Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

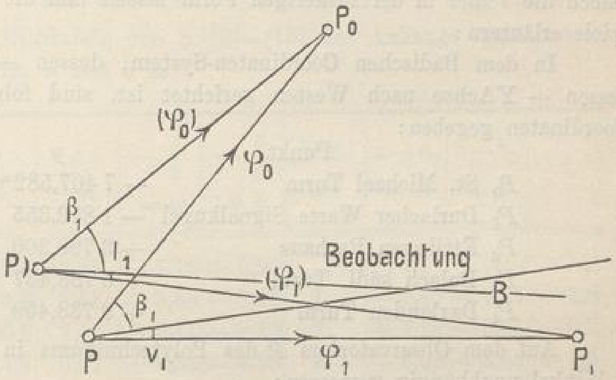
Stuttgart, 1895

§ 95. Rückwärts-Einschneiden mit Winkeln

§ 95. Rückwärtseinschneiden mit Winkeln.

Wenn einzelne Winkel, mit anderen Worten, verschiedene Sätze mit je nur *zwei* Richtungen zum Rückwärtseinschneiden gegen mehr als 3 Punkte gemessen sind, so wird die Ausgleichung theoretisch einfacher; eine Orientierungs-Unbekannte z braucht dann nicht bestimmt zu werden. Trotzdem bringen wir die Ausgleichung für Rückwärtseinschneiden mit Winkeln hier erst *nach* der Richtungsausgleichung, weil die laufende Praxis heutzutage fast nur mit Richtungen zu thun hat, und es deshalb angezeigt war, das Verfahren für die laufende Praxis in § 93. voranzustellen.

Fig. 1.



Mit Fig. 1. zur Winkelbehandlung übergehend betrachten wir von allen gegebenen Punkten nur zwei, nämlich P_0 und P_1 und es sei wie bisher (P) der Näherungspunkt und P der ausgeglichene Rückwärtsschnittpunkt, zwischen welch beiden Punkten eine Coordinatenverschiebung δx, δy besteht. Die Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigungen") sind genähert (φ_0), (φ_1) und ausgeglichen φ_0, φ_1; der zwischen P_0 und P_1 gemessene Winkel sei $= \beta_1$ und zwar $P_0\,(P)\,B = \beta_1$ und $P_0\,P B = \beta_1$, indem angenommen wird, der Winkel β_1 sei zu klein, treffe also mit B links von P_1 vorbei.

Damit kann man aus der Figur ablesen:

in (P): $$(\varphi_1) - (\varphi_0) = \beta_1 + l_1 \qquad (1)$$
in P: $$\varphi_1 - \varphi_0 = \beta_1 + v_1 \qquad (2)$$

Es ist aber nach der Grundformel von § 89. Fig. 4. S. 328:

$$\varphi_0 - (\varphi_0) = -\,a_0\,\delta x - b_0\,\delta y \qquad (3)$$
und
$$\varphi_1 - (\varphi_1) = -\,a_1\,\delta x - b_1\,\delta y \qquad (4)$$

wenn a und b die Richtungs-Coefficienten nach (18) § 89. S. 329 sind.

Aus den vorstehenden Gleichungen zusammen findet man:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -\,(a_1 - a_0)\,\delta x - (b_1 - b_0)\,\delta y + l_1 \\ &\qquad \text{wo } l_1 = (\varphi_1) - (\varphi_0) - \beta_1 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

für jeden weiteren Winkel bekommt man eine ähnliche Gleichung, also zusammen bei $n+1$ Zielpunkten in der Anordnung der nachfolgenden Fig. 2.:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\,(a_1 - a_0)\,\delta x - (b_1 - b_0)\,\delta y + l_1 \\ v_2 &= -\,(a_2 - a_0)\,\delta x - (b_2 - b_0)\,\delta y + l_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= -\,(a_n - a_0)\,\delta x - (b_n - b_0)\,\delta y + l_n \end{aligned}$$

Setzt man etwa $-\,(a_1 - a_0) = A_1$ u. s. w. so hat man:

$$v_1 = A_1\,\delta x + B_1\,\delta y + l_1$$
$$v_2 = A_2\,\delta x + B_2\,\delta y + l_2 \text{ u. s. w.}$$

also die Normalgleichungen:

$$[A\,A]\,\delta x + [A\,B]\,\delta y + [A\,l] = 0$$
$$[A\,B]\,\delta x + [B\,B]\,\delta y + [B\,l] = 0 \quad \text{mit } [l\,l]$$

Alles übrige ist wie gewöhnlich.

Man kann auch die Absolutglieder l in Form von Differenzen $l_1 - l_0$ u. s. w. darstellen, so dass dann die Ausgleichung genau die *Form* der Richtungsausgleichung von § 93. S. 351 annimmt, nur mit anderen Bedeutungen der a_0, b_0, l_0; wir wollen jedoch die l hier in der bisherigen Form lassen und die Sache an einem Zahlenbeispiele erläutern:

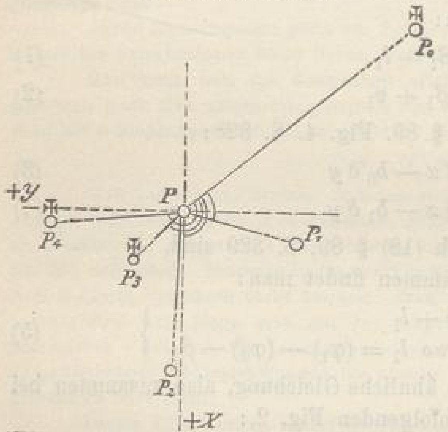
In dem Badischen Coordinaten-System, dessen $+X$ Achse nach Süden, und dessen $+Y$ Achse nach Westen gerichtet ist, sind folgende 5 Punkte durch ihre Coordinaten gegeben:

	Punkt	y	x	
P_0	St. Michael Turm	$-7\,407{,}582^m$	$+44\,332{,}254^m$	
P_1	Durlacher Warte Signalkugel	$-1\,892{,}355$	$+54\,452{,}145$	
P_2	Ettlingen Rathaus	$+3\,798{,}300$	$+60\,598{,}479$	(1)
P_3	Bulach südl. Turm	$+5\,783{,}457$	$+55\,397{,}802$	
P_4	Daxlanden Turm	$+9\,738{,}459$	$+53\,469{,}087$	

Auf dem Observatorium P des Polytechnikums in Karlsruhe wurden folgende 4 Winkel unabhängig gemessen:

$$\left.\begin{aligned} P_0 P P_1 &= \beta_1 = 53^\circ\,11'\,21{,}0'' \\ P_0 P P_2 &= \beta_2 = 130\;\;48\;\;\;5{,}0 \\ P_0 P P_3 &= \beta_3 = 172\;\;39\;\;17{,}5 \\ P_0 P P_4 &= \beta_4 = 214\;\;43\;\;17{,}8 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Fig. 2.
Massstab 1 : 400 000.



Bei allen diesen 4 Winkeln wurde St. Michael, P_0, als linkseitiger Zielpunkt genommen. Die Messungen wurden nach der Repetitionsmethode gemacht; keine Einstellung oder Ablesung eines Winkels wird für einen andern Winkel wieder benützt, d. h. die 4 gemessenen Winkel sind gänzlich von einander unabhängig.

Der Umstand, dass wir hiebei für alle Winkel *einen* gemeinschaftlichen Anfangsstrahl $P P_0$ genommen haben, erleichtert die Übersichtlichkeit, ist aber für solche Winkelausgleichung nicht wesentlich.

Die Näherungs-Coordinaten für den Standpunkt sind:

$$(P) \qquad (y) = +\,3508{,}38^m \qquad (x) = +\,53046{,}42^m \qquad (3)$$

Mit diesen Näherungswerten wurden alle Richtungswinkel (φ) und gleichzeitig auch die Entfernungen s berechnet:

von (P) nach P_0	$(\varphi_0) = 231^\circ\,23'\,59{,}2''$	$\log s_0 = 4.14512$	$s_0 = 13{,}97$	Kilometer
„ (P) „ P_1	$(\varphi_1) = 284\;\;35\;\;22{,}0$	$\log s_1 = 3.74669$	$s_1 = \;\;5{,}58$	„
„ (P) „ P_2	$(\varphi_2) = \;\;\;2\;\;11\;\;54{,}5$	$\log s_2 = 3.87838$	$s_2 = \;\;7{,}56$	„
„ (P) „ P_3	$(\varphi_3) = \;\;44\;\;\;3\;\;18{,}3$	$\log s_3 = 3.51479$	$s_3 = \;\;3{,}27$	„
„ (P) „ P_4	$(\varphi_4) = \;\;86\;\;\;7\;\;\;7{,}8$	$\log s_4 = 3.79549$	$s_4 = \;\;6{,}24$	„

Aus diesen Näherungen (φ) mit den gemessenen Winkeln β von (2) berechnet man die Absolutglieder l der Fehlergleichungen:

	(φ)	$(\varphi_n) - (\varphi_0) = \Delta(\varphi)$	β	$\Delta(\varphi) - \beta = l$
0.	231° 23′ 59,2″	. . . . .	. . . . .	. . .
1.	284 35 22,0	53° 11′ 22,8″	53° 11′ 21,0″	+ 1,8″
2.	2 11 54,5	130 47 55,3	130 48 5,0	− 9,7
3.	44 3 18,3	172 39 19,1	172 39 17,5	+ 1,6
4.	86 7 7,8	214 43 8,6	214 43 17,8	− 9,2

Bei Anwendung der Hilfstafeln von S. [8]—[15] des Anhangs gestaltet sich die Rechnung der Coefficienten a und b so:

Punkt	(φ)	$\mathfrak{x}$ Hilfstafel	$\mathfrak{y}$ Hilfstafel	s km	$-\frac{\mathfrak{x}}{s} = a$	$-\frac{\mathfrak{y}}{s} = b$	Winkel	$a - a_0 = A$	$b - b_0 = B$	l
P_0	231,4°	+ 16,1	− 12,9	13,97	− 1,15	+ 0,92	. . .	. . .	. . .	. . .
P_1	284,6°	+ 20,0	+ 5,2	5,58	− 3,58	− 0,93	1.	− 2,43	− 1,85	+ 1,8
P_2	2,2°	− 0,8	+ 20,6	7,56	+ 0,11	− 2,73	2.	+ 1,26	− 3,65	− 9,7
P_3	44,1°	− 14,3	+ 14,8	3,27	+ 4,38	− 4,53	3.	+ 5,53	− 5,45	+ 1,6
P_4	86,1°	− 20,6	+ 1,4	6,24	+ 3,30	− 0,22	4.	+ 4,45	− 1,14	− 9,2

Hieraus die Coefficienten der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} [AA] = +57{,}9 & [AB] = -35{,}3 & [Al] = -\ 48{,}7 \\ & [BB] = +47{,}7 & [Bl] = +\ 33{,}8 \\ & & [ll] = +184{,}5 \end{array}\right\}$$

Alles weitere wie auf S. 351, so dass man erhält:

Näherung (P)	$(y) = +3\,508{,}380^m$	$(x) = +53\,046{,}420^m$
Verbesserungen	$-\ 0{,}016^m \pm 0{,}166^m$	$+\ 0{,}075^m \pm 0{,}150^m$
Ausgleichungs-Ergebnis	$y = +3\,508{,}364^m \pm 0{,}166^m$	$x = +53\,046{,}495^m \pm 0{,}150^m$ (4)

Mittlerer Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{[ll.2]}{n-2}} = \sqrt{\frac{143{,}0}{4-2}} = \pm 8{,}5''$$

Mit den endgültigen Coordinaten y, x berechnet man alle Richtungswinkel φ von Neuem und findet:

	φ	$\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$	β	$\Delta\varphi - \beta = v$	v^2
0.	231° 23′ 58,2″	. . . . .	. . . . .	. .	. .
1.	284 35 19,5	53° 11′ 21,3″	53° 11′ 21,0″	+ 0,3	0,09
2.	2 11 55,0	130 47 56,8	130 48 5,0	− 8,2	67,24
3.	44 3 22,3	172 39 24,1	172 39 17,5	+ 6,6	43,56
4.	86 7 10,3	214 43 12,1	214 43 17,8	− 5,7	32,49
					$[v^2] = 143{,}38$

Da diese Summe $[v^2] = 143{,}4$ mit dem schon eben erwähnten Werte $[ll.2]$ der Elimination stimmt, ist die ganze Rechnung genügend kontrolliert.

Die Anordnung der Winkel mit einem gemeinsamen Anfangspunkte P_0, wie in Fig. 2. angenommen ist, hat sich im vorliegenden Falle empfohlen, weil jener Punkt, St. Michael, nach Entfernung und Beleuchtung der beste war.

Der Umstand, dass wir hiebei für alle Winkel *einen* gemeinschaftlichen Anfangsstrahl $P P_0$ genommen haben, erleichtert die Übersichtlichkeit, ist aber für solche Winkelausgleichung nicht wesentlich.

Man könnte auch bei 5 Strahlen mehr als 4 Winkel messen, und hätte dann dieselben alle einzeln in die Ausgleichung einzuführen, z. B. wenn gemessen wären die 7 Winkel

$$\left.\begin{array}{cccc} P_0 P_1 & P_0 P_2 & P_0 P_3 & \cdot\ \cdot \\ & P_1 P_2 & P_1 P_3 & P_1 P_4 \\ & & \cdot\ \cdot & P_3 P_4 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

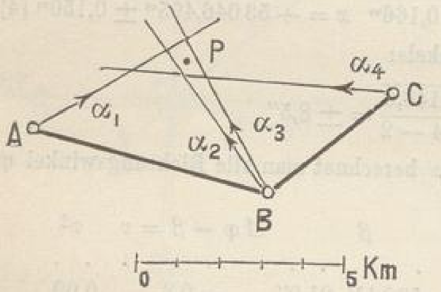
so würde man 7 entsprechende Fehlergleichungen mit $a_1 - a_0$, $a_2 - a_0 \ldots a_4 - a_3$ u. s. w. erhalten.

Indessen in der laufenden Praxis würde man so kaum verfahren. Wenn wirklich 7 einzelne Winkel zwischen 5 Punkten gemessen wären, so würde man vielleicht kurzer Hand die 5 Winkel auf der Station in sich ausgleichen (etwa nach § 69.) und das Ergebnis als einen Richtungssatz nach § 93. weiter behandeln. Das wäre theoretisch nicht streng, aber mit Rücksicht auf Nebenumstände, (vgl. den folgenden § 96.) praktisch genügend. Sollte man aber aus irgend welchen Gründen veranlasst sein, einen Fall wie den vorstehenden bei (5) mit Winkeln streng theoretisch zu behandeln, so wäre das nach dem vorhergehenden leicht zu machen.

§ 96. Richtungsanschluss an feste Strahlen.

Wir müssen nochmals auf den einfachsten Fall des Vorwärtseinschneidens von § 91. mit Fig. 1. S. 335 zurückkommen. Dort wurde durch je *einen* Winkel β ein neuer Strahl an einen alten festen Strahl angelegt, und da der Richtungswinkel des alten Strahles fest gegeben war, so wurde durch das Anlegen auch der Richtungswinkel des neuen Strahles bestimmt, und zwar mit derselben Genauigkeit, welche der Winkelmessung selbst anhaftet.

Fig. 1.
Massstab 1 : 200 000.



Wir wollen dieses mit Fig. 1. weiter verfolgen. Gegeben sind die Coordinaten dreier Punkte:

$$\left.\begin{array}{lrr} & y & x \\ A & -44\,904{,}30^{m} & +15\,967{,}50^{m} \\ B & -39\,554{,}90 & +14\,032{,}80 \\ C & -36\,479{,}40 & +16\,760{,}50 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Für einen neu zu bestimmenden Punkt werden Näherungs-Coordinaten angenommen:

$$\text{Näherung } (P) \qquad -41\,316{,}18 \qquad +17\,493{,}05 \qquad (2)$$

Zur Bestimmung dieses Punktes sind 4 Winkel gemessen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Winkel} & B\,A\,P = \beta_1 = & 317^\circ & 4' & 49'' \\ \text{„} & A\,B\,P = \beta_2 = & 43 & 8 & 43 \\ \text{„} & C\,B\,P = \beta_3 = & 284 & 35 & 50 \\ \text{„} & B\,C\,P = \beta_4 = & 50 & 10 & 49 \end{array}\right\} \qquad (3)$$