Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 94. Elimination von z beim Rückwärts-Einschneiden mit Richtungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

§ 94. Elimination von z beim Rückwärtseinschneiden mit Richtungen.

Die Fehlergleichungen für Rückwärtseinschneiden mit überzähligen Richtungen haben nach (4) des vorigen § 93. S. 347 diese Form:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = z + a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + l_1 \\ v_2 = z + a_2\,\delta x + b_2\,\delta y + l_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \tag{1}$$

wobei ausser den Coordinaten-Verbesserungen δx und δy auch eine Satzverdrehung z als dritte Unbekannte auftritt. Die Normalgleichungen sind für n Richtungen in abgekürzter Schreibweise (nach S. 80):

$$\left.\begin{array}{rrrr} \underline{n\,z} + [a]\;\delta x + & [b]\;\delta y + & [l] & = 0 \\ + \underline{[a\,a]\;\delta x} + & [a\,b]\;\delta y + & [a\,l] & = 0 \\ & + \underline{[b\,b]\;\delta y} + & [b\,l] & = 0 \\ & & + \underline{[l\,l]} & \end{array}\right\} \tag{2}$$

Wenn man hier wieder wie in § 93. die Mittelwerte der a u. s. w. einführt, nämlich:

$$\frac{[a]}{n} = a_0 \qquad \frac{[b]}{n} = b_0 \qquad \frac{[l]}{n} = l_0 \tag{3}$$

so erhält man aus (2) nach Elimination von z ein erstmals reduziertes System:

$$\left.\begin{array}{rrr} \underline{[A\,A]\;\delta x} + & [A\,B]\;\delta y + & [A\,L] = 0 \\ & \underline{[B\,B]\;\delta y} + & [B\,L] = 0 \\ & & \underline{[L\,L]} \end{array}\right\} \tag{4}$$

wobei die einzelnen Coefficienten folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{array}{lll} [A\,A] = [a\,a] - a_0\,[a] & [A\,B] = [a\,b] - a_0\,[b] & [A\,L] = [a\,l] - a_0\,[l] \\ & \quad\text{oder} = [a\,b] - [a]\,b_0 & \quad\text{oder} = [a\,l] - [a]\,l_0 \\ & [B\,B] = [b\,b] - b_0\,[b] & [B\,L] = [b\,l] - b_0\,[l] \\ & & \quad\text{oder} = [b\,l] - [b]\,l_0 \\ & & [L\,L] = [l\,l] - l_0\,[l] \end{array}\right\} \tag{5}$$

Dieses alles ist sachlich nichts anderes als was schon in (6)—(7) S. 347 des vorigen § 93. enthalten ist; wir wollen nun aber die Formeln (4) geradezu anwenden und dazu die a, b, l des vorigen Beispiels von S. 351 nochmals vornehmen:

Num.	a	b	l	a^2	b^2	l^2	$a\,b$	$a\,l$	$b\,l$
1	+ 2,2	− 4,8	+ 0,6	5	23	0,4	− 11	+ 1	− 3
2	+ 4,2	− 0,8	− 0,4	18	1	0,0	− 3	− 2	+ 0
3	+ 7,2	+ 7,2	+ 1,0	52	52	1,0	+ 52	+ 7	+ 7
4	− 3,1	+ 8,2	− 2,1	10	67	4,4	− 25	+ 7	− 17
5	− 4,8	− 8,0	+ 9,0	23	64	81,0	+ 38	− 43	− 72
Summen	+ 5,7	+ 1,8	+ 8,1	+ 108	+ 207	+ 86,8	+ 51	− 30	− 85
Mittel	+ 1,1 $= a_0$	+ 0,4 $= b_0$	+ 1,6 $= l_0$						
Abzüge $- a_0\,[a]$ u. s. w.				− 6	− 1	− 13,0	− 2	− 9	− 3
Summen $[A\,A]$, $[B\,B]$ u. s. w.				+ 102	+ 206	+ 73,8	+ 49	− 39	− 88
Zur Vergleichung S. 351.				+ 101	+ 206	+ 73,8	+ 48	− 39	− 88
				$[A\,A]$	$[B\,B]$	$[L\,L]$	$[A\,B]$	$[A\,L]$	$[B\,L]$

(6)

Man hat also innerhalb der unvermeidlichen Abrundungs-Unsicherheit wieder dieselben Summen $[A\,A] = 101$, $[A\,B] = +48$ u. s. w., wie bei der Rechnung von § 93. S. 351.

Wenn man beide Rechnungsarten vergleicht, so hat die erste von § 93. S. 351 den Vorzug der Anschaulichkeit und der Form einer kaum wieder zu vergessenden glatten Regel, und heutzutage der allgemeinen Einführung, aber an Rechenarbeit wird durch jenes Mittelbildungsverfahren $A = a - a_0$ u. s. w. nichts gespart im Vergleich mit dem zweiten Verfahren; im Gegenteil, die Rechnung nach dem im vorstehenden (5) dargelegten Verfahren ist bequemer und weniger umfangreich, (mit 8 Spalten weniger), und hat auch noch andere Vorteile. Wenn in einem Coefficienten a , b oder l ein Fehler gefunden wird, so wird dadurch die *ganze* Rechnung in A , B oder L beim ersten Verfahren umgeworfen, beim zweiten Verfahren nicht, oder wenn einzelne Richtungen vorwärts *und* rückwärts in Ausgleichungen vorkommen, wie z. B. Steuerndieb, Aegidius, Wasserturm, Burg in S. 343 und S. 351, so kann man die zugehörigen a^2 , b^2 , $a\,b$ aus der einen Ausgleichung in die andere übertragen, wenn nach dem zweiten Verfahren gerechnet wird, nicht aber bei dem ersten Verfahren.

Auch einen kleinen Genauigkeitsvorzug hat das zweite Verfahren, insofern Abrundungsfehler bei der Differenzenbildung $A = a - a_0$ u. s. w. fortfallen. Wenn nämlich die Division $\frac{[a]}{n} = a_0$ nicht aufgeht, sondern in die Nähe von 0,5 der letzten beizubehaltenden Einheit fällt, so wird ein Teil der A um nahe 0,5 (absolut) zu gross, die andern zu klein, und das bringt merkbare Fehler in $[A\,A]$, $[A\,B]$ u. s. w., welche beim zweiten Verfahren nicht auftreten.

Negative Gewichte. Es giebt noch eine dritte Form zur Bildung der Summen $[A\,A]$ u. s. w., welche allerdings in der Zahlenausrechnung sich von der vorigen kaum unterscheidet. Man bekommt die Summen $[A\,A]$ u. s. w. auch dadurch, dass man zu den ursprünglichen Fehlergleichungen, ohne z, die Summe aller Fehlergleichungen als eine fingierte Fehlergleichung mit dem Gewichte $-\frac{1}{n}$, also mit fingiertem negativem Gewichte hinzunimmt; denn man bekommt dann:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots \quad a_n^2 + \left(-\frac{1}{n}\right)[a]^2 = [a\,a] - \frac{[a]}{n}\,[a]$$

Dieses stimmt mit (3) und (5) sachlich überein, und unterscheidet sich nur durch die Ausdrucksweise. Diese Form ist von General Schreiber bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme eingeführt worden (vgl. die Schreiber schen Regeln in dem späteren § 103.).

Statt ein negatives Gewicht einzuführen, kann man auch die Summen $[a]$, $[b]$ u. s. w. mit der Gewichtswurzel $\sqrt{\frac{1}{n}}$ multiplizieren, und dann die Coefficienten einfach quadrieren und multiplizieren, die Beträge aber immer *negativ* in Rechnung bringen.

Oder man kann auch, wenn etwa die Mittelwerte $\frac{[a]}{n} = a_0$ u. s. w. bereits gebildet sind, diese mit $\sqrt{n}$ multiplizieren, und dann wie *ein*gewichtig weiter behandeln, jedoch negativ zu der übrigen Summe hinzunehmen.

Hiezu hat man:

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{n}$	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000	3,162
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,707	0,577	0,500	0,447	0,408	0,378	0,354	0,333	0,316

Im vorigen Beispiel hatten wir $[a] = +5{,}7$, $[b] = +1{,}8$, $[l] = +8{,}1$

dazu $n = 5$ also $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}447$ $\quad 0{,}447 \quad 0{,}447$

die Produkte: . . . . . . $a' = 2{,}55$ $\quad b' = 0{,}80 \quad 3{,}62$

hieraus die 6 Quadrate und Produkte:

$$a'^2 = 6{,}5 \quad b'^2 = 0{,}6 \quad l'^2 = 13{,}1 \quad a'\,b' = 2{,}0 \quad a'\,l' = 9{,}2 \quad b'\,l' = 2{,}9$$

Das sind dieselben Abzüge wie oben bei (6) S. 352.

Nach allen Vergleichungen halten wir die Rechnungsform (6) für die beste, wir wenden sie bei unseren neueren praktischen Arbeiten an und haben sie nur deswegen nicht an die Spitze in das Schema von S. 351 gestellt, weil die Form $a - a_0 = A$ u. s. w. sich am meisten eingebürgert hat, und am anschaulichsten ist, und weil, mag man auch die $[A\,A]$ u. s. w. anders rechnen, doch die V und v nach S. 351 zu rechnen kaum zu umgehen ist, denn die Fehlerverteilung mit den v will man zur Beurteilung des Gesamterfolges vor Augen haben.

Verschiedene Richtungssätze.

Wenn mehrere volle gleichartige Sätze von Richtungen gemessen vorliegen, so werden dieselben in ein Mittel vereinigt, welches als *ein* voller Satz in der Weise zum Rückwärtseinschneiden benützt wird, wie im Vorstehenden angegeben ist.

Man kann nun weiter den Fall betrachten, dass mehrere *unvollständige* Richtungssätze gemessen sind.

Jeder Richtungssatz giebt ein Fehlergleichungssystem mit einer Orientierungs-Unbekannten z, und die verschiedenen Sätze haben auch verschiedene solche Unbekannte $z_1\ z_2\ z_3 \ldots$

Man kann nun die Gesamtheit aller zu diesen Messungen gehörigen Fehlergleichungen geradezu nach den allgemeinen Regeln für vermittelnde Beobachtungen behandeln, und zwar hat man bei n Richtungssätzen die folgenden $2 + n$ Unbekannten:

$$\delta_x \ , \ \delta_y \ \text{ und } z_1\ z_2\ z_3 \ldots z_n$$

Man kann daran denken, in jedem einzelnen Richtungssatze, bzw. in jeder Fehlergleichungsgruppe, welche zu einem Richtungssatze gehört, das betreffende z nach § 93. durch Mittelbildung zu eliminieren; eine solche Ausgleichung hat Herr *Petzold* in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 227 bis 234, behandelt. Indessen ist (nach einer Erörterung von Helmert in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 454) dieses Verfahren nicht bequem. Man kommt in dem Falle mehrerer unvollständiger Sätze rascher zum Ziel, wenn man mit den ursprünglichen Fehlergleichungen, (deren jede Gruppe ein besonderes z enthält), die Normalgleichungen bildet, weil die in verschiedenen Sätzen auftretenden ursprünglichen Fehlergleichungen für gleiche Zielpunkte gleiche Coefficienten a , b haben, die umgeformten aber nicht.

Dieses alles bezieht sich aber nur auf streng theoretische Ausgleichung.

Für praktische Fälle, in welchen die Annahme, dass die gegebenen Punkte fehlerfrei seien, doch niemals völlig erfüllt ist, wird es immer genügen, zerstreute Satzbeobachtungen zuerst auf der Station für sich auszugleichen, etwa nach der Näherungsmethode unseres früheren § 69., und das Ergebnis dieser Ausgleichung in die weitere Ausgleichung wie *einen* Richtungssatz mit einer Orientierungs-Unbekannten z einzuführen, d. h. dann nach § 93. zu verfahren.

Ähnliche Betrachtungen gehören auch zum Rückwärtseinschneiden mit *Winkel*messungen, von welchen am Schlusse von § 95. die Rede sein wird.