

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1895**

§ 91. Vorwärts-Einschneiden mit 3 Winkeln

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

„Zunge“ des gewöhnlichen Rechenschieberstabes angebracht worden, mit deren Hilfe die Funktionen  $a$  und  $b$  entsprechend den Gleichungen (13) und (14) abgeschoben werden können. Weiteres hierüber, Gebrauchsanweisung und Genauigkeit, giebt Voigt in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 183—188.

Versuchen wir alle diese Verfahrensarten zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten  $a$  und  $b$  zu vergleichen, so gebürt der unmittelbaren Ausrechnung mit 4—5steligen Logarithmen der Vorzug bei allen wichtigen Fällen, z. B. I.—II. Ordnung, und auch im ersten Unterricht ist nichts anderes zu raten.

Dagegen bei glattem Betriebe zahlreicher Ausgleichungen III.—IV. Ordnung ist die logarithmische Ausrechnung der vielen  $a$  und  $b$  zu mühsam; hier haben wir mit den Hilfstafeln S. [8]—[17] die besten Erfahrungen gemacht, wobei die  $s$  aus dem Netzbilde der Triangulierung entnommen und die  $\gamma:s$  und  $\varphi:s$  mit dem Rechenschieber abgeschoben werden.

Die Methode der logarithmischen Differenzen (III im vorstehenden) wird viel gerühmt, aber sie hat für uns den Übelstand, dass man die logarithmischen Differenzen für  $\Delta x$  und  $\Delta y$  nicht kurzer Hand aus der Logarithmentafel herausschreiben kann, sondern jedesmal die *Stellung des Kommas* besonders überlegen muss. Auch ist man bei der scharfen Ausrechnung der Näherungen ( $\varphi$ ) durch die Nebenrücksicht auf die  $a$  und  $b$  unangenehm gehindert. Im Vergleich mit der glatten Rechnung mit den Diff. für  $10''$ , welche wir auf S. 180 bei Triangulierungsnetzen kennen gelernt haben, ist die Rechnung mit den log. Diff. bei Einschneideausgleichungen viel weniger nützlich.

Die Seiffert'sche und ähnliche Hilfstafeln (Verfahren IV im vorstehenden) haben wir zu Kontrollrechnungen nützlich gefunden.

Die verschiedenen graphischen Hilfsmittel, und der Voigtsche Rechenschieber, werden zur Abwechslung in dem tödenden Einerlei der Rechenarbeit empfohlen.

Dass das Bedürfnis solcher Hilfsmittel besteht, wird durch die zahlreichen Erfindungen und Vorschläge auf diesem Gebiete bewiesen; die richtige Auswahl unter denselben zu treffen, wird den Erfahrungen und dem Gutdünken des einzelnen Rechners überlassen bleiben.

## § 91. Vorwärtseinschneiden mit drei Winkeln.

Als einfachsten Fall des Vorwärtseinschneidens mit Ausgleichung betrachten wir im Anschluss an Fig. 1. S. 335 Folgendes:

Es sind 3 Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  durch ihre rechtwinkligen Coordinaten fest gegeben und ein neuer Punkt  $P$  soll durch Winkelmessungen auf  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  bestimmt werden, z. B. durch Messung des Winkels  $A P_1 P_2 = \beta_1$ , dann  $P_1 P_2 B = \beta_2$  und  $P_2 P_3 C = \beta_3$ .

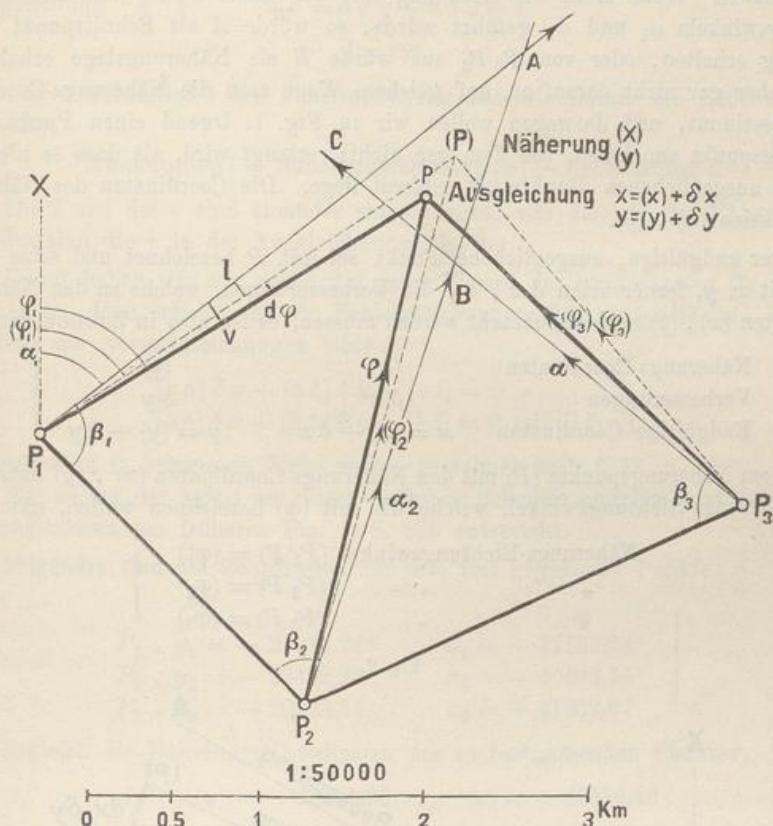
Wenn nur *zwei* von diesen Winkeln  $\beta$  gemessen wären, so wäre der neue Punkt  $P$  eindeutig bestimmt, und seine Coordinaten könnten nach bekannten einfachen Regeln sofort endgültig berechnet werden.

Wenn dagegen noch ein dritter Winkel  $\beta$  gemessen ist, so liegt eine Ausgleichsaufgabe vor, welche wir nun durchführen werden.

Durch die 3 gemessenen Brechungswinkel  $\beta$  sind im Anschluss an die festen Linien  $P_1 P_2$  und  $P_2 P_3$  nach dem neuen Punkte  $P$  3 Strahlen  $P_1 A$ ,  $P_2 B$  und  $P_3 C$  bestimmt, welche sich aber wegen der Beobachtungsfehler nicht in *einem* Punkte  $P$  schneiden, sondern ein fehlerzeigendes Dreieck  $A B C$  bilden werden.

Wir wollen uns zuerst überzeugen, dass man statt der beobachteten *Brechungswinkel*  $\beta$  sofort auch die *Richtungswinkel*  $\alpha$  (Katasterbezeichnung „Neigungen“) als beobachtet einführen kann, welche von den festen Punkten  $P_1, P_2, P_3$  nach dem neuen

Fig. 1.



Punkte  $P$  hinführen. Jedenfalls kann man die Richtungswinkel  $[P_1 P_2]$  nebst  $[P_2 P_3]$  und  $[P_3 P_1]$  aus den Coordinaten der gegebenen Punkte fest berechnen, nämlich in bekannter Weise:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tang } [P_1 P_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ und } [P_2 P_1] = [P_1 P_2] \pm 180^\circ \\ \text{tang } [P_3 P_2] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Wenn nun die Brechungswinkel  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  dazu gemessen sind, so hat man sofort auch die neuen Richtungswinkel:

$$\left. \begin{array}{l} (P_1 A) = [P_1 P_2] - \beta_1 = \text{Richtungswinkel } \alpha_1 \\ (P_2 B) = [P_2 P_1] + \beta_2 = \quad \quad \quad \alpha_2 \\ (P_3 C) = [P_3 P_2] + \beta_3 = \quad \quad \quad \alpha_3 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Diese Richtungswinkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  werden wir nun wie unmittelbar *gemessene* Größen weiter behandeln dürfen, denn die Anlagestrahlen  $[P_1 P_2]$  u. s. w. gelten als unabänderlich fest und fehlerfrei, es trägt sich daher der Fehler eines Winkels  $\beta$  geradezu auf  $\alpha$  über.

Das nächste Erfordernis ist die Gewinnung von Näherungs-Coordinateen des neuen Punktes  $P$ , die man sich leicht dadurch verschafft, dass man den Punkt  $P$  aus *zwei*en der Winkel  $\beta$  bestimmt, d. h. indem man etwa die Vorwärtseinschneidung  $P_1 PP_2$  mit der Basis  $P_1 P_2$  in bekannter Weise durchrechnet, oder auch  $P_2 PP_3$ , oder sonstwie. Wenn z. B. die Rechnung mit der Basis  $P_1 P_2$  und mit den zwei Richtungswinkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  geführt würde, so würde  $A$  als Schnittpunkt für die Näherung erhalten, oder von  $P_2 P_3$  aus würde  $B$  als Näherungslage erhalten; es kommt aber gar nicht darauf an, auf welchem Wege man die Näherungs-Coordinateen von  $P$  bestimmt, und deswegen wollen wir in Fig. 1. irgend einen Punkt ( $P$ ) als Näherungspunkt annehmen, von dem gar nichts verlangt wird, als dass er nicht weit von dem ausgeglichenen Punkte  $P$  entfernt liege. Die Coordinateen des Näherungspunktes seien  $(x)$ ,  $(y)$ .

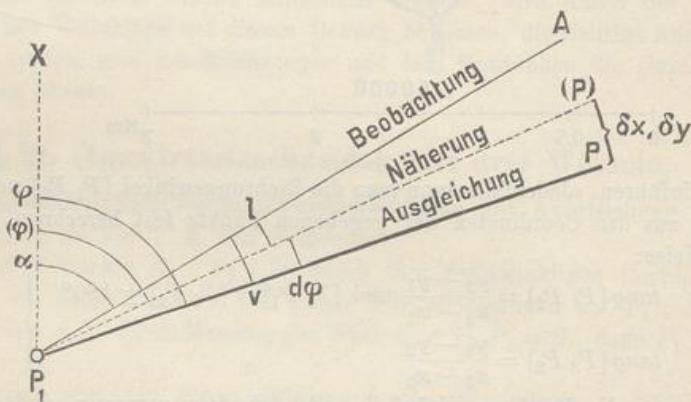
Der endgültige, ausgeglichene Punkt sei mit  $P$  bezeichnet und seine Koordinaten mit  $x, y$ , ferner seien  $\delta x, \delta y$  die Verbesserungen, welche an den Näherungs-Koordinaten  $(x), (y)$  noch angebracht werden müssen, es ist also in Zusammenstellung:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{N\"aherungs-Coordinate} & (x) & (y) \\ \text{Verbesserungen} & \delta x & \delta y \\ \text{Endg\"ultige Coordinate} & x = (x) + \delta x & y = (y) + \delta y \end{array} \right\} \quad (3)$$

Dem Näherungspunkte ( $P$ ) mit den Näherungs-Coordinaten ( $x$ ), ( $y$ ) entsprechen auch Näherungs-Richtungswinkel, welche wir mit ( $\varphi$ ) bezeichnen wollen, nämlich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Näherungs-Richtungswinkel } (P_1 P) = (\varphi_1) \\ " \qquad \qquad \qquad (P_2 P) = (\varphi_2) \\ " \qquad \qquad \qquad (P_3 P) = (\varphi_3) \end{array} \right\} \quad (4)$$

Fig. 2.



Ausser den bis jetzt eingeführten Richtungsbezeichnungen  $\alpha$  für Beobachtung, ( $\varphi$ ) für Näherung, nehmen wir auch noch  $\varphi$  für Ausgleichung und dazu noch deren Differenzen, wie in Fig. 2. besonders eingeschrieben ist, und dann wird es nicht schwer sein, vollends die Fehlergleichung für einen Strahl zu bilden. Es ist nämlich  $v$  die Differenz zwischen dem Ausgleichungswert  $\varphi$  und dem Beobachtungswert  $\alpha$  also:

$$v = \varphi - \alpha = (\varphi - (\varphi)) + ((\varphi) - \alpha) = d\varphi + l \quad (5)$$

Da der Übergang von  $(\varphi)$  auf  $\varphi$  einer Coordinatenverschiebung  $\delta x$ ,  $\delta y$  entsprechen soll, so haben wir nach den Grundformeln von § 89.:

$$\varphi - (\varphi) = d\varphi = a \delta x + b \delta y \quad (6)$$

also nach (5) und (6):

$$\text{Fehlergleichung} \quad v = a \delta x + b \delta y + l \quad (7)$$

$$\text{wo} \quad l = (\varphi) - \alpha \quad (8)$$

Das Absolutglied  $l$  der Fehlergleichung hat wie immer die Bedeutung (vgl. S. 44—45):

$$\text{Absolutglied } l = \text{Näherungsrechnung } (\varphi) - \text{Beobachtung } \alpha \quad (8a)$$

Die  $l$  und die  $v$  sind einander entsprechend; was die  $l$  in der Näherungsrechnung, das sind die  $v$  in der Ausgleichsrechnung.

Damit haben wir nun schon die ganze Theorie der Ausgleichung für Vorwärtseinschneiden, denn sobald man die Fehlergleichungen (7) aufgestellt hat, kann man wie immer die Normalgleichungen bilden:

$$\left. \begin{array}{l} [a a] \delta x + [a b] \delta y + [a l] = 0 \\ [a b] \delta x + [b b] \delta y + [b l] = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

und damit wird in bekannter Weise weiter gerechnet nach § 13. u. ff.

Wir wollen das sofort an einem einfachen Beispiele erproben, welches ungefähr den Verhältnissen der früheren Fig. 1. S. 335 entspricht.

Folgendes sind die Coordinaten der drei fest gegebenen Punkte:

$$\left. \begin{array}{ll} y & x \\ P_1, y_1 = -25014,26^m & x_1 = +42133,28^m \\ P_2, y_2 = -23406,93 & x_2 = +40493,76 \\ P_3, y_3 = -20728,34 & x_3 = +41632,97 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Zugleich die Näherungs-Coordinaten des zu bestimmenden Punktes:

$$(P), (y) = -22501,20 \quad (x) = +43512,40 \quad (11)$$

Aus (10) berechnet man die festen Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigungen“) in bekannter Weise:

$$\left. \begin{array}{l} [P_1 P_2] = 135^\circ 34' 5'' \text{ oder } [P_2 P_1] = 315^\circ 34' 5'' \\ \text{und} \quad [P_2 P_3] = 66^\circ 57' 35'', \quad [P_3 P_2] = 246^\circ 57' 35'' \end{array} \right\} \quad (12)$$

Nun sollen die 3 Winkel gemessen sein:

$$\beta_1 = 74^\circ 19' 41'' \quad \beta_2 = 61^\circ 8' 10'' \quad \beta_3 = 69^\circ 42' 28'' \quad (13)$$

Diese gemessenen Brechungswinkel zu den festen Richtungswinkeln (12) hinzugefügt geben die neuen Richtungswinkel  $\alpha$ , nämlich:

$$\left. \begin{array}{lll} [P_1 P_2] = 135^\circ 34' 5'' & [P_2 P_1] = 315^\circ 34' 5'' & [P_3 P_2] = 246^\circ 57' 35'' \\ -\beta_1 = -74 19 41 & +\beta_2 = 61 8 10 & +\beta_3 = 69 42 28 \\ \hline \alpha_1 = 61^\circ 14' 24'' & \alpha_2 = 16^\circ 42' 15'' & \alpha_3 = 316^\circ 40' 03'' \end{array} \right\} \quad (14)$$

Nun folgt die Berechnung der Näherungs-Richtungswinkel  $(\varphi)$  u. s. w. und damit verbindet man sogleich auch die Berechnung der Coefficienten  $a$  und  $b$  nach § 89. Dieses ist in folgender Tabelle enthalten:

Berechnung von  $(\varphi)$  nebst  $a$  und  $b$ .

(15)

Punkte	$y_b - y_a = \Delta y, x_b - x_a = \Delta x, (AB) = (\varphi)$			Entfernung $s$ mit Spalte rechts	$a =$	$b =$
$B$	$\text{tang } (\varphi) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$				$-\frac{0,1 \varrho}{s^2} \Delta y$	$+\frac{0,1 \varrho}{s^2} \Delta x$
$A$	$y$	$x$	$(\varphi)$			
$(P)$ $P_1$	— 22501,20	+ 43512,40	3.400203	3.4002	0,1 $\varrho$ ..	4.3144
	— 25014,26	+ 42133,28	3.139602	9.9428	$s^2$ ..	6.9148
	+ 2513,06	+ 1379,12	0.260601	3.4574	7.3996	7.3996
			$(\varphi_1) = 61^\circ 14' 34''$	$s = 2867''$	3.4002	3.1396
					0.7998	0.5392
					$a = -6,31$	$b = +3,46$
$(P)$ $P_2$	— 22501,20	+ 43512,40	2.956999	3.4798		4.3144
	— 23406,93	+ 40493,76	3.479812	9.9813		6.9970
	+ 905,73	+ 3018,64	9.477187	3.4985	7.3174	7.3174
			$(\varphi_2) = 16^\circ 42' 6''$	$s = 3152''$	2.9570	3.4798
					0.2744	0.7972
					$a = -1,88$	$b = +6,29$
$(P)$ $P_3$	— 22501,20	+ 43512,40	3.248674	3.2740		4.3144
	— 20728,34	+ 41632,97	3.274026	9.8618		6.8244
	— 1772,86	+ 1879,43	9.974648	3.4122	7.4900	7.4900
			$(\varphi_3) = 316^\circ 40' 17''$	$s = 2584''$	3.2487	3.2740
					0.7387	0.7640
					$a = +5,48$	$b = +5,81$

Die Vergleichung der so berechneten  $(\varphi)$  mit den unter (14) gegebenen beobachteten  $\alpha$  giebt die Absolutglieder  $l = (\varphi) - \alpha$  nach (8), und dazu setzen wir auch sogleich die in der vorstehenden Tabelle berechneten Coefficienten  $a$  und  $b$ :

beobachtet $\alpha$	Näherung $(\varphi)$	$(\varphi) - \alpha = l$	$a$	$b$	(16)
$61^\circ 14' 24''$	$61^\circ 14' 34''$	$+ 10''$	$-6,3$	$+3,5$	
16 42 15	16 42 6	$-9''$	$-1,9$	$+6,3$	
316 40 3	316 40 17	$+14''$	$+5,5$	$+5,8$	

Daraus auch sofort die Summen-Coefficienten für die Normalgleichungen, alles möglichst abgerundet:

$a^2$	$b^2$	$a b$	$a l$	$b l$	$l^2$	(17)
40	12	$-22$	$-63$	$+35$	100	
4	40	$-12$	$+17$	$-57$	81	
80	34	$+32$	$+77$	$+81$	196	
$+74$	$+86$	$-2$	$+31$	$+59$	377	

Die Normalgleichungen werden also:

$$\begin{aligned} + 74 \delta x - 2 \delta y + 31 &= 0 \\ - 2 \delta x + 86 \delta y + 59 &= 0 \text{ mit } [ll] = 377. \end{aligned}$$

Die Elimination nebst Gewichts- und Fehlerberechnung machen wir doppelt, und zwar bei so kleinen Zahlen schlechthin mit dem Rechenschieber, nach der Anleitung von (2)–(3) S. 63:

$$\left. \begin{array}{r} + 74 - 2 + 31 \\ + 86 + 59 \\ - 0 + 1 \\ + 377 \\ - 13 \\ \hline [bb, 1] = 86 + 86 + 60 \\ + 364 \\ - 42 \\ \hline [ll, 2] = 322 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 86 - 2 + 59 \\ + 74 + 31 \\ - 0 + 1 \\ + 377 \\ - 40 \\ \hline [aa, 1] = 74 + 74 + 32 \\ + 337 \\ - 14 \\ \hline [ll, 2] = 323 \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \delta y &= -\frac{60}{86} = -0,70^{dm} & \delta x &= -\frac{32}{74} = -0,43^{dm} \\ &= -0,070^m & &= -0,043^m \end{aligned}$$

hiezu  $\begin{aligned} y &= -22501,20 \text{ Näherung (11) S. 337} & (x) &= +43512,40 \\ y &= -22501,27^m & & x = +43512,36^m \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (19)$

Mit diesen ausgeglichenen Koordinaten  $y, x$  berechnet man die ausgeglichenen Richtungswinkel  $\varphi$  ebenso wie früher die Näherungen ( $\varphi$ ) in der Tabelle (15) S. 338. Die so erhaltenen  $\varphi$  vergleicht man wieder mit den gemessenen  $\alpha$ , wie folgende Tabelle zeigt:

beobachtet $\alpha$	ausgeglichen $\varphi$	$\varphi - \alpha = v$	$v^2$	
$61^\circ 14' 24''$	$61^\circ 14' 34''$	+ 10	100	
16 42 15	16 42 2	- 13	169	
316 40 3	316 40 10	+ 7	49	
			318	

(19 a)

Die so erhaltene Summe  $[v^2] = 318$  muss mit den  $[ll, 2] = 322$  oder  $323$  der Elimination bei (18) stimmen, was hier genügend der Fall ist; und nun hat man den mittleren Fehler einer Beobachtung mit rund  $[v^2] = 320$ :

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}} = \sqrt{\frac{320}{1}} = \pm 18'' \quad (20)$$

und die mittleren Koordinatenfehler nach (10) und (11) auf S. 57 unten:

$$m_y = \frac{18}{\sqrt{86}} = \pm 1,9^{dm} \quad m_x = \frac{18}{\sqrt{74}} = \pm 2,1^{dm}$$

also zusammen mit (19) hat man das Schlussergebnis:

$$y = -22501,27^m \pm 0,19^m \quad x = +43512,36^m \pm 0,21^m \quad (21)$$

Alles dieses, was wir hier, um die allmähliche Entstehung zu zeigen, in einzelnen Gleichungen und Tabellengruppen vorgeführt haben, werden wir im folgenden

§ 92. in *einem* tabellarischen Schema an einem mehr praktischen Beispiele vorführen, inzwischen aber noch eine Bemerkung über die Probe für  $[v^2] = [ll \cdot 2]$  machen, und dazu noch einen Nachtrag zu dem früheren § 27. bringen.

Bei 2 Unbekannten hat man nach (17) S. 53 oder auch nach (8) S. 85 die Probe:

$$[vv] = [ll \cdot 2] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} \quad (22)$$

Dieses giebt in unserem Falle unmittelbar bei (19a)  $[v^2] = 318$  und dann bei (18):

$$[ll \cdot 2] = 377 - 13 - 42 = 322 \text{ und } 377 - 40 - 14 = 323$$

und alle 3 Werte 318, 322, 323 stimmen nach Massgabe der eingehaltenen Rechenschärfe (Abrundung auf 1") genügend zusammen.

Es giebt aber noch eine andere Kontrollformel, welche in unserem früheren theoretischen § 27. S. 85 nicht mitgeteilt, welche auch, soweit uns bekannt, in den Gauss'schen Originalschriften (vgl. S. 3—4) noch nicht vorkommt. Nach Helmert, Ausgleichsrechnungen nach der M. d. kl. Q. 1872, S. 106 wird die fragliche Formel so gefunden:

Eine einzelne Fehlgleichung ist nach (1) S. 80:

$$v = ax + by + cz + \dots + l$$

Dieses mit  $l$  multipliziert und zugleich auf alle Gleichungen ausgedehnt und addiert giebt:

$$[vl] = [al]x + [bl]y + [cl]z + \dots + [ll]$$

Dann jede Fehlgleichung mit ihrem  $v$  multipliziert und alles addiert giebt:

$$[vv] = [av]x + [bv]y + [cv]z + \dots + [lv]$$

Nun ist aber wegen der Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [av] &= [aa]x + [ab]y + [ac]z + \dots + [al] = 0 \\ [bv] &= \dots = 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es folgt daher aus den vorstehenden beiden Gleichungen für  $[vl]$  und  $[vv]$ :

$$[vv] = [ll] + [al]x + [bl]y + [cl]z + \dots \quad (23)$$

Diese Gleichung haben wir in § 27. nachzutragen.

Bei nur zwei Unbekannten  $\delta x$  und  $\delta y$  giebt dieselbe:

$$[vv] = [ll] + [al]\delta x + [bl]\delta y \quad (24)$$

und mit Anwendung auf das vorstehende Zahlenbeispiel (18):

$$[vv] = 377 - 31 \times 0,43 - 59 \times 0,70$$

$$[vv] = 377 - 13 - 41 = 323.$$

## § 92. Vorwärtseinschneiden mit Richtungen.

Ganz in derselben Weise, wie das im vorigen § 91. durchgeführte Einschneiden mit 3 Strahlen, welche durch je einen Winkel festgelegt sind, kann auch das Vorwärtseinschneiden mit beliebig vielen Strahlen behandelt werden unter der Voraussetzung, dass diese Strahlen als *gleichgewichtig* betrachtet werden dürfen. Das ist streng theoretisch gewöhnlich nicht der Fall; wir werden aber erst später (in § 97.—98.) die dazu gehörigen feineren Theorien behandeln und hier kurzer Hand *annehmen*, es seien gleiche Gewichte vorhanden.

In den Abrissen S. 204 und S. 207 haben wir gesehen, wie an das Fünfeck