Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 102. Doppelpunkt-Ausgleichung mit vollen Richtungssätzen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

§ 102. Doppelpunkt-Ausgleichung mit vollen Richtungssätzen.

Schon auf S. 187 haben wir mitgeteilt, dass die Annahme von lauter vollen Richtungssätzen als Messungen zu dem Netze von S. 185 in Wirklichkeit *nicht* erfüllt war, dass wir aber trotzdem, um glatte Rechnung zu haben die Ausgleichung von § 61. mit jener Annahme gemacht haben.

Andererseits haben wir die Doppelpunkt-Einschaltung von § 100. gemacht unter der Annahme, dass alle äusseren Richtungen das Gewicht $= \frac{1}{2}$ haben im Vergleich mit den inneren Richtungen. Diese Gewichtsbemessung ist selbst weder mit der wirklichen Satzverteilung, noch mit der Annahme lauter voller Sätze im Einklang, sondern ist nach § 97. gewählt als passende Vermittlung zwischen allen in Betracht kommenden Umständen, zur Erlangung eines glatten Rechen-Verfahrens.

Nach all diesem mag es wenigstens von theoretischem Interesse sein, die Doppelpunkt-Ausgleichung nun auch noch zu machen mit der Annahme, dass lauter volle Richtungssätze, nicht bloss für die inneren Richtungen, sondern auch für die äusseren Richtungen mit Anschluss an *alle* festen Strahlen, vorhanden seien.

Wir haben dieses konsequent durchgeführt, betrachten aber die Rechnung als ein doctrinäres Schulbeispiel, welches, indem nicht die ganze Rechenmenge vorgeführt wird, immerhin auch ein gewisses praktisches Interesse erwecken und z. B. zur Klärung der Begriffe in Hinsicht auf die Orientierungsgrössen z und die davon abhängigen Fehlerberechnungen dienen kann.

Die fest gegebenen Coordinaten und auch die Näherungs-Coordinaten sollen dieselben sein wie früher in § 99. S. 375.

Die Fehlergleichungen und die Normalgleichungsbeiträge für Hochschule und Dreifaltigkeit bleiben dieselben wie früher in § 99. Tabelle S. 376 und (H) und (D) S. 377, denn die inneren Richtungen werden durch die festen Anschlüsse nicht betroffen.

Auch für die äusseren Richtungen bleiben in den Fehlergleichungen die Coefficienten a , b und die Absolutglieder l dieselben wie früher S. 376; es tritt aber überall eine Orientierungs-Unbekannte z hinzu, und die Gewichte werden andere, nämlich für s feste Strahlen und einen neuen Strahl wird nach (15) § 96. S. 361 das Gewicht $= \frac{s}{s+1}$, also z. B. für Schanze, wo nach Fig. 1. S. 374 3 feste Strahlen und 1 neuer Strahl (Dreifaltigkeit 12) vorhanden ist, wird das Gewicht dieses neuen Strahles $= \frac{3}{4}$. Diejenigen Stationen, auf welchen *zwei* neue Strahlen vorkommen, wie z. B. Steuerndieb mit 13 und 14, müssen nach dem zweiten Teile von § 96. (28) u. ff. S. 364 behandelt werden.

Nach diesen Grundsätzen haben wir aus der früheren Tabelle von § 99. S. 376 folgende neue Tabelle erhalten:

Fehlergleichungen für die äusseren Richtungen.

		a	b	c	d	l	p
Schanze-Dreifaltigkeit	$v_{12} = z_3$	. .	. .	$-1{,}0\,\delta x_2$	$-5{,}7\,\delta y_2$	$-0{,}2$	$\frac{3}{4}$
Steuerndieb-Dreifaltigkeit	$v_{13} = z_4$	. .	. .	$+7{,}5\,\delta x_2$	$-2{,}6\,\delta y_2$	$+0{,}7$	1
" -Hochschule	$v_{14} = z_4$	$+4{,}2\,\delta x_1$	$-0{,}6\,\delta y_1$	. .	. .	$+1{,}1$	1
" (Summe)		$+4{,}2\,\delta x_1$	$-0{,}6\,\delta y_1$	$+7{,}5\,\delta x_2$	$-2{,}6\,\delta y_2$	$+1{,}8$	$-\frac{1}{6}$
Willmer-Dreifaltigkeit	$v_{15} = z_5$	. .	. .	$+0{,}4\,\delta x_2$	$+5{,}1\,\delta y_2$	$-1{,}5$	$\frac{3}{4}$
Aegidius-Hochschule	$v_{16} = z_6$	$+6{,}8\,\delta x_1$	$+7{,}5\,\delta y_1$	. .	. .	$-1{,}1$	1
" -Dreifaltigkeit	$v_{17} = z_6$	. .	. .	$-7{,}4\,\delta x_2$	$+9{,}6\,\delta y_2$	$-3{,}2$	1
" (Summe)		$+6{,}8\,\delta x_1$	$+7{,}5\,\delta y_1$	$-7{,}4\,\delta x_2$	$+9{,}6\,\delta y_2$	$-4{,}3$	$-\frac{1}{7}$
Wasserturm-Hochschule	$v_{18} = z_7$	$-3{,}4\,\delta x_1$	$+8{,}0\,\delta y_1$	. .	. .	$-4{,}1$	$\frac{3}{4}$
Burg-Dreifaltigkeit	$v_{19} = z_8$	. .	. .	$-4{,}4\,\delta x_2$	$-2{,}7\,\delta y_2$	$+2{,}2$	1
" -Hochschule	$v_{20} = z_8$	$-4{,}4\,\delta x_1$	$-8{,}2\,\delta y_1$	. .	. .	$+0{,}5$	1
" (Summe)		$-4{,}4\,\delta x_1$	$-8{,}2\,\delta y_1$	$-4{,}4\,\delta x_2$	$-2{,}7\,\delta y_2$	$+2{,}7$	$-\frac{1}{6}$

Auf Schanze mit v_{12} berechnet man den Beitrag zu den Normalgleichungen, indem man nur z_3 weglässt, und im übrigen das Gewicht $p = \frac{3}{4}$ benützt, also z. B. $\frac{3}{4}\,(-1{,}0)^2 = 0{,}75$ u. s. w., wodurch man erhält:

3) Schanze

$$\begin{array}{rrr}
\underline{0{,}75\,\delta x_2} & +\ 4{,}28\,\delta y_2 & +0{,}15 = 0 \\
. \ . & +\underline{24{,}37\,\delta y_2} & +0{,}86 = 0 \\
 & . \ . & +\underline{0{,}03}
\end{array}$$

Auf Steuerndieb mit v_{13} und v_{14} wird ebenfalls z_4 eliminiert, indem v_{13} und v_{14} ohne z_4 mit $p = 1$ gerechnet und die Summe mit $p = -\frac{1}{6}$ dazu genommen wird, also z. B. $1\,(0{,}0)^2 + 1\,(4{,}2)^2 - \frac{1}{6}\,(4{,}2)^2 = +14{,}70$.

4) Steuerndieb

$$\begin{array}{rrrrr}
+\underline{14{,}70\,\delta x_1} & -2{,}10\,\delta y_1 & -\ 5{,}25\,\delta x_2 & +\ 1{,}82\,\delta y_2 & +3{,}36 = 0 \\
. \ . & +\underline{0{,}30\,\delta y_1} & -\ 0{,}75\,\delta x_2 & -\ 0{,}2x\,\delta y_2 & -0{,}48 = 0 \\
 & . \ . & +\underline{46{,}87\,\delta x_2} & -16{,}25\,\delta y_2 & +3{,}00 = 0 \\
 & & . \ . & +\ \underline{5{,}63\,\delta y_2} & -1{,}04 = 0 \\
 & & & . \ . & +\underline{1{,}16}
\end{array}$$

So werden auch noch für die 4 anderen Stationen mit festen Richtungen die Normalgleichungsbeiträge gebildet, die wir aber zur Raumersparung nur noch andeuten wollen:

5) Willmer	. . . . . .	. . . . . .	. .	$+\ 1{,}69$
6) Aegidius	$+39{,}63\,\delta x_1$	$+43{,}71\,\delta y_1$	. .	$+\ 8{,}81$
7) Wasserturm	$+\ 8{,}67\,\delta x_1$	$-20{,}40\,\delta y_1$	. .	$+12{,}61$
8) Burg	$+16{,}13\,\delta x_1$	$+30{,}07\,\delta y_1$	. .	$+\ 3{,}87$

Alle diese Beiträge 3) bis 8) nimmt man mit den schon von früher vorhandenen Beiträgen (H) und (D) von § 99. S. 377 zusammen, indem man sie Glied für Glied addiert, und dadurch folgende Gesamtnormalgleichungen erhält, in welchen wir nun aber überall um 2 Stellen abrunden:

$$\begin{array}{rrrrr}
+\underline{277\,\delta x_1} & +100\,\delta y_1 & -\ 90\,\delta x_2 & -\ 28\,\delta y_2 & -\ 20 = 0 \\
. \ . & +\underline{362\,\delta y_1} & -\ 1\,\delta x_2 & -\ 15\,\delta y_2 & -113 = 0 \\
 & . \ . & +\underline{231\,\delta x_2} & -\ 80\,\delta y_2 & +\ 37 = 0 \\
 & & . \ . & +\underline{287\,\delta y_2} & -\ 59 = 0 \\
 & & & . \ . & +\underline{111}
\end{array}$$

Diese Gleichungen in üblicher Weise aufgelöst geben:

$$\delta y_1 = +0{,}34^{dm} \quad \delta x_1 = -0{,}07^{dm} \qquad \delta y_2 = +0{,}18^{dm} \quad \delta x_2 = -0{,}12^{dm}$$
$$p y_1 = 320 \quad p x_1 = 202 \qquad p y_2 = 244 \quad p x_2 = 171$$

dazu in laufender Elimination:

$$[l\,l\,.\,5] = 111 - 1 - 35 - 8 - 8 = 59 \tag{1}$$

Indem man die δx, δy zu den Näherungs-Coordinaten addiert, erhält man:

Hochschule, Näherung	$(y_1) = -246\,028{,}900^m$	$(x_1) = -29\,120{,}560^m$
	$\delta y_1 = +0{,}034$	$\delta x_1 = -0{,}007$
Hochschule, Ausgleichung	$y_1 = -246\,028{,}866^m$	$x_1 = -29\,120{,}567^m$ (2)
Dreifaltigkeit, Näherung	$(y_2) = -243\,620{,}760^m$	$(x_2) = -29\,282{,}460^m$
	$\delta y_2 = +0{,}018$	$\delta x_2 = -0{,}012$
Dreifaltigkeit, Ausgleichung	$y_2 = -243\,620{,}742^m$	$x_2 = -29\,282{,}472^m$ (3)

Nach diesem gehen wir über zu der Berechnung der Fehlerverteilung, d. h. Ausrechnung aller einzelnen v und z und dann Berechnung des mittleren Fehlers. Die Messungen auf Hochschule und Dreifaltigkeit werden genau ebenso behandelt, wie früher bei S. 351 und geben die einzelnen v:

Hochschule $v = -2{,}2''$, $-1{,}8''$, $+2{,}0''$, $+1{,}5''$, $-2{,}1''$ $+2{,}5''$
Dreifaltigkeit $v = +2{,}5''$, $-0{,}4''$, $-3{,}4''$, $+1{,}5$, $-0{,}1''$

hieraus Hochschule: $[v^2] = 24{,}99$
Dreifaltigkeit: $[v^2] = 20{,}23$

Schanze giebt Dreifaltigkeit 170° 24′ 22,4″ beobachtet
170 24 21,3 ausgeglichen

$v_{12} = -1{,}1 \quad v^2 = 1{,}21$

also mit $p = \dfrac{3}{4}$, $p\,v^2 = 0{,}9125$

Steuerndieb giebt	Dreifaltigkeit	Hochschule	
	250° 39′ 20,7″	261° 48′ 52,3″	beobachtet
	250 39 20,1	261 48 53,0	ausgeglichen
	$v_{13} = -0{,}6$	$v_{14} = +0{,}7$	
	$v_{13}^2 = 0{,}36$	$v_{14}^2 = 0{,}49$	

hiezu aber noch für die Summe $v_{13} + v_{14} = +0{,}1$ und mit $p = -\dfrac{1}{6}$ den Betrag $-\dfrac{1}{6}(-0{,}1)^2 = -0{,}0017$ also im ganzen für Steuerndieb $[v^2] = 0{,}36 + 0{,}49 - 0{,}0017 = 0{,}8483$.

In gleicher Weise bekommt man für alle Stationen zusammen:

Hochschule		24,9900	mit	6	Richtungen
Dreifaltigkeit		20,2300	„	5	„
Schanze	0,75 · 1,21 =	0,9125	„	1	„
Steuerndieb	0,36 + 0,49 — 0,0017 =	0,8483	„	2	„
Willmer	0,75 · 0,36 =	0,2700	„	1	„
Aegidius	1,21 + 0,36 — 0,0357 =	1,5343	„	2	„
Wasserturm	0,75 · 1,44 =	1,0800	„	1	„
Burg	5,29 + 4,00 — 0,0150 =	9,2750	„	2	„
		$[v^2] = 59{,}1401$	mit	20	Richtungen

Dieses stimmt hinreichend mit $[l\,l\,.\,4] = 59$ von (1) (s. oben.)

Was nun den mittleren Fehler betrifft, so ist derselbe zu rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{59{,}14}{20 - 4 - 2}} = \pm 2{,}1'' \tag{4}$$

Der Nenner $20 - 4 - 2 = 14$ entsteht nämlich dadurch, dass 20 Richtungen als gemessen eingehen und ausser den 4 Hauptunbekannten $\delta x_1 \; \delta y_1 \; \delta x_2 \; \delta y_2$ noch die beiden z_1 und z_2 für die ganz freien Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit als Unbekannte auftreten. Allerdings sind auch auf den festen Punkten Schanze, Steuerndieb u. s. w. ursprünglich Nullpunkts-Unbekannte z_3 , z_4 u. s. w. vorhanden gewesen, allein diese sind nicht nur eliminiert, sondern auch durch die Gewichte 0,75 und die Abzüge $-0{,}0017$ u. s. w. in anderer Weise berücksichtigt.

Die Berechnung des mittleren Fehlers nach (4) entspricht der theoretischen Formel (35) § 96. S. 364; wir wollen aber auch noch die schärfere Rechnung nach (36) S. 365 durchführen.

Wenn man nämlich auch auf den festen äusseren Punkten *alle* gemessenen Richtungen eines vollen Satzes und das zugehörige z berücksichtigen will, so bekommt man eine ganz andere, nämlich z. B. für den Punkt Schanze folgende Berechnung, welche wir auf 0,01″ scharf führen, um den Zusammenhang deutlicher zu zeigen.

Schanze	fest gegeben	beobachtet t	V	ausgeglichen	$v' = v - z$
1. Steuerndieb . .	132° 35′ 39,69″	132° 35′ 39,82″	− 0,13″		
2. Dreifaltigkeit . .		170 24 22,36		170° 24′ 21,30″	− 1,06
3. Aegidius . . .	184 40 38,35	184 40 38,45	− 0,10		
4. Burg	240 44 48,10	240 44 47,87	+ 0,23		
			0,00		− 1,06

Nun rechnet man die Gesamtverschiebung:

$$-z = \frac{[V] - 1{,}06}{4} = -0{,}26'' \text{ also } z = +0{,}26$$

Nun kann man entweder dieses z zu allen V und v' hinzunehmen und dadurch die 4 wirklichen v, nämlich $+0{,}13$, $-0{,}80$, $+0{,}16$, $+0{,}49$ und deren Quadratsumme 0,9226 berechnen, oder man kann noch mehr anschaulich die Sache dadurch machen, dass man die beobachteten t nochmals sämtlich um $-z$ verschiebt und mit den oben als fest gegeben und ausgeglichen bekannten Richtungswinkeln gemeinsam vergleicht.

Schanze	fest gegeben bzw. ausgeglichen	beobachtet $t - 0{,}26''$	v	v^2
Steuerndieb . . .	132° 35′ 39,69″	132° 35′ 39,56″	+ 0,13″	0,0169
Dreifaltigkeit . . .	170 24 21,30	170 24 22,10	− 0,80	0,6400
Aegidius	184 40 38,35	184 40 38,19	+ 0,16	0,0256
Burg	240 44 48,10	240 44 47,61	+ 0,49	0,2401
			− 0,02	0,9226

Man kann dieses auch noch so rechnen:

$$[V^2] + v'^2 - \frac{[v']^2}{s + s'} = 0{,}13^2 + 0{,}10^2 + 0{,}23^2 + 1{,}06^2 - \frac{1}{4}(-1{,}06)^2$$
$$= 0{,}0798 + 1{,}1236 - 0{,}2809 = 0{,}9226$$

Dieses ist nun der Fehlerquadratbeitrag der Station Schanze mit 4 gemessenen Richtungen und einer Nullpunkts-Unbekannten z.

Alle unsere 8 Stationen zusammen geben so im Ganzen:

1. Hochschule	24,99	5. Willmer	$2,77 + 0,31 = 3,08$
2. Dreifaltigkeit	20,23	6. Aegidius	$1,39 + 1,69 = 3,08$
3. Schanze	$0,08 + 0,84 = 0,92$	7. Wasserturm	$0,46 + 1,07 = 3,08$
4. Steuerndieb	$1,81 + 0,90 = 2,71$	8. Burg	$2,03 + 9,11 = 11,14$

Gesamtsumme $[v^2] = 8,54 + 59,14 = 67,68$

Die Anzahl der beobachteten Richtungen ist $= 42$ und die Unbekannten sind erstens $\delta x_1 \; \delta y_1 \; \delta x_2 \; \delta y_2$ zusammen 4 und für jede Station ein z, also deren 8 und im Ganzen giebt das $4 + 8 = 12$ Unbekannte, folglich der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{67,68}{42 - 12}} = + 1,5'' \tag{5}$$

Lässt man die festen Strahlen weg, so hat man:

$$m = \sqrt{\frac{59,14}{20 - 6}} = \pm 2,1'' \tag{6}$$

wie schon oben (4) angegeben war.

Ehe wir diese Fehlerberechnungen (6) und (5) vergleichen, wollen wir nochmals daran erinnern, dass unser Zahlenbeispiel in Bezug auf die Anordnung der Sätze lediglich *fingiert* ist. Sehen wir aber davon ab, und nehmen wir an, es seien wirklich unsere 8 vollen Richtungssätze mit zusammen 42 Richtungen auf ein von früher vorhandenes wesentlich genauer gemessenes und ausgeglichenes Fünfeck aufgepasst und eingeschaltet worden, so ist die Berechnung (5) ohne Zweifel die theoretische Folgerung des ganzen Verfahrens, indem *alle* 42 Richtungen, auch die auf bereits feste Strahlen aufzulegenden, ihre v erhalten müssen. Um übrigens die festen, alten Strahlen von den neuen zu trennen, wollen wir noch (5) so schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{8,54 + 59.14}{16 + 14}} \tag{7}$$

Hier stehen rechts die Bestandteile von (4) oder (6) und man sieht, dass die Berechnung (4) zwar ebenfalls in richtigem Verhältnis hergestellt ist (abgesehen von dem, was in unserem Beispiel fingiert ist), dass aber die Berechnung (4) immer nur einen *Teil* der Fehlerelemente berücksichtigt und insofern der Berechnung (5) oder (7) nachsteht.

In der Praxis wird man wohl niemals die Berechnung (5) durchführen, sondern sich mit (4) begnügen, wahrscheinlich auch gar nicht nach Richtungen in diesem Sinne ausgleichen, sondern nur nach § 99. mit *unabhängigen* äussern Richtungen wie mit einzelnen Winkeln verfahren; bei alledem schien es uns nicht uninteressant, die vorstehende Richtungsausgleichung bis zu der Berechnung des mittleren Fehlers nach (5) durchzuführen, weil dadurch viel besser als durch die abstrakten Formeln von § 96. die Erkenntnis geweckt wird, welche Zahl von Beobachtungen und Unbekannten im Nenner des mittleren Fehlerquadrats einzuführen ist, ob alle z oder welche z hiebei mitzählen u. s. w. oder allgemeiner, weil dadurch ersichtlich wird, was die strenge Theorie fordert und was davon in gegebenen Fällen der Praxis nachgelassen werden kann.