UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 92. Vorwärts-Einschneiden mit Richtungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Visual Library

§ 92. in *einem* tabellarischen Schema an einem mehr praktischen Beispiele vorführen, inzwischen aber noch eine Bemerkung über die Probe für $[v^2] = [l\,l\,.\,2]$ machen, und dazu noch einen Nachtrag zu dem früheren § 27. bringen.

Bei 2 Unbekannten hat man nach (17) S. 53 oder auch nach (8) S. 85 die Probe:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,2] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \tag{22}$$

Dieses giebt in unserem Falle unmittelbar bei (19a) $[v^2] = 318$ und dann bei (18):

$$[l\,l\,.\,2] = 377 - 13 - 42 = 322 \text{ und } 377 - 40 - 14 = 323$$

und alle 3 Werte 318, 322, 323 stimmen nach Massgabe der eingehaltenen Rechenschärfe (Abrundung auf 1″) genügend zusammen.

Es giebt aber noch eine andere Kontrollformel, welche in unserem früheren theoretischen § 27. S. 85 nicht mitgeteilt, welche auch, soweit uns bekannt, in den Gauss schen Originalschriften (vgl. S. 3—4) noch nicht vorkommt. Nach Helmert, Ausgleichungsrechnungen nach der M. d. kl. Q. 1872, S. 106 wird die fragliche Formel so gefunden:

Eine einzelne Fehlergleichung ist nach (1) S. 80:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l$$

Dieses mit l multipliziert und zugleich auf alle Gleichungen ausgedehnt und addiert giebt:

$$[v\,l] = [a\,l]\,x + [b\,l]\,y + [c\,l]\,z + \ldots + [l\,l]$$

Dann jede Fehlergleichung mit ihrem v multipliziert und alles addiert giebt:

$$[v\,v] = [a\,v]\,x + [b\,v]\,y + [c\,v]\,z + \ldots \quad [l\,v]$$

Nun ist aber wegen der Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [a\,v] &= [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \ldots + [a\,l] = 0 \\ [b\,v] &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es folgt daher aus den vorstehenden beiden Gleichungen für $[v\,l]$ und $[v\,v]$:

$$[v\,v] = [l\,l] + [a\,l]\,x + [b\,l]\,y + [c\,l]\,z + \ldots \tag{23}$$

Diese Gleichung haben wir in § 27. nachzutragen.

Bei nur zwei Unbekannten $\delta\,x$ und $\delta\,y$ giebt dieselbe:

$$[v\,v] = [l\,l] + [a\,l]\,\delta\,x + [b\,l]\,\delta\,y \tag{24}$$

und mit Anwendung auf das vorstehende Zahlenbeispiel (18):

$$\begin{aligned} [v\,v] &= 377 - 31 \times 0{,}43 - 59 \times 0{,}70 \\ [v\,v] &= 377 - 13 - 41 = 323. \end{aligned}$$

§ 92. Vorwärtseinschneiden mit Richtungen.

Ganz in derselben Weise, wie das im vorigen § 91. durchgeführte Einschneiden mit 3 Strahlen, welche durch je einen Winkel festgelegt sind, kann auch das Vorwärtseinschneiden mit beliebig vielen Strahlen behandelt werden unter der Voraussetzung, dass diese Strahlen als *gleichgewichtig* betrachtet werden dürfen. Das ist streng theoretisch gewöhnlich nicht der Fall; wir werden aber erst später (in § 97.—98.) die dazu gehörigen feineren Theorieen behandeln und hier kurzer Hand *annehmen*, es seien gleiche Gewichte vorhanden.

In den Abrissen S. 204 und S. 207 haben wir gesehen, wie an das Fünfeck von S. 189 auch die *neuen* Strahlen nach den neuen Punkten Hochschule und Dreifaltigkeit von S. 185 mit angeschlossen bzw. eingebunden worden sind, z. B. ist auf S. 207 auf Station 1. Aegidius neben den 5 alten Strahlen 1. 2. 3. 4. 5. auch noch Hochschule = 315° 2′ 32,6″ als beobachtet angegeben (sowie auch Dreifaltigkeit = 35° 3′ 47,7″) und dieses 315° 2′ 32,6″ werden wir nun genau ebenso in eine Vorwärts-Einschneide-Ausgleichung einführen, wie das $\alpha_1 = 61° \; 14' \; 24''$, welches in Fig. 1. § 91. S. 335 durch Anschluss von β_1 an den festen Strahl $P_1 P_2$ erhalten wurde. Der Unterschied besteht allerdings, dass in Fig. 1. S. 335 die neue Richtung α_1 nur an *einen* alten festen Strahl $P_1 P_2$ angeschlossen ist, dagegen Aegidius-Hochschule in Fig. 1. S. 185 an *fünf* alte feste Strahlen (vorausgesetzt, dass *ein* Satz mit allen Strahlen auf Aegidius gemessen wäre); aber wie schon gesagt, wir wollen von solchen Unterscheidungen hier absehen und, der laufenden Praxis entsprechend, die Strahlen zum Vorwärtseinschneiden als *gleich*gewichtig annehmen. Ausserdem wollen wir im Gegensatz zu dem ersten Zahlenbeispiele von § 91. nun die ganze Rechnung in ein planmässig angelegtes *Rechnungsformular* S. 343 einsetzen, welches seit Jahren bei unseren praktischen Einschneide-Ausgleichungen gebraucht ist.

Nach dem Anblick des Netzes Fig. 1. S. 185 wollen wir den Punkt Hochschule vorwärts einschneiden von den 4 festen Punkten aus: Steuerndieb, Aegidius, Wasserturm, Burg, und wir füllen demnach oben auf S. 343 die ersten Spalten bis α nach dem früheren Abrisse von S. 207 aus.

Nach diesem brauchen wir für den eingeschnittenen Punkt Hochschule Näherungs-Coordinaten, welche etwa aus beliebigen zweien der gemessenen α berechnet werden können, nach dem Schema von S. 296 unseres II. Bandes, 3. Aufl. 1893. In Fällen wie der unsrige S. 185 hat man solche Näherungs-Coordinaten längst schon von den Centrierungen her u. s. w. Woher die Näherungen stammen ist gleichgültig; wir haben in unserem Falle:

$$\text{Hochschule Näherung } (y) = -24709{,}8^{\text{m}}\,, \; (x) = -26868{,}3^{\text{m}}.$$

Zu der ganzen nun folgenden trigonometrischen Berechnung, Richtungswinkel (φ) und φ u. s. w. schicken wir die Bemerkung voraus, dass ein rechtwinkliges *ebenes* Coordinatensystem als gültig angenommen ist, dass also alle die kleinen Korrektionen von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, welche in § 64. S. 205—206 und in dem Abrisse S. 207, zu dem Netze S. 189 noch berücksichtigt worden sind, beim Übergang zu den Einschneide-Ausgleichungen nun schlechthin vernachlässigt werden, so dass die Zehntels-Sekunden (0,1″) nicht mehr richtig sein können. Wenn wir trotzdem auf 0,1″ formell rechnen, so hat das nur den Sinn, dass die Sekunden selbst vor Abstumpfung geschützt werden sollen, und dass immerhin noch etwa 0,3″ richtig erhalten wird.

Die auf irgend welche Weise erlangten Näherungs-Coordinaten (x), (y) werden auf S. 342 eingesetzt nebst den von S. 206 zu holenden Coordinaten der fest gegebenen Punkte, worauf die Berechnung der (φ) und nebenbei auch die Berechnung der genäherten Entfernungen s erfolgt. Die so erhaltenen (φ) setzt man oben auf S. 343 ein, berechnet dazu $(\varphi) - \alpha = l$ und die l^2.

Es folgt die zweite Gruppe von S. 343, bei welcher die Coefficienten a und b mit der Hilfstafel S. [10]—[15] des Anhangs berechnet werden. Die dazu nötigen s haben wir auf S. 342 mit 4stelligen Logarithmen nebenbei berechnet, man kann die s aber sehr oft auch genügend aus einem Netzbilde S. 185 abnehmen, wenn

(Fortsetzung auf S. 344.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Berechnung der Richtungswinkel zu der Ausgleichung S. 343:

Punkt P Punkt A (S. 206)	y_p x_p $y_p - y_a = \Delta y$	x_p x_a $x_p - x_a = \Delta x$	$\log \Delta y$ $\log \Delta x$ $\log tang\,(A\,P)$	Entfernung s mit Spalte rechts
			I. Vor der Ausgleichung.	
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	3.683149	3.6831
Steuerndieb .	— 19888,668	— 25951,884	2.962093	9.9923
	— 4821,132	— 916,416	0.721056	3.6908
			$(\varphi_1) = 259°\,14'\,14{,}7''$	$s_1 = 4907^m$
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	3.157755	3.1584
Aegidius . .	— 23271,813	— 28308,395	3.158391	9.8498
	— 1437,987	+ 1440,095	9.999364	3.3086
			$(\varphi_2) = 315°\,2'\,31{,}0''$	$s_2 = 2035^m$
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	2.918391	3.3430
Wasserturm .	— 25538,488	— 29071,474	3.343049	9.9713
	+ 828,688	+ 2203,174	9.575342	3.3717
			$(\varphi_3) = 20°\,36'\,46{,}7''$	$s = 2353^m$
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	3.054230	3.2767
Burg . . .	— 25842,799	— 24977,399	3.276669	9.9334
	+ 1132,999	+ 1890,901	9.777561	3.3433
			$(\varphi_4) = 149°\,4'\,14{,}2''$	$s = 2204^m$
			II. Nach der Ausgleichung.	
Hochschule .	— 24709,769	— 26868,306	3.683146	
Steuerndieb .	— 19888,668	— 25951,884	3.962096	
	— 4821,101	— 916,422	0.721050	
			$\varphi_1 = 259°\,14'\,14{,}2''$	
Hochschule .	— 24709,769	— 26868,306	3.157746	
Aegidius . .	— 23271,813	— 28308,395	3.158390	
	— 1437,956	+ 1440,089	9.999356	
			$\varphi_2 = 315°\,2'\,32{,}9''$	
Hochschule .	— 24709,769	— 26868,306	2.918408	
Wasserturm .	— 25538,488	— 29071,474	3.343048	
	+ 828,719	+ 2203,168	9.575360	
			$\varphi_3 = 20°\,36'\,49{,}5''$	
Hochschule .	— 24709,769	— 26868,306	3.054241	
Burg . . .	— 25842,799	— 24977,399	3.276671	
	+ 1133,030	— 1890,907	9.777570	
			$\varphi_4 = 149°\,4'\,12{,}3''$	

Vorwärtseinschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Eingeschnittener Punkt Hochschule (Fig. 1. S. 185).

Nr.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α (A S. 207)	Näherungs-Richtungwinkel (φ) S. 342	$(\varphi) - \alpha = l$	l^2
1	Steuerndieb	Hochschule	259° 14′ 15,1″	259° 14′ 14,7″	— 0,4″	0,16
2	Aegidius	„	315 2 32,6	315 2 31,0	— 1,6	2,56
3	Wasserturm	„	20 36 50,0	20 36 46,7	— 3,3	10,89
4	Burg	„	149 4 12,3	149 4 14,2	+ 1,9	3,61
			57 50,0	57 46,6	— 3,4	17,22

№	φ	$\mathfrak{x}$ Hilfstafel Anhang Seite [10]-[15]	$\mathfrak{y}$	s km	$\frac{\mathfrak{x}}{s} = a$	$\frac{\mathfrak{y}}{s} = b$	l	a^2	b^2	ab + —	al + —	bl + —
1	259° 10′	+ 20,8	— 3,9	4,91	+ 4,2	— 0,8	— 0,4	18	1	— 3	— 2	+ 0
2	315 0	+ 14,6	+ 14,6	2,04	+ 7,2	+ 7,2	— 1,6	52	52	+ 52	— 12	— 12
3	20 40	— 7, 3	+ 19,3	2,35	— 3,1	+ 8,2	— 3,3	10	67	— 25	+ 10	— 27
4	149 0	— 10,6	— 17,7	2,20	— 4,8	— 8,0	+ 1,9	23	64	+ 38	— 9	— 15
								+ 103	+ 184	+ 62	— 13	— 54

	a]	b]	l]	Nötigenfalls 3. Probe: $[vv] = [ll] + [al]\delta x + [bl]\delta y$	[b	[a	[l	
[a	+ 103	+ 62	—13		+ 184	+ 62	—54	b]
	[b	+ 184	—54			+ 103	—13	a]
		— 37	+ 8			— 21	+18	
		[l	+17				+17	l]
			— 2				—16	
$\delta y =$ + 0,31dm	[bb.1] =	+ 147	—46		[aa.1] =	+ 82	+ 5	$\delta x =$ — 0,06dm
$\delta y =$ + 0,031m			+15				+ 1	$\delta x =$ — 0,006m
$(y) =$ — 24709,800			—14				— 0	$(x) =$ — 26868,300
$y =$ — 24709,769m		[ll.2] =	+ 1			[ll.2] =	+ 1	$x =$ — 26868,306m

Nr.	Nötigenfalls Probe für $\delta\varphi$ $a\,\delta x + b\,\delta y = \delta\varphi$			$\varphi - (\varphi)$	Gemessene Richtung α (s. oben)	Endgültiger Richtungswinkel φ (S. 342)	$\varphi - \alpha = v$	v^2
1	— 0,3	— 0,2	— 0,5″	— 0,5	259° 14′ 15,1″	259° 14′ 14,2″	— 0,9	0,81
2	— 0,4	+ 2,2	+ 1,8	+ 1,9	315 2 32,6	315 2 32,9	+ 0,3	0,09
3	+ 0,2	+ 2,5	+ 2,7	+ 2,8	20 36 50,0	20 36 49,5	— 0,5	0,25
4	+ 0,3	— 2,5	— 2,2	— 1,9	149 4 12,3	149 4 12,3	— 0,0	0,00
			Probe		57 50,0	57 48,9	— 1,1	1,15

$[vv] = [ll.2] = 1,2$	$\log [vv]$	0.0792	$\log m^2$	9.7782	$\log m^2$	9.7782
$n - 2 = 2$	$\log (n-2)$	0.3010	$\log [bb.1]$	2.1673	$\log [aa.1]$	1.9138
	$\log m^2$	9.7782	$\log m y^2$	7.6109	$\log m x^2$	7.8644
	$\log m$	9.8891	$\log m y$	8.8054	$\log m x$	8.9322
	$m = \pm 0,8''$		$m y = \pm 0,06^{dm}$		$m x = \pm 0,09^{dm}$	

Schluss-Ergebnis:

Hochschule $y = - 24709,768^m$ $\qquad x = - 26868,306^m$

$+ 0.006^m \qquad \pm 0,009^m$

UNIVERSITÄTS-BIBLIOTHEK PADERBORN

man nur in der ganzen Rechnung die Rechenschärfe dem Sinn des Ganzen anpasst. Die Divisionen $\frac{\mathfrak{x}}{s} = a$ und $\frac{\mathfrak{y}}{s} = b$ macht man mit dem Rechenschieber oder geradezu, und dann geht die Ausrechnung der a^2, b^2, $a\,b$ u. s. w. in der zweiten Gruppe von S. 443 auch rasch.

Ebenso auch die Elimination nach der Vorschrift von (18) und (19) § 91. S. 339 mit dem Rechenschieber und mit der Probe $[l\,l\,.\,2] = +1$ links und $[l\,l\,.\,2] = +1$ rechts. Die dritte Probe $[l\,l\,.\,2] = [l\,l] + [a\,l]\,x + [b\,l]\,y$ haben wir nur für den Notfall mit hingeschrieben; sie stimmt in unserem Falle auch genügend.

Nachdem die $\delta\,y$ und $\delta\,x$ zu den Näherungen (y) und (x) hinzugefügt, und dadurch die endgültigen Coordinaten y und x erhalten sind, wird die zweite untere Hälfte von S. 342 ausgefüllt und die endgültigen φ berechnet, welche dann wieder nach S. 343 rechts unten herüber zu setzen sind, und mit $\varphi - \alpha = v$ und v^2 die Schlussprobe $[v\,v] = 1{,}75$ geben, welches mit $[l\,l\,.\,2] = 1$ genügend stimmt.

Wenn die Probe $[v\,v] = [l\,l\,.\,2]$ hinreichend stimmt, (und was „*hinreichend*" ist, hat der Rechner bald im Gefühl), — dann kann man überhaupt die Rechnung abschliessen, nach dem Vordruck unten auf S. 343 noch die mittleren Coordinatenfehler m_y und m_x ausrechnen und das Schluss-Ergebnis herausheben.

Wenn aber die Probe $[v\,v] = [l\,l\,.\,2]$ *nicht* hinreichend stimmen sollte, so thut man am besten, die $\delta\,\varphi = a\,\delta\,x + b\,\delta\,y$ auszurechnen und mit den $\varphi - (\varphi)$ zu vergleichen, was wir links unten auf S. 343 auch noch beigefügt haben; man macht das natürlich wieder mit dem Rechenschieber, stellt z. B. 0,06 ein und liest nach dem Anblick der Spalte a die 4 Produkte $-0{,}3$ $-0{,}4$ $+0{,}2$ $+0{,}3$ ab, welche unter $a\,\delta\,x$ eingesetzt sind und ebenso $b\,\delta\,y$; dass die $\delta\,\varphi$ gegen $\varphi - (\varphi)$ bis zu $0{,}3''$ differieren, hat nichts zu sagen.

Wenn nun bei nicht stimmendem $[v\,v] = [l\,l\,.\,2]$ auch die Proben $\varphi - (\varphi) = \delta\,\varphi$ teilweise nicht stimmen sollten, so ist der Fehler in der trigonometrischen Ausrechnung der (φ) oder φ zu suchen; wenn aber die $\delta\,\varphi$ genügen und doch $[l\,l\,.\,2]$ von $[v\,v]$ stark abweicht, so würde man die a, b u. s. w. nachsehen. Kurz die verschiedenen Proben geben so viele Fingerzeige, wo der Fehler etwa zu suchen ist, dass man auch bei Einschleichen eines Fehlers bald das Ganze klar haben wird. Nach unseren Erfahrungen kann man diejenigen Proben, welche auf S. 343 mit „*nötigenfalls*" eingeführt sind, bei einiger Rechenübung missen, und dann füllen wir den Raum links unten auf S. 343 statt mit $a\,\delta\,x + b\,\delta\,y = d\,\varphi$, mit Wiederholung der Punkt-Namen von oben aus.

Bemerkung zum Rechenschieber.

Unser Schema S. 343 ist so eingerichtet, dass keine Zahl mehr nebenbei zu rechnen oder auch nur zu schreiben ist, als auf S. 343 wirklich steht, vorausgesetzt, dass man den Rechenschieber anwendet, mit dem in der That alles dazu geeignete wirklich abgeschoben ist, ohne Gewähr für Schärfe der letzten Stelle. Indessen ist die Rechenschieber-Anwendung keine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Formulars S. 343 selbst. Z. B. in der Elimination ist zu rechnen: $\frac{62}{103}\,62 = 37$ und $\frac{62}{103}\,13 = 8$, was durch *eine* Einstellung 62 über 103 am Schieber gemacht wird; es hindert aber nichts, auf einem Nebenblatte $62 : 103 = 0{,}60$ auszudividieren, und dann $0{,}60 \times 62 = 37$ und $0{,}60 \times 13 = 8$ auszumultiplizieren. Man kann auch *Crelles* Produktentafeln und ähnliche Hilfsmittel anwenden, wir fanden aber, dass alles andere viel zu umständlich ist im Vergleich mit dem gewöhnlichen Rechenschieber.

Hiezu gehören auch schon zum Teil die Bemerkungen über Proben, welche im nächsten § 93. auf S. 349 unten sich finden.