Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 98. Combiniertes Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

sind die Coefficienten der Gleichungen (5) und (6) einander gleich, und die Fehlergleichungen für die beiden Richtungen 1. und 2. in Fig. 2. haben folgende Form:

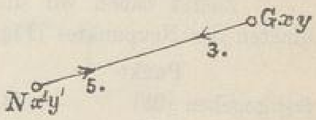
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z_1 + a\,\delta x + b\,\delta y + l_1 \\ v_2 &= z_2 + a\,\delta x + b\,\delta y + l_2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Folgendes ist ein Zahlenbeispiel hiezu mit Fig. 3. Die Punkte N und G haben folgende Näherungs-Coordinaten:

$N \quad (y) = +134\,119{,}50^m \qquad (x) = +137\,285{,}40^m$

$G \quad (y') = +141\,871{,}60 \qquad (x') = +144\,754{,}40$

Fig. 3.



Hieraus die genäherten Richtungswinkel (φ), in *ebener* Rechnung:

$(N\,G) = (\varphi_5) = 42^\circ\ 6'\ 50{,}78'' \qquad (G\,N) = (\varphi_3) = 221^\circ\ 6'\ 50{,}78''$

Gemessen: $\alpha_5 = 42\ \ 6\ \ 29{,}30 \qquad \alpha_3 = 222\ \ 6\ \ 31{,}17$

also: $l_5 = +21{,}48'' \qquad l_3 = +19{,}61$

Die Entfernung ist $N\,G = 10{,}069^{km}$ ($\log N\,G = 4.0029694$ in Metern).

Die Coefficienten a und b werden für δx und δy in Metern:

$a = -13{,}73 \qquad b = +15{,}20$

Beide Punkte N und G sollen Verschiebungen erleiden, nämlich $\delta x'$, $\delta y'$ für N und δx, δy für G, und daraus folgen die Fehlergleichungen:

$$v_5 = z_n - 13{,}73\,(\delta x - \delta x') + 15{,}20\,(\delta y - \delta y') + 21{,}48''$$

$$v_3 = z_g + 13{,}73\,(\delta x' - \delta x) - 15{,}20\,(\delta y' - \delta y) + 19{,}61''$$

oder

$$v_3 = z_g - 13{,}73\,(\delta x - \delta x') + 15{,}20\,(\delta y - \delta y') + 19{,}61''$$

Die gleichnamigen Coefficienten in v_5 und v_3 sind gleich.

Wir wollen hieran auch noch eine, für nächste Zwecke nicht erforderliche, Betrachtung anstellen, von ähnlicher Art, wie im zweiten Teile von § 96.

Die Unbekannten z_1 und z_2 in (7) kann man jedenfalls eliminieren, und sei es, dass dabei Gewichtsänderungen auftreten, oder auch, wenn die obigen Gleichungen ursprünglich schon verschiedene Gewichte haben sollten, kommen wir nun zu der Betrachtung zweier Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= a\,x + b\,y + l_1 \qquad \text{Gewicht} = p_1 \\ V_2 &= a\,x + b\,y + l_2 \qquad \quad " \quad\ = p_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Diese beiden Gleichungen können je nach ihrem Zusammenhang mit anderen Ausgleichungs-Elementen verschieden weiter behandelt werden.

Die zu (8) gehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \underline{(p_1 + p_2)\,a^2\,x} + (p_1 + p_2)\,a\,b\,y + (p_1\,a\,l_1 + p_2\,a\,l_2) &= 0 \\ \underline{(p_1 + p_2)\,b^2\,y} \ + (p_1\,b\,l_1 + p_2\,b\,l_2) &= 0 \\ + \underline{(p_1\,l_1^2 + p_2\,l_2^2)} & \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Denkt man sich andererseits *eine* Fehlergleichung:

$$V = a\,x + b\,y + \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2}{p_1 + p_2} \text{ mit dem Gewicht } = p_1 + p_2, \tag{10}$$

so erhält man dieselben Coefficienten wie in (9), das Fehlerquadratglied wird aber nach (10) anders, nämlich:

$$\frac{(p_1\,l_1 + p_2\,l_2)^2}{p_1 + p_2} \tag{11}$$

Die Rechnung mit dem Schlussglied von (9) ist schärfer als die Rechnung mit der Summe (11), weil es immer besser ist, die Fehler einzeln zu benützen, statt sie zusammenzufassen. Die Zusammenfassung der zwei Gleichungen (8) in eine Gleichug (10) bietet auch wenig rechnerische Vorteile, dagegen den Nachteil, dass die Stationsgruppen gestört werden. Wir ziehen daher die Einzelbehandlung zweier Gleichungen von der Form (7) oder (8) im allgemeinen der Zusammenfassung (10) vor.

§ 98. Combiniertes Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden.

Nachdem wir in § 91. bis § 92. das Vorwärts-Einschneiden und in § 93. das Rückwärts-Einschneiden je für sich kennen gelernt haben, und nachdem im vorigen § 97. auch die dazu erforderlichen Gewichts-Verhältnisse erörtert worden sind, wird es nicht schwer sein, auch eine Ausgleichung mit Vereinigung von Vorwärtseinschneiden *und* Rückwärtseinschneiden durchzuführen. Wir bedürfen dazu nur noch eines gelegentlichen Rückblickes auf den früheren theoretischen § 31. S. 97.

Als erstes Beispiel wollen wir den Fall von Fig. 1. S. 366 im vorigen § 97. nehmen (dieses Beispiel ist aus der Anweisung IX. v. 25. Okt. 1881, S. 187—190 entlehnt, wo jedoch innere und äussere Richtungen als *gleich*gewichtig behandelt und δx , δy in Metern gezählt sind).

Zuerst haben wir die fest gegeben Coordinaten und die Näherungs-Coordinaten des Neupunktes (Fig. 1. S. 366):

	Punkt	Ordinate y			Abscisse x	
fest gegeben	(25)	$\times 44\,276{,}21^m$	oder	$= -55\,723{,}79^m$	$+21\,591{,}03^m$	(1)
„ „	(17)	$\times 43\,114{,}56$	„	$= -56\,885{,}44$	$+21\,345{,}08$	
„ „	(6)	$\times 43\,282{,}03$	„	$= -56\,717{,}97$	$+22\,079{,}51$	
„ „	(18)	$\times 43\,210{,}38$	„	$= -56\,789{,}62$	$+23\,094{,}54$	
Näherung	(13)	$(y) = \times 43\,949{,}96$	„	$= -56\,050{,}04$	$(x) = +22\,239{,}44$	

Äussere Richtungen	Entfernungen s	Innere Richtungen bereits genähert orientiert	
1. $= 333^\circ\, 17'\, 25''$	726^m	3. $= 153^\circ\, 17'\, 26''$	(2)
	1224^m	4. $= 223\;\; 2\;\; 51$	
2. $= 76^\circ\, 32'\, 6''$	687^m	5. $= 256\;\; 33\;\; 4$	
	1131^m	6. $= 319\;\; 9\;\; 48$	

Genäherte Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigungen"):

für äussere Richtungen:

$$(\varphi_1) = 333^\circ\, 17'\, 26'' \text{ mit } l_1 = +1''$$
$$(\varphi_2) = 76^\circ\, 32'\, 4'' \;\;„\;\; l_2 = -2''$$

für innere Richtungen:

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi_3) = 153^\circ\, 17'\, 26'' \text{ mit } l_3 = 0'' \\ (\varphi_4) = 222\;\; 2\;\; 52 \;\;„\;\; l_4 = +1 \\ (\varphi_5) = 256\;\; 32\;\; 4 \;\;„\;\; l_5 = -60 \\ (\varphi_6) = 319\;\; 8\;\; 36 \;\;„\;\; l_6 = -72 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Fehlergleichungen (für δx und δy in Decimetern):

$$v_1 = +13\,\delta x + 25\,\delta y + 1$$
$$v_2 = -29\,\delta x + 7\,\delta y - 2$$
$$v_1 \text{ und } v_2 \text{ mit Gewicht} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_3 = z + 13\,\delta x + 25\,\delta y + 0 \\ v_4 = z - 12\,\delta x + 12\,\delta y + 1 \\ v_5 = z - 29\,\delta x + 7\,\delta y - 60 \\ \underline{v_6 = z - 12\,\delta x - 14\,\delta y - 72} \end{array}\right\} \quad (4)$$
$$0 = z - 10\,\delta x + 8\,\delta y - 33 \text{ Mittel}$$

Die Elimination von z geschieht nach dem Mittelbildungsverfahren von § 93. S. 351, so dass man hat:

$$v_1 = +13\,\delta x + 25\,\delta y + 1$$
$$v_2 = -29\,\delta x + 7\,\delta y - 2$$
$$\text{mit Gewicht} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_3 = +23\,\delta x + 17\,\delta y + 33 \text{ mit } p = 1 \\ V_4 = -\;2\,\delta x + 4\,\delta y + 34 \;\;„\;\; p = 1 \\ V_5 = -19\,\delta x - 1\,\delta y - 27 \;\;„\;\; p = 1 \\ V_6 = -\;2\,\delta x - 22\,\delta y - 39 \;\;„\;\; p = 1 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Normalgleichungen, zunächst für alle $p = 1$:

$$\begin{array}{r} \underline{1010\,\delta x} + 122\,\delta y + 71 = 0 \\ + \underline{674\,\delta y} + 11 = 0 \\ + \underline{5} = [l\,l] \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} + \underline{898}\,\delta x + 446\,\delta y + 1282 = 0 \\ + \underline{790}\,\delta y + 1582 = 0 \\ + \underline{4495} = [L\,L] \end{array}\right\} \quad (6)$$

Wenn nun äussere und innere Richtungen *gleiche* Gewichte haben sollen (Gewicht = 1), so hat man die vorstehenden zwei Normalgleichungs-Systeme einfach gliedweise zu addieren, z. B. $(1010 + 898)\,\delta x = 1908\,\delta x$ u. s. w. (was der Gleichung (11) S. 97 entspricht) und damit hat man:

Vereinigte Normalgleichungen für gleiche Gewichte:

$$\left.\begin{array}{l} +\underline{1908\,\delta x} + 568\,\delta y + 1353 = 0 \\ \qquad\qquad + \underline{1464\,\delta y} + 1593 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \underline{4500} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Die Auflösung giebt:

$$\left.\begin{array}{ll} \delta y = -0{,}92^{dm} & \delta x = -0{,}44^{dm} \\ \text{und } [l\,l\,.\,2] = 2448 & \end{array}\right\} \quad (8)$$

und das Schluss-Ergebnis auf 1^{cm} abgerundet:

$$\text{Punkt (13):} \quad \left.\begin{array}{ll} y = -56050{,}13^{m} & x = +22239{,}40^{m} \\ \quad \pm 0{,}08 & \quad \pm 0{,}07 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Wenn dagegen den äusseren Richtungen nur halbes Gewicht gegeben wird, so hat man die beiden Gruppen (6) so zu vereinigen, dass links nur die Hälfte genommen wird, also z. B. $(505 + 898)\,\delta x$ u. s. w. Dieses giebt:

Vereinigte Normalgleichungen für ungleiche Gewichte:

$$\left.\begin{array}{l} +\underline{1403\,\delta x} + 507\,\delta y + 1318 = 0 \\ \qquad\qquad + \underline{1127\,\delta y} + 1588 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \underline{4497} \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Auflösung giebt:

$$\left.\begin{array}{ll} \delta y = -1{,}17^{dm} & \delta x = -0{,}52^{dm} \\ [l\,l\,.\,2] = 1952 & \end{array}\right\} \quad (11)$$

das Schluss-Ergebnis für die Coordinaten auf 1^{cm} abgerundet:

$$\text{Punkt (13):} \quad \left.\begin{array}{ll} y = -56050{,}16^{m} & x = +22239{,}39^{m} \\ \quad \pm 0{,}08 & \quad \pm 0{,}07 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Die Ergebnisse (9) und (12) weichen nicht viel von einander ab, doch ist das Sache des Zufalls und nicht des Princips. In beiden Fällen gehört zum vollständigen Abschlusse der Rechnung auch noch die Berechnung der endgültigen Richtungswinkel φ und der scheinbaren Fehler v nebst $[v^2]$ u. s. w. Dieses wollen wir aber erst an dem nächsten Beispiele ausführlich zeigen.

Ausgleichung des Punktes Hochschule mit Vorwärts-Einschneiden und Rückwärts-Einschneiden.

Nach dem Anblick von Fig. 1. S. 185 und der Messungs-Abscisse S. 186 hat der Punkt Hochschule 4 äussere und 5 innere Richtungen, nämlich:

äussere Richtungen	innere Richtungen
. . . . . .	nach Schanze
von Steuerndieb	„ Steuerndieb
„ Aegidius	„ Aegidius
„ Wasserturm	„ Wasserturm
„ Burg	„ Burg
mit Ausgleichung § 92. S. 343	mit Ausgleichung § 93. S. 351

Da nun sowohl die Ausgleichung der äusseren Richtungen für sich als auch die Ausgleichung der inneren Richtungen für sich bereits erledigt ist, so brauchen wir nur diese beiden Ausgleichungen zusammen zu fassen, um die Gesamtausgleichung zu erzielen.

Wir wollen dabei auch gleich bemerken, dass ein neues besonderes Formular für combiniertes Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden nicht nötig ist, indem man die besonderen Teile der Formulare S. 343 und S. 351 einfach beibehält, und die Zusammenfassung auf einem zugehörigen Blatte, bei wenig Richtungen auch nur durch etwas abgeänderte Benützung der vorgedruckten Spalten von S. 343 bewirkt. (In solcher Weise haben wir zahlreiche Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidungen ausgeglichen.)

Wir entnehmen nun die Coefficienten $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. von den beiden getrennten Ausgleichungen:

	$[a\,a]$	$[b\,b]$	$[a\,b]$	$[a\,l]$	$[b\,l]$	$[l\,l]$
S. 343 Vorwärts	+ 103	+ 184	+ 62	− 13	− 54	+ 17,2
also $^1/_2$ Vorwärts	+ 51	+ 92	+ 31	− 6	− 27	+ 8,6
S. 351 Rückwärts	+ 101	+ 206	+ 48	− 39	− 88	+ 73,8
zusammen	+ 152	+ 298	+ 79	− 45	− 115	+ 82,4

Hiebei wird der Blick sich zuerst darauf richten, ob die $[a\,l]$ und $[b\,l]$ vorwärts und rückwärts gleiche Vorzeichen haben, d. h. sich nicht geradezu widersprechen. Die Gleichheit der Vorzeichen findet hier statt. Nach der Vereinigung macht man die Elimination wie früher auf S. 343 oder S. 351 (mit dem Rechenschieber).

	$a]$	$b]$	$l]$	$[b$	$[a$	$[l$	
$[a$	+ 152	+ 79	− 45	+ 298	+ 79	− 115	
	$[b$	+ 298	− 115		+ 152	− 45	
		− 41	+ 23		− 21	+ 30	
		$[l$	+ 82			+ 82	
			− 13			− 44	
$\delta y = +0{,}36^{dm}$	$[b\,b.1] = +257$		− 92	$[a\,a.1] = +131$		− 15	$\delta x = +0{,}11^{dm}$
$\delta y = +0{,}036^{m}$			+ 69			+ 38	$\delta x = +0{,}011^{m}$
$(y) = -24709{,}800^{m}$			− 33			− 2	$(x) = -26868{,}300^{m}$
$y = -24709{,}764^{m}$		$[l\,l.2] =$	+ 36		$[l\,l.2] =$	+ 36	$x = -26868{,}289^{m}$

Mit diesen ausgeglichenen Coordinaten y und x macht man wieder die Berechnung der endgültigen Richtungswinkel φ (wie auf dem unteren Teile von S. 342 und S. 350) und dann die Ausrechnung der v, wie auf dem unteren Teile von S. 343 und S. 351. Dieses geben wir im folgenden, jedoch mit Weglassung der Proben für $\delta\,\varphi$ (welche stimmen):

Äussere Richtungen (vgl. S. 342):

Nr.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Endgültiger Richtungs-winkel φ	$\varphi - \alpha = v$		v^2
1	Steuerndieb	Hochschule	259° 14′ 15,1″	259° 14′ 14,9″		− 0,2″	0,04
2	Aegidius	"	315 2 32,6	315 2 34,5	+ 1,9		3,61
3	Wasserturm	"	20 36 50,0	20 36 49,4		− 0,6	0,36
4	Burg	"	149 4 12,3	149 4 11,0		− 1,3	1,69
			110,0	109,8		− 1,2	5,70

Innere Richtungen (vgl. S. 351):

Nr.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Endgültiger Richtungswinkel φ	$\varphi - \alpha = V$	$V + z = v$	v^2
1	Hochschule	Schanze	24° 15′ 19,4″	24° 15′ 18,4″	—1,0″	—2,9″	8,41
2	„	Steuerndieb	79 14 15,1	79 14 14,9	—0,2	—2,1	4,41
3	„	Aegidius	135 2 30,0	135 2 34,5	+4,5	+2,6	6,76
4	„	Wasserturm	200 36 48,8	200 36 49,4	+0,6	—1,3	1,69
5	„	Burg	329 4 5,2	329 4 11,0	+5,8	+3,9	15,21
			118,5	128,2	+9,7	+ 0,2	36,48
				$-z = +1,9$			

Nun haben wir:

von den 4 äusseren Richtungen $[v^2] = 5,7$ also $\frac{1}{2}\,[v^2] = 2,8$

von den 5 inneren Richtungen $[v^2] = 36,5$

Gesamtsumme $[v^2] = 39,3$

Als Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlers haben wir $(4+5)-(2+1)=6$, weil $4+5$ gemessene Richtungen vorhanden sind, und δx, δy nebst z zusammen 3 Unbekannte. Man hat also den mittleren Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{39,3}{6}} = \pm 2,6''$$

Damit und mit den Gewichten $[b\,b\,.\,1] = 257$ und $[a\,a\,.\,1] = 131$ aus der vorhergehenden Elimination berechnet man auch die mittleren Coordinatenfehler selbst, in demselben Schema wie unten auf S. 343 oder S. 351:

$[v\,v] = 39,3$	$\log\,[v\,v]$	1.5944	$\log m^2$	0.8162	$\log m^2$	0.8162
$n - u = 9 - 3$	$\log\,(n-2)$	0.7782	$\log\,[b\,b\,.\,1]$	2.4099	$\log\,[a\,a\,.\,1]$	2.1173
$= 6$	$\log m^2$	0.8162	$\log my^2$	8.4063	$\log mx^2$	8.6989
	$\log m$	0.4081	$\log my$	9.2032	$\log mx$	9.3494
	$m = \pm 2,6''$		$my = \pm 0,16^{dm}$		$mx = \pm 0,22$	

Schluss-Ergebnis:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Hochschule} & y = -24709,764^m & x = -26868,289^m \\ & \pm 0,016^m & \pm 0,022^m \\ & (m = \pm 2,6'') & \end{array}\right\} \quad (13)$$

Dieses gilt für Vorwärtseinschneiden *und* Rückwärtseinschneiden. Zur Vergleichung wollen wir nochmals von § 92. und § 93. die Einzelbestimmungen hersetzen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Vorwärtseinschneiden} & -24709,768^m & -26868,306^m \\ \text{(S. 343)} & \pm 0,006^m \ (m = \pm 0,8'') & \pm 0,009^m \end{array}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Rückwärtseinschneiden} & -24709,762^m & -26868,280^m \\ \text{(S. 351)} & \pm 0,030^m \ (m = \pm 4,0'') & \pm 0,042^m \end{array}\right\} \quad (15)$$

Die berechneten mittleren Fehler sind bei so wenigen Beobachtungen mehr oder weniger Zufallswerte, sie beweisen aber doch, dass die Punktbestimmung auf wenige Centimeter genau ist. Auch sei bemerkt, dass Vorstehendes nicht ein zugerichtetes Schulbeispiel ist, sondern genau den im Jahr 1891 amtlich für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme gemachten Messungen entspricht.