die Funktion (4) zusammenfassen will, beachtet man, dass in beiden Teilen im Nenner $(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2$ entsteht, welches $= s^2$ ist, und dadurch wird:

$$d\,\varphi = -\frac{y - y_1}{s^2} d\,x + \frac{x - x_1}{s^2} d\,y \tag{5}$$

Hier ist aber zu beachten, dass $d\,\varphi$ in analytischem Mass gilt; und wenn man $d\,\varphi$ nun in geometrisches Mass umsetzen will, so muss man es mit ϱ $(= 206\,265$ für Sekunden alter Teilung) dividieren, oder man hat rechts mit ϱ zu multiplizieren, also: in Sekunden:

$$d\,\varphi = -\frac{y - y_1}{s^2} \varrho\, d\,x + \frac{x - x_1}{s^2} \varrho\, d\,y \tag{6}$$

Wegen der ursprünglichen Gleichungen (1) kann man dieses (5) auch so schreiben:

$$d\,\varphi = -\frac{\varrho \sin \varphi}{s} d\,x + \frac{\varrho \cos \varphi}{s} d\,y \tag{7}$$

dieses (7) oder (6) ist die zu Anfang erwähnte für *alle* Coordinatenausgleichungen nötige Grundformel, (welche deshalb der Rechner auch alsbald auswendig wissen wird).

Logarithmische Herleitung der Grundformel.

So einfach auch die unmittelbare Differentiierung der Gleichung (3) war, lässt sie uns doch noch Gelegenheit, die Ableitung auch noch etwas anders, nämlich in logarithmischer Form zu machen, um die Sache von allen Seiten zu betrachten. Schreiben wir nämlich die Gleichung (2) logarithmisch, so haben wir:

$$\log tang\, \varphi = \log (y - y_1) - \log (x - x_1) \tag{8}$$

und dieses allseitig differentiiert giebt:

$$d \log tang\, \varphi = \frac{1}{tang\, \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{dy}{y - y_1} - \frac{dx}{x - x_1}$$

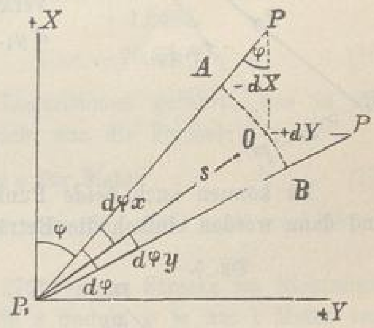
$$d\varphi = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{y - y_1} dy - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{x - x_1} dx$$

und wegen der Gleichungen (1) geht dieses sofort in (7) über (mit Zusetzung von ϱ).

Geometrische Deutung der Grundformel.

Man kann unsere Grundformel auch geometrisch begründen, nach Fig. 2. (in welcher dX und dY dasselbe bedeuten sollen wie dx und dy im Text). Wir denken $d\varphi$ in zwei Teile $d\varphi_x$ und $d\varphi_y$ zerlegt, und lassen den Punkt P nicht auf *ein*mal nach P' rücken, sondern auf dem Umweg über die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks $PO = dx$ und $OP' = dy$. Dabei muss aber dx im Sinne von Fig. 2. *negativ* sein, wie es auch eingeschrieben ist. Denkt man sich weiter die beiden Strecken dx und dy rechtwinklig zu der Strahlenrichtung φ projiziert, so bekommt man:

Fig. 2.



$$OA = -dx \sin \varphi \qquad OB = +dy \cos \varphi$$

$$d\varphi = d\varphi_x + d\varphi_y = \frac{OA}{s} + \frac{OB}{s}$$

also:
$$d\varphi = -\frac{\sin \varphi}{s} dx + \frac{\cos \varphi}{s} dy \tag{9}$$

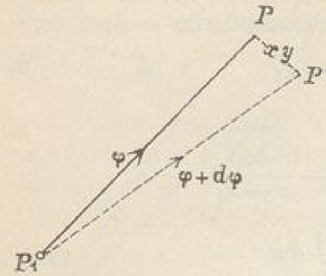
Hier ist nur wieder ϱ als Faktor zuzusetzen, um Übereinstimmung mit der früheren Formel (7) zu erhalten.

Diese geometrische Begründung der Gleichung (7) ist zwar anschaulicher als die analytische Differentiierung bei (4) und (8); die Differentiierung hat aber den Vorzug, dass sie allgemeiner gültig ist, und die Erörterung verschiedener *Vorzeichen*fragen, die sich an die Gleichungen (9) knüpfen würden, überflüssig macht.

Diesseitige und jenseitige Punktverschiebung.

In der ursprünglichen Annahme von Fig. 1. war P_1 ein fester Standpunkt und P ein veränderlicher Zielpunkt, und dafür gilt die Gleichung (6) oder (7); nun kann aber auch umgekehrt der Zielpunkt P fest und der Standpunkt P_1 veränderlich sein, und dann wird eine ganz ähnliche Formel gelten wie im vorigen Falle, nur mit dem Unterschiede, dass $\varphi \pm 180°$ an Stelle von φ tritt und dass deswegen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ ihre Zeichen ändern. Dieses ist durch Fig. 3. und Fig. 4. noch deutlicher gemacht.

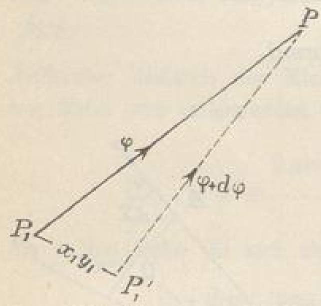
Fig. 3.



I. Fall. (Fig. 3.) Jenseitige Punktverschiebung. Der Standpunkt P_1 ist fest, der Zielpunkt P ist veränderlich mit den Coordinatenänderungen $d\,x$ und $d\,y$. Dann ist die Richtungsänderung:

$$d\,\varphi = -\frac{\sin\varphi}{s}\,\varrho\,d\,x + \frac{\cos\varphi}{s}\,\varrho\,d\,y \qquad (10)$$

Fig. 4.

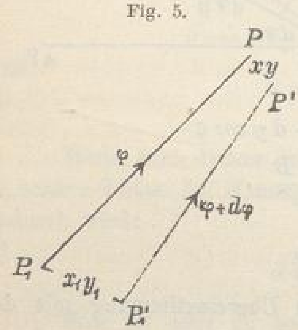


II. Fall. (Fig. 4.) Diesseitige Punktverschiebung. Der Zielpunkt P ist fest, und der Standpunkt P_1 ist veränderlich mit den Coordinatenänderungen $d\,x_1$ und $d\,y_1$. Dann ist die Richtungsänderung:

$$d\,\varphi = +\frac{\sin\varphi}{s}\,\varrho\,d\,x_1 - \frac{\cos\varphi}{s}\,\varrho\,d\,y_1 \qquad (11)$$

Es können auch *beide* Punkte, Zielpunkt *und* Standpunkt veränderlich sein, und dann werden einfach die Beträge (10) und (11) addiert, nämlich:

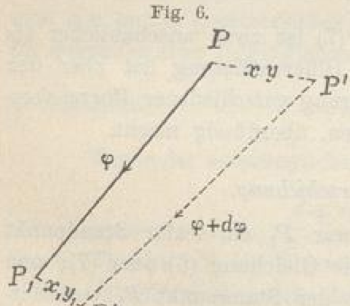
Fig. 5.



III. Fall. (Fig. 5.) Der Standpunkt P_1 erleidet Coordinatenänderungen $d\,x_1$ $d\,y_1$ und der Zielpunkt P erleidet Änderungen $d\,x$, $d\,y$; dann ist die Richtungsänderung:

$$d\,\varphi = -\frac{\sin\varphi}{s}\,\varrho\,(d\,x - d\,x_1) + \frac{\cos\varphi}{s}\,\varrho\,(d\,y - d\,y_1) \qquad (12)$$

Fig. 6.



IV. Fall. (Fig. 6.) Man hat beiderseitige Coordinatenänderungen wie in Fig. 5., aber der Richtungswinkel φ ist diesesmal im umgekehrten Sinne gezählt. Dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= +\frac{\sin\varphi}{s}\,\varrho(dx - dx_1) - \frac{\cos\varphi}{s}\,\varrho(dy - dy_1) \\ \text{oder } d\varphi &= -\frac{\sin\varphi}{s}\,\varrho(dx_1 - dx) + \frac{\cos\varphi}{s}\,\varrho(dy_1 - dy) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Richtungs-Coefficienten für Meter oder für Decimeter.

Die Coefficienten der Grundformel (6) oder (7) wollen wir besonders bezeichnen, mit a und b, nämlich:

$$a = -\frac{\varrho}{s} \sin \varphi \qquad b = +\frac{\varrho}{s} \cos \varphi \tag{14}$$

oder

$$a = -\frac{\varrho}{s^2} \Delta y \qquad b = +\frac{\varrho}{s^2} \Delta x \tag{15}$$

Dabei bedeutet Δy eine Ordinatenänderung und Δx eine Abscissenänderung in dem Richtungssinne von φ, welcher in (15) stets besonders zu bemerken ist, während nach (14) die a und b lediglich eindeutige Funktionen von φ und s sind.

Man kann nun natürlich für jedes gegebene φ und s die Funktionen a und b ausrechnen, z. B.: für $s = 2700^m$ und $\varphi = 202° 17'$:

$$\begin{array}{r|l}
\log \varrho & 5.3144 \\
\log s & 3.4314 \\
\hline
\log \left(\dfrac{-\varrho}{s}\right) & 1.8830_n \\
\log \sin \varphi & 9.5789_n \\
\hline
\log a & 1.4619
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\log \varrho & 5.3144 \\
\log s & 3.4314 \\
\hline
\log \left(\dfrac{\varrho}{s}\right) & 1.8830 \\
\log \cos \varphi & 9.9663_n \\
\hline
 & 1.8493_n
\end{array}$$

$$a = +28{,}97 \qquad b = -70{,}68 \tag{16}$$

Diese Rechnung ist nur mit 4 stelligen Logarithmen geführt, was in den meisten Fällen ausreicht. Diesem Beispiel entspricht nun die Formel:

$$d\varphi = +28{,}97\, dx - 70{,}68\, dy \text{ für Meter} \tag{17}$$

wobei dx und dy Coordinatenänderungen in Metermass sind, weil auch s in Metern eingeführt wurde.

Oder die Gleichung (17) sagt: Wenn eine 2700^m lange Strecke im Richtungswinkel 202° 17′ am jenseitigen Endpunkte sich in x und in y je um 1 Meter verschiebt, so ändert sich die Strahlenrichtung um $+28{,}97'' - 70{,}68'' = -41{,}71''$.

In sehr vielen Fällen sind die Coordinatenverschiebungen dx und dy erheblich kleiner als 1 Meter, weshalb die Rechnung sich angenehmer mit dx und dy in *Decimetern* gestaltet; in diesem Falle werden die a und b ebenfalls kleiner, nämlich $\frac{1}{10}$ der vorigen oder man hat für Decimeter:

$$\left.\begin{array}{ll}
a = -\dfrac{1}{10}\dfrac{\varrho}{s} \sin \varphi & b = +\dfrac{1}{10}\dfrac{\varrho}{s} \cos \varphi \\
 = -\dfrac{1}{10}\dfrac{\varrho}{s^2} \Delta y & = +\dfrac{1}{10}\dfrac{\varrho}{s^2} \Delta x
\end{array}\right\} \tag{18}$$

und das vorige Zahlenbeispiel giebt:

$$d\varphi = +2{,}897\, dx - 7{,}068\, dy \text{ für Decimeter,}$$

d. h. wenn die Verschiebungen dx und dy je 1 Decimeter oder 0,1 Meter betragen, so ist die Richtungsänderung $d\varphi = +2{,}897'' - 7{,}068'' = -4{,}171''$ oder dasselbe, was man im ersten Falle mit $dx = dy = 0{,}1^m$ erhält.

Da wir später meistens mit dx und dy in Decimetern rechnen werden, und da die Entfernungen s am bequemsten in Kilometern gezählt werden, wollen wir dafür besondere Zeichen einführen, nämlich für $s = 1000^m = 1^{km}$:

$$-\frac{\varrho}{10}\frac{\sin \varphi}{1000} = \mathfrak{x} \qquad +\frac{\varrho}{10}\frac{\cos \varphi}{1000} = \mathfrak{y} \tag{19}$$

oder weil $\varrho = 206\,265$ für Sekunden alter Teilung ist:

$$-20{,}6265\, \sin \varrho = \mathfrak{x} \qquad +20{,}6265\, \cos \varphi = \mathfrak{y} \tag{20}$$

Versteht man dann unter S die Entfernung in Kilometern, also $S = s : 1000$, so wird:

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{\mathfrak{x}}{S} \qquad b = \dfrac{\mathfrak{y}}{S} \\ \text{für } dx \text{ und } dy \text{ in Decimetern , } S \text{ in Kilometern.} \end{array}\right\} \tag{21}$$

§ 90. Verschiedene Hilfsmittel zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten.

Die Richtungs-Coefficienten, welche man bei ausgedehnten Ausgleichungsrechnungen immer braucht, sind nach (18) des vorigen § 89. für dx und dy in *Decimetern:*

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s} \sin \varphi \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s} \cos \varphi \tag{1}$$

oder

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2} \Delta y \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2} \Delta x \tag{2}$$

oder mit Vorbereitung für die Entfernung S in Kilometern:

$$\text{für alte Teilung: } \mathfrak{x} = -20{,}6265\, \sin \varphi \qquad \mathfrak{y} = +20{,}6265\, \cos \varphi \tag{3}$$

$$\text{für neue Teilung: } \mathfrak{x} = -63{,}6620\, \sin \varphi \qquad \mathfrak{y} = +63{,}6620\, \cos \varphi \tag{4}$$

$$a = \frac{\mathfrak{x}}{S} \qquad b = \frac{\mathfrak{y}}{S} \qquad (S \text{ in Kilometern}) \tag{5}$$

Man kann diese a und b auf verschiedenen Wegen bestimmen, wie wir nun darlegen wollen:

I. Logarithmische Rechnung.

Das einfachste und nächstliegende Mittel, um diese Coefficienten zu bestimmen, ist die Ausrechnung mit 4—5 stelligen Logarithmen im Anschluss an die logarithmische Rechnung von φ und s selbst. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{llll}
P & y = -2784{,}96^{m} & x = +\ 8326{,}92^{m} & \\
P_1 & y_1 = -1761{,}11 & x_1 = +10825{,}29 & \\
\hline
 & y - y_1 = -1023{,}85 & x - x_1 = -\ 2498{,}37 & \\
 & \quad = \Delta y & \quad = \Delta x & \\
\log \Delta y & 3.010226_n & 3.010226 & 3.397657 \\
\log \Delta x & 3.397657_n & 9.578860 & 9.966291 \\
\hline
\log \operatorname{tang} \varphi & 9.612569 & 3.431366 & \log s \ \ 3.431366 \\
 & & & \log s^2 \ \ 6.862732 \\
 & & s = 2700{,}12^{m} & \\
\varphi = 202^\circ\, 17'\, 1{,}3'' & & S = 2{,}70^{km} &
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Dieses ist die gewöhnliche Berechnung von φ und s, an welche sich nun die Berechnung von a und b mit 4 stelligen Logarithmen anschliesst, in aller Ausführlichkeit geschrieben:

$$\left.\begin{array}{r|l}
\log -\dfrac{\varrho}{10} & 4.3144_n \\
\log (1:s) & 6.5686 \\
\log \sin \varphi & 9.5789_n \\
\hline
\log a & 0.4619 \\
\multicolumn{2}{c}{a = +2{,}897}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\log +\dfrac{\varrho}{10} & 4.3144 \\
\log (1:s) & 6.5686 \\
\log \cos \varphi & 9.9663_n \\
\hline
\log b & 0{,}8493_n \\
\multicolumn{2}{c}{b = -7{,}068}
\end{array}\right\} \tag{7}$$