Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 96. Richtungsanschluss an feste Strahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

in Fig. 2. angenommen ist, hat sich im vorliegenden Falle empfohlen, weil jener Punkt, St. Michael, nach Entfernung und Beleuchtung der beste war.

Der Umstand, dass wir hiebei für alle Winkel *einen* gemeinschaftlichen Anfangsstrahl $P P_0$ genommen haben, erleichtert die Übersichtlichkeit, ist aber für solche Winkelausgleichung nicht wesentlich.

Man könnte auch bei 5 Strahlen mehr als 4 Winkel messen, und hätte dann dieselben alle einzeln in die Ausgleichung einzuführen, z. B. wenn gemessen wären die 7 Winkel

$$\left.\begin{array}{llll} P_0 P_1 & P_0 P_2 & P_0 P_3 & \cdot\ \cdot \\ & P_1 P_2 & P_1 P_3 & P_1 P_4 \\ & & \cdot\ \cdot & P_3 P_4 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

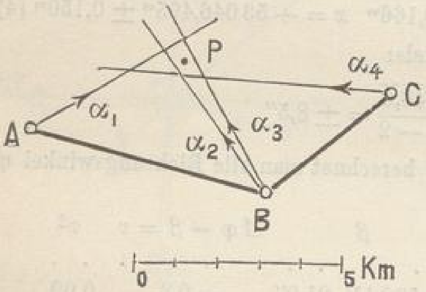
so würde man 7 entsprechende Fehlergleichungen mit $a_1 - a_0$, $a_2 - a_0 \ldots a_4 - a_3$ u. s. w. erhalten.

Indessen in der laufenden Praxis würde man so kaum verfahren. Wenn wirklich 7 einzelne Winkel zwischen 5 Punkten gemessen wären, so würde man vielleicht kurzer Hand die 5 Winkel auf der Station in sich ausgleichen (etwa nach § 69.) und das Ergebnis als einen Richtungssatz nach § 93. weiter behandeln. Das wäre theoretisch nicht streng, aber mit Rücksicht auf Nebenumstände, (vgl. den folgenden § 96.) praktisch genügend. Sollte man aber aus irgend welchen Gründen veranlasst sein, einen Fall wie den vorstehenden bei (5) mit Winkeln streng theoretisch zu behandeln, so wäre das nach dem vorhergehenden leicht zu machen.

§ 96. Richtungsanschluss an feste Strahlen.

Wir müssen nochmals auf den einfachsten Fall des Vorwärtseinschneidens von § 91. mit Fig. 1. S. 335 zurückkommen. Dort wurde durch je *einen* Winkel β ein neuer Strahl an einen alten festen Strahl angelegt, und da der Richtungswinkel des alten Strahles fest gegeben war, so wurde durch das Anlegen auch der Richtungswinkel des neuen Strahles bestimmt, und zwar mit derselben Genauigkeit, welche der Winkelmessung selbst anhaftet.

Fig. 1.
Massstab 1 : 200 000.



Wir wollen dieses mit Fig. 1. weiter verfolgen. Gegeben sind die Coordinaten dreier Punkte:

	y	x	
A	$-44\,904{,}30^m$	$+15\,967{,}50^m$	
B	$-39\,554{,}90$	$+14\,032{,}80$	(1)
C	$-36\,479{,}40$	$+16\,760{,}50$	

Für einen neu zu bestimmenden Punkt werden Näherungs-Coordinaten angenommen:

Näherung (P) $\quad -41\,316{,}18 \quad +17\,493{,}05$ $\qquad$ (2)

Zur Bestimmung dieses Punktes sind 4 Winkel gemessen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Winkel} & B A P = \beta_1 = & 317^\circ\ \ 4'\ \ 49'' \\ \quad " & A B P = \beta_2 = & 43\ \ \ 8\ \ 43 \\ \quad " & C B P = \beta_3 = & 284\ \ 35\ \ 50 \\ \quad " & B C P = \beta_4 = & 50\ \ 10\ \ 49 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Aus den Coordinaten (1) rechnet man die fest gegebenen Richtungswinkel:

$$\left.\begin{array}{l} [A\,B] = 109°\,53'\;\;0'' \text{ oder } [B\,A] = 289°\,53'\;\;0'' \\ [B\,C] = \;\;48\;\;25\;\;47 \;\;\text{,,}\;\; [C\,B] = 228\;\;25\;\;47 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Dabei rechnet man auch sogleich die Näherungs-Richtungswinkel (φ) und die Entfernungen s:

$$\left.\begin{array}{lll} (A\,P) = \;\;66°\,57'\,59'' = (\varphi_1) & & \text{mit } s_1 = 3{,}90^{km} \\ (B\,P) = 333\;\;\;1\;\;25 \;\;= (\varphi_2) \text{ und } = (\varphi_3) & & \text{,,}\;\; s_2 = 3{,}88^{km} \\ (C\,P) = 278\;\;36\;\;44 \;\;= (\varphi_4) & & \text{,,}\;\; s_3 = 4{,}89^{km} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Wenn man die gemessenen Winkel β nach (3) an die festen Richtungen (4) anlegt, so bekommt man die Messungsrichtungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{von } A \text{ nach } P : [A\,B] + \beta_1 = \alpha_1 = \;\;66°\,57'\,49'' \\ \left\{\begin{array}{l} B \;\;\text{,,}\;\; P : [B\,A] + \beta_2 = \alpha_2 = 333\;\;\;1\;\;43 \\ B \;\;\text{,,}\;\; P : [B\,C] + \beta_3 = \alpha_3 = 333\;\;\;1\;\;37 \end{array}\right\} \\ \;\;C \;\;\text{,,}\;\; P : [C\,B] + \beta_4 = \alpha_4 = 278\;\;36\;\;36 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Hierauf kann man eine Ausgleichung nach dem Muster von § 92. S. 343 gründen, und zwar mit folgenden 4 Fehlergleichungen (die Coefficienten auf 1 Stelle abgerundet):

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \;\; -5\,\delta x \;\; +2\,\delta y \;\; +10'' \\ \left\{\begin{array}{l} v_2 = \;\; +2\,\delta x \;\; +5\,\delta y \;\; -18 \\ v_3 = \;\; +2\,\delta x \;\; +5\,\delta y \;\; -12 \end{array}\right. \\ v_4 = \;\; +4\,\delta x \;\; +1\,\delta y \;\; +\;\;8 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Die Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{l} +\,49\,\delta x + 14\,\delta y - \;\;78 = 0 \\ \underline{+\,14\,\delta x} + \underline{55\,\delta y} - 122 = 0 \text{ mit } [l\,l] = \underline{632} \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{hieraus} & \delta y = +\,2{,}0^{dm} & \delta x = +\,1{,}0^{dm} & [l\,l\,.\,2] = 313 \\ (p_y = 51) & \pm\,1{,}8^{dm}\;(p_x = 45) & \pm\,1{,}9^{dm} & \end{array}\right\} \quad (9)$$

Also die ausgeglichenen Coordinaten selbst, mit Zufügung dieser δy und δx zu den Näherungen (2):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ausgleichung: } P\;,\; y = -\,41\,315{,}98^m & x = +\,17\,493{,}15^m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \pm\,0{,}18 & \quad\;\; +\,0{,}19 \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Ausrechnung der endgültigen φ und der v nach dem Muster von § 92. S. 343 unten giebt:

$$v_1 = +\,9'' \qquad v_2 = -\,6'' \qquad v_3 = 0'' \qquad v_4 = +\,14'' \quad (11)$$

daraus $[v\,v] = 313$ in genügender Übereinstimmung mit $[l\,l\,.\,2] = 313$ aus der Elimination. Der mittlere Fehler einer Messung wird:

$$m = \sqrt{\frac{313}{4-2}} = \pm\,13'' \quad (12)$$

Diese ganze Rechnung unterscheidet sich nun durch gar nichts von den Rechnungen des § 91. oder § 92. als durch den zunächst gleichgültigen Umstand, dass die zwei Fehlergleichungen für v_2 und v_3 *gleiche* Coefficienten a und b haben (dabei aber ungleiche Absolutglieder).

Es ist leicht einzusehen, dass man statt dieser zwei Fehlergleichungen v_2 und v_3 auch *eine* Fehlergleichung nehmen könnte, nämlich statt (7):

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \;\;= -\,5\,\delta x + 2\,\delta y + 10'' \\ v_{23} = +\,2\,\delta x + 5\,\delta y - 15'' \text{ mit Gewicht} = 2 \\ v_4 \;\;= +\,4\,\delta x + 1\,\delta y + \;8'' \end{array}\right\} \quad (7^*)$$

Es muss hiebei v_{23} mit doppeltem Gewichte eingeführt werden im Vergleich mit den Gewichten von v_1 und v_4.

Rechnet man damit weiter, so bekommt man zwar wieder dieselben Normalgleichungen (8) wie im ersten Falle, aber ein anderes Glied $[l\,l]$, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} +\underline{49\,\delta x} + 14\,\delta y - 78 = 0 \\ +14\,\delta x + \underline{55\,\delta y} - 122 = 0 \text{ mit } [l\,l] = \underline{614} \end{array}\right\} \tag{8*}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{hieraus} & \delta y = +2{,}0^{dm} & \delta x = +1{,}0^{dm} & [l\,l\,.\,2] = 294 \\ (p_y = 51) & \pm 2{,}4 \quad (p_x = 49) & \pm 2{,}6 & \end{array}\right\} \tag{9*}$$

die ausgeglichenen Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{ll} y = -41\,315{,}98^m & x = +17\,493{,}15^m \\ \pm 0{,}24 & \pm 0{,}26 \end{array}\right\} \tag{10*}$$

Die endgültigen φ werden auch dieselben, wie im ersten Falle, geben aber teilweise andere v, nämlich:

$$v_1 = +9'' \qquad v_{23} = -3'' \qquad v_4 = +14'' \tag{11*}$$

also

$$[p\,v\,v] = 81 + 9 + 9 + 196 = 295$$

$$m = \sqrt{\frac{295}{3-2}} = \pm 17'' \tag{12*}$$

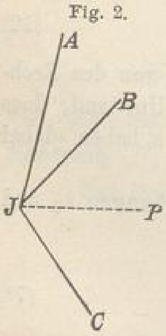
und damit die schon bei (9*) angegebenen Coordinatenfehler.

Die beiden Rechnungsformen, entweder mit 4 gleichgewichtigen Richtungen oder mit 3 Richtungen, von denen die zweite doppeltes Gewicht hat, geben also dieselben Coordinaten und dieselben Gewichte, aber verschiedene mittlere Fehler, und zwar so dass die Bestimmung aus den 4 ursprünglichen Messungen die bessere ist im Vergleich mit der Zusammenfassung der 2ten und 3ten Messung in ein Mittel, wobei nur $n = 3$ Messungen auftreten.

Dieses haben wir bereits früher in § 21. S. 70 behandelt, mit zwei Gleichungen (18), welche die Gewichte p_1 und p_2 haben und für die Ausgleichung selbst in *eine* Gleichung (18') zusammengefasst werden können, welche auch in dem Nenner des Fehlerquadrats nur als *eine* Gleichung zählt und *nicht* als *zwei* Gleichungen, wie auf S. 70 am Schlusse von § 21. aus Versehen geschrieben ist. Die Berechnung des mittleren Fehlers ist durch die vorstehenden Gleichungen (12) mit $4-2$ im Nenner, und (12*) mit $3-2$ im Nenner, charakterisiert.

Durch das einfache Beispiel mit Fig. 1. S. 358 ist wohl die Frage verschiedener Richtungsanschlüsse durch *Winkel*messungen genügend klar gemacht, auch kann der frühere § 78. mit Zwangsanschluss für Winkelmessungen in allen Combinationen hier zugezogen werden. Man wird wohl meist in solchen Fällen für die mehrfach angebundene Richtung einen Mittelwert einführen und denselben als *eine* Messung behandeln, vielleicht sogar mit einfachem Gewicht, was hier in praktischer Hinsicht nicht weiter zu erörtern ist.

Fig. 2.



Theoretisch weniger einfach ist die nun zu behandelnde Anbindung von gemessenen *Richtungs*sätzen an mehr als einen festen Strahl. Wir wollen dieses sofort an einem Beispiele behandeln:

In Fig. 2. ist angenommen, man habe auf dem Punkt J 4 Strahlen in einem Satz gemessen, und zwar 3 Strahlen nach 3 unabänderlich festen (fehlerfreien) Punkten $A\,B\,C$, und einen Strahl nach einem neuen Punkt P. Die hier zu machende Ausgleichung ergiebt sich sofort als eine Mittelbildung aus den Differenzen zwischen den endgültigen Richtungswinkeln für $A\,B\,C$, und den vorläufig orientierten Richtungen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Strahl	Gemessene Richtungen A	Feste gegebene Richtungswinkel φ	Differenz $\varphi - A$	Orientierte gemessene Richtungen $\alpha = A + Z$	Scheinbare Fehler $\delta = \varphi - \alpha$	δ^2	
JA	21° 18′ 33″	21° 18′ 0″	— 33″	21° 17′ 56″	+ 4	16	(13)
JB	48 29 43	48 29 7	— 36	48 29 6	+ 1	1	
JP	90 37 22	. . . . . .	. . .	90 36 45	. .	. .	
JC	148 39 21	148 38 39	— 42	148 38 44	— 5	25	
		Summe	— 111		$[\delta] = 0$	42	
		Mittel $Z =$	— 37				

Der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung ergiebt sich hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{42}{2}} = \pm 4{,}6''$$

Der Nenner ist dabei $3 - 1 = 2$, weil 3 Messungen A, B, C zur Ausgleichung mitgewirkt haben und eine Unbekannte Z vorhanden ist, deren Gewicht nach der Ausgleichung $= 3$ ist oder allgemeiner bei s festen Strahlen ist das Ausgleichungsgewicht von Z gleich s. Damit erhält man auch das Gewicht oder den mittleren Fehler der neu orientierten Richtung P, denn es setzt sich deren Fehler zusammen aus dem Fehler der Orientierungsgrösse Z und dem Fehler der Richtung P selbst, oder das Fehlerquadrat M^2 für die Richtung P wird:

$$M^2 = \frac{m^2}{s} + m^2 = m^2 \frac{s+1}{s} \tag{14}$$

oder in Gewichtsform: das Gewicht der durch Orientierung auf s feste Strahlen $A\;B\;C\ldots$ neu bestimmten Richtung ist:

$$P = \frac{s}{s+1} \tag{15}$$

Dieses gilt für die Annahme, dass die fest gegebenen Richtungswinkel φ *fehlerfrei* seien, eine Annahme, die gewöhnlich zu machen ist, obgleich sie natürlich niemals streng erfüllt ist. Nehmen wir dagegen an, die Richtungswinkel φ haben selbst mittlere Fehler $\pm\mu$, so erhält man statt (14):

$$M^2 = \frac{m^2 + \mu^2}{s} + m^2 = m^2 \left(\frac{s+1}{s} + \frac{\mu^2}{m^2}\,\frac{1}{s}\right) \tag{16}$$

und das Gewicht:

$$P = \frac{s}{s + 1 + \dfrac{\mu^2}{m^2}} \tag{17}$$

Über das Verhältnis von $\mu^2 : m^2$ kann man nun verschiedene Annahmen machen; setzt man $\mu^2 = 0$, so geht (17) wieder in (15) zurück, setzt man $\mu^2 = m^2$, so wird:

$$P_1 = \frac{s}{s+2} \tag{18}$$

Zwischen den Grenzen (15) und (18) wird sich wohl der richtige Wert gewöhnlich bewegen, und $P = \frac{1}{2}$ entsteht aus (15) mit $s = 1$, dagegen aus (18) mit $s = 2$. Dieses wird für uns später Veranlassung sein, in der laufenden Praxis für Vorwärtseinschneiden kurzer Hand die Gewichte $= \frac{1}{2}$ zu setzen.

Damit haben wir das, was wir für die nächsten Anwendungen hauptsächlich brauchen, erledigt, wir wollen aber noch — mehr aus theoretischem Interesse — noch weiteres hinzufügen, und zuerst nochmals an Fig. 2. mit dem Zahlenbeispiel (13) anbinden. (S. 360—361.)

Die dort berechneten orientierten Richtungen α haben immer noch den Charakter von Originalbeobachtungen und können einer neuen Ausgleichung unterworfen werden, deren Fehlergleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z + 4'' \\ v_2 &= z + 1'' \\ v_3 &= z + .\,. \\ v_4 &= z - 5'' \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die in der Tabelle (13) angegebenen δ, deren Summe $[\delta] = 0$ ist, treten nun als Absolutglieder der Fehlergleichungen (19) auf; die neue gemeinsame Richtungsverbesserung ist z, und die neuen Verbesserungen der Richtungsbeobachtungen sind v. Für v_3 ist in (19) der Ausdruck unbestimmt gelassen, weil der dritte Strahl vorerst noch frei ist.

Wenn nun aber dieser Strahl JP nicht mehr frei endigt, sondern einen Punkt P trifft, um dessen Neubestimmung es sich handelt, so wird auch für diesen Strahl eine Fehlergleichung gelten von der Form:

$$v_3 = z + a\,\delta x + b\,\delta y + l$$

wo a und b die bekannten Richtungs-Coefficienten sind.

Das ganze System der Fehlergleichungen heisst nun in allgemeinen Zeichen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z && + l_1 \\ v_2 &= z && + l_2 \\ v_3 &= z + a\,\delta x + b\,\delta y && + l_3 \\ v_4 &= z && + l_4 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Hiebei ist die Summe $\qquad l_1 + l_2 + l_4 = 0 \qquad$ (21)

was als allgemeine Beziehung dem besonderen Falle $+4'' + 1'' - 5''$ bei (13) und (19) entspricht.

Die zu (20) gehörigen Normalgleichungen werden allgemein für s feste Strahlen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{(s+1)}\,z + a\,\delta x + b\,\delta y + [l] &= 0 \quad \text{d. h. } [v] = 0 \\ \underline{a^2}\,\delta x + a b\,\delta y + a\,l_3 &= 0 \\ \underline{b^2}\,\delta y + b\,l_3 &= 0 \\ \underline{[l\,l]}& \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Nach der Elimination von z bleibt folgendes System reduzierter Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\left(a^2 - \frac{a}{s+1}\,a\right)}\,\delta x + \left(a\,b - \frac{a}{s+1}\,b\right)\delta y + \left(a\,l_3 - \frac{a}{s+1}\,[l]\right) &= 0 \\ \underline{\left(b^2 - \frac{b}{s+1}\,b\right)}\,\delta y + \left(b\,l_3 - \frac{b}{s+1}\,[l]\right) &= 0 \\ \underline{\left([l\,l] - \frac{[l]}{s+1}\,[l]\right)}& \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Diese reduzierten Normalgleichungen sind nun wieder einer anderen Deutung fähig:

Man denke sich *eine* Fehlergleichung ohne z, mit dem Gewicht $\frac{s}{s+1}$

$$v' = a\,\delta x + b\,\delta y + l_3 \qquad p = \frac{s}{s+1} \tag{24}$$

Diese einzelne Fehlergleichung (24) giebt zu den Normalgleichungs-Coefficienten genau dieselben Beiträge wie die Coefficienten von (23).

Bei den Gliedern ohne l sieht man dieses unmittelbar, dagegen bei den Gliedern, welche l enthalten, ist zum Nachweis des Gesagten zuerst die zwischen den l bestehende Beziehung $l_1 + l_2 + l_4 = 0$ zu beachten, welche schon bei (21) erwähnt ist, denn diese $l_1\ l_2\ l_4$ sind nichts anderes, als die aus der ersten Ausgleichung erhaltenen δ, deren Summe $= 0$ ist; damit wird aber:

$$[l] = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l_3$$

also $p\,a\,l_3 = \frac{s}{s+1}\,a\,l_3 = a\,l_3 - \frac{a}{s+1}[l]$, ebenso wie bei (23).

Ebenso wird auch die Entwicklung von $p\,b\,l_3$. Jedoch das Quadratsummenglied in (23) ist *nicht* identisch mit dem aus (24) erhaltenen $p\,l_3^2$, denn es ist, zunächst für $s = 3$ aus (23):

$$[l\,l] - \frac{[l]}{4}[l] = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - \frac{l_3^2}{4} = l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 + \frac{3}{4}\,l_3^2$$

dagegen für $s = 3$ aus (24): $\qquad p\,l_3^2 = \frac{3}{4}\,l_3^2$

Wenn man daher statt der 4 Fehlergleichungen (20) nur die eine Gleichung (24) benützt, so bekommt man zwar dieselben Werte δx und δy, aber eine andere Fehlerquadratsumme, welche um $l_1^2 + l_2^2 + l_4^2$ gegen den strengen Wert zu klein ist, aber auch einen kleineren Nenner erhält.

Wenn wir das System (20) als Teil eines grösseren Systems von n Fehlergleichungen auffassen, so wird das mittlere Gewichtseinheitsfehler-Quadrat:

$$m^2 = \frac{[v\,v] + [V\,V]}{n - u - 3} \tag{25}$$

wo u die Anzahl von Unbekannten sein soll, welche ausser z, δx und δy noch vorhanden sind, und $[V\,V]$ den in (20) nicht enthaltenen Beitrag bedeutet.

Geht man aber von der *einen* Fehlergleichung (24) aus, so wird:

$$m^2 = \frac{[V\,V] + [v\,v] - (l_1^2 + l_2^2 + l_4^2)}{(n-3) - u - 2} \tag{26}$$

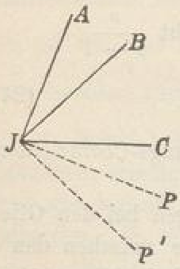
Der Nenner ist im Vergleich mit (25) um 2 kleiner geworden, und der Zähler ist um $l_1^2 + l_2^2 + l_4^2$ kleiner geworden; diese beiden Abnahmen entsprechen einander, wenn gesetzt werden kann:

$$m^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_4^2}{2}$$

Dieses ist aber in der That der Fall, denn die $l_1\ l_2\ l_4$ sind dieselben Werte, welche wir in der ersten Ausgleichung (13) mit $\delta_1\ \delta_2\ \delta_4$ bezeichnet haben, dort war aber zu rechnen:

$$m^2 = \frac{\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_4{}^2}{3 - 1} \tag{27}$$

Fig. 3.



Dieses (27) ist richtig, weil die 3 Messungen auf den Strahlen ABC zur Bestimmung der *einen* Unbekannten Z gedient haben.

Die letzten Betrachtungen (24)—(26) beziehen sich auf den Fall von Fig. 2. S. 360, wo $s = 3$ feste Strahlen und 1 neuer Strahl vorhanden sind. Die Verallgemeinerung für s feste Strahlen giebt keinen anderen Gedankengang.

Wir betrachten weiter mit Fig. 3. den Fall, dass mehr als ein neuer Strahl, etwa 2 neue Strahlen, gegen mehrere feste Strahlen festgelegt werden; man habe etwa zunächst $s = 3$ feste Strahlen, und $s' = 2$ neue Strahlen.

Die Fehlergleichungen sind:

$$\begin{array}{c} \text{Allgemein} \\ \text{Anzahl} \\ = s \\ \\ \text{Anzahl} \\ = s' \\ \hline s + s' = r \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} v_1 = z \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad + l_1 \\ v_2 = z \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad + l_2 \\ v_3 = z \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad + l_3 \end{array}\right\} \; \begin{array}{c} l_1 + l_2 + l_3 \\ = 0 \end{array} \\ \left\{\begin{array}{l} v_4 = z + a\,\delta x + b\,\delta y \quad .. \quad .. \quad + l_4 \\ v_5 = z \quad .. \quad .. + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_5 \end{array}\right. \\ \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Allgemein: Anzahl} = u} \end{array}\right\} \quad (28)$$

Die Normalgleichungen werden:

$$[v] = 0, \quad \left.\begin{array}{l} \underline{r z} + a\,\delta x + b\,\delta y + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + [l] = 0 \\ \qquad \underline{a^2\,\delta x} + a b\,\delta y \quad .. \quad .. \quad + a\,l_4 = 0 \\ \qquad\qquad \underline{b^2\,\delta y} \quad .. \quad .. \quad + b\,l_4 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{a'^2\,\delta x'} + a'\,b'\,\delta y' + a'\,l_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{b'^2\,\delta y'} + b'\,l_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[l\,l]} \end{array}\right\} \quad (29)$$

Nach Elimination von z bleibt ein System, in welchem berücksichtigt ist, dass wegen $l_1 + l_2 + l_3 = 0$, $[l] = l_4 + l_5$ ist; die erste Gleichung davon ist:

$$\left(a^2 - \frac{a}{r}\,a\right)\delta x + \left(a b - \frac{a}{r}\,b\right)\delta y - \frac{a}{r}\,a'\,\delta x' - \frac{a}{r}\,b'\,\delta y' + a l_4 - \frac{a}{r}\,(l_4 + l_5) = 0 \quad (30)$$

und das Schlussglied $\quad [l\,l\,.\,1] = [l\,l] - \frac{(l_4 + l_5)}{r}\,(l_4 + l_5) \quad (31)$

In Bezug auf die Coefficienten und Absolutglieder, mit Ausschluss von $[l\,l\,.\,1]$ kann man die Bildung von (30) durch folgende mechanische Regel deuten:

Man schreibt die letzten 2 Fehlergleichungen von (28) ohne z:

$$\text{Anzahl} = s' \left\{\begin{array}{ll} v'_4 = a\,\delta x + b\,\delta y \quad .. \quad .. \quad + l_4 & \text{mit Gewicht} = 1 \quad (32) \\ v'_5 = \quad .. \quad .. \quad a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_5 & \;\;\text{„} \qquad \text{„} \quad = 1 \quad (33) \end{array}\right.$$

Hiezu nimmt man noch eine Summengleichung:

$$v' = a\,\delta x + b\,\delta y + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_4 + l_5 \text{ mit Gewicht} = -\frac{1}{r} \quad (34)$$

$$\text{wobei} \quad r = s + s'$$

Diese 3 Fehlergleichungen (32)—(34), mit den angegebenen Gewichten, geben in der That dieselben Coefficienten wie in (30), dagegen wird das Quadratsummenglied von (32)—(34):

$$[l'\,l'] = l_4^2 + l_5^2 - \frac{1}{r}\,(l_4 + l_5)^2, \qquad (m_2) \quad (35)$$

während in (31) das Schlussglied, ausführlich geschrieben, ist:

$$[l\,l\,.\,1] = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - \frac{1}{r}(l_4 + l_5)^2 = [l\,l\,.\,1] \qquad (m_1)\ (36)$$

Es ist also $[l\,l\,.\,1]$ grösser als $[l'\,l']$, und zwar um den Betrag $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$, welcher nach Analogie von (27) gleich $(s-1)\,m^2$ zu achten ist. Es wird also nun für die beiden Fälle von (35) und (36):

$$m_1^2 = \frac{[l\,l\,.\,1]}{s' + s - u} \qquad m_2^2 = \frac{[l'\,l']}{s' - (u-1)} \qquad (37)$$

weil im ersten Fall die Zahl der Unbekannten δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$ nebst z, $= 5$, allgemein $= u$, und im zweiten Fall die Zahl der Unbekannten δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$, ohne z, $= 4$, allgemein $= u - 1$ ist.

Zur besseren Vergleichung kann man schreiben:

$$m_1^2 = \frac{[l\,l\,.\,1]}{s' + s - u} \qquad m_2^2 = \frac{[l\,l\,.\,1] - (s-1)\,m^2}{s' + s - u - (s-1)} \qquad (38)$$

Die Formeln für m_1^2 und m_2^2 sind hiernach insofern gleichberechtigt, als nicht gesagt werden kann, dass im allgemeinen m_1 grösser oder kleiner als m_2 würde. Es ist aber m_1^2 die schärfere Formel, weil sie *alle* Proben, auch $l_1\ l_2\ l_3$, mit enthält, während m_2 nur l_4 und l_5 enthält.

Wenn man zum Schluss auch noch z selbst bestimmen will, so hat man dazu die erste Normalgleichung (29), d. h. $[v] = 0$, oder:

$$0 = [v] = r\,z + a\,\delta x + b\,\delta y + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + [l]$$

Hiebei ist nach (28):

$$v_4 - z = a\,\delta x + b\,\delta y + l_4$$
$$v_5 - z = a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_5$$
$$[l] = l_4 + l_5$$
$$\text{also} \quad 0 = r\,z + (v_4 - z) + (v_5 - z).$$

Nach (28) und (32) kann man hiefür schreiben:

$$0 = r\,z + v'_4 + v'_5$$
$$\text{also} \quad z = -\frac{v'_4 + v'_5}{r} \quad \text{allgemein} = -\frac{[v']}{r} \qquad (39)$$

Dabei ist $[v']$ die Summe der v' für alle freien Strahlen, und $r = s + s'$ die Anzahl aller Strahlen.

Wir wiederholen, dass diese Betrachtungen von (19)—(39) nicht für die laufende Praxis bestimmt sind, dass sie aber zur klaren Begriffsbestimmung bei Unterscheidung zwischen mehr oder weniger strenger oder genäherter Behandlung von Ausgleichungsaufgaben dienen.

§ 97. Innere und äussere Richtungen.

Wenn ein neuer Punkt gegen andere fest gegebene Punkte durch Einschneiden bestimmt werden soll, so hat man, nach dem bisherigen, zwei Arten von Messungen zu unterscheiden, erstens solche, welche auf den gegebenen Punkten als Standpunkten, Sichtstrahlen nach dem neuen Punkte geben, und zweitens solche Messungen, welche auf dem neuen Punkte als Standpunkt gemacht, Sichtstrahlen von dem neuen Punkte