Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 105. Verschiedene Zahlenfragen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

gemeinsamen Anfangsstrahl angeschlossen werden, werden Leitpunkt und Folgepunkte nur unter sich verbunden.

Vorstehendes sind die Bestimmungen der trigonometrischen Abteilung von 1888.

Bei Stadt-Triangulierungen kommt der erwähnte Fall häufig vor mit zwei oder mehr Hochpunkten auf einem Bauwerke, z. B. zwei symmetrischen Kirchtürmen u. s. w., und dann ist darauf zu achten, dass keinenfalls solche zusammengehörige Punkte in getrennten Sätzen gemessen werden.

In den Messungen schon hierauf noch mehr Rücksicht zu nehmen als durch die soeben bemerkte Anordnung der Sätze, ist bei Stadt-Triangulierung im Allgemeinen nicht möglich, denn erst nach Auftragen des Netzbildes kann ein bestimmter Berechnungsplan entworfen werden (vgl. unseren 2. Band, 4. Aufl. 1893, S. 329—333). Wie sich dann die Rechnung gestalten kann, mag ein Beispiel zweier, 24 Meter von einander abstehender Punkte zeigen: Oppenheim Fahnenstange und Oppenheim Schornstein (Blitzableiter). Der erste Punkt war von 7 Bodenpunkten aus angeschnitten, der zweite von 9 Bodenpunkten, worunter die 7 vorigen und noch 2 andere. Nach der reinen Folgepunktstheorie müsste man die zwei anderen Schnitte streichen, was man aber sehr ungern thut, da die Schnitte sonst gut sind. Unter diesen Umständen haben wir beide Möglichkeiten ausgerechnet, es gab sich:

Fahnenstange	$y = -24898{,}427^{m}$	$x = -25227{,}035^{m}$	(1)
aus 7 Schnitten ($m = \pm 2{,}1''$)	$\pm 0{,}009$	$\pm 0{,}007$	
Schornstein	$y = -24877{,}051^{m}$	$x = -25237{,}503^{m}$	(2)
aus 7 Schnitten ($m = \pm 1{,}4''$)	$\pm 0{,}006$	$\pm 0{,}005$	
Schornstein	$y = -24877{,}034^{m}$	$x = -25237{,}514^{m}$	(3)
aus 9 Schnitten ($m = \pm 2{,}8''$)	$\pm 0{,}010$	$\pm 0{,}008$	

Nach der Folgepunkt-Theorie wäre (2) zu nehmen und (3) zu verwerfen, wir haben aber mit Rücksicht auf alle Nebenumstände uns nicht entschliessen können, die beiden guten Schnitte 8. und 9. (mit $1{,}4^{km}$ und $0{,}9^{km}$ Länge) zu opfern, und haben das Ergebnis (3) endgültig angenommen. (Vgl. Nr. 74. und 73. in der grossen Tabelle des folgenden § 105.)

In anderen Fällen haben wir den Forderungen der Folgepunkt-Theorie entsprochen, und den einen oder anderen Schnitt geopfert. Es kommt natürlich hier alles auf das innere Verständnis und auf den praktischen Blick des Rechners an, der sein eigenes Urteil im einzelnen Falle nicht aufgeben, aber den guten Grundgedanken von Leitpunkt und Folgepunkt nie ausser Acht lassen soll.

§ 105. Verschiedene Zahlenfragen.

Die numerische Ausrechnung spielt bei Ausgleichungs-Rechnungen immer eine wichtige Rolle, und, wie überhaupt in der M. d. kl. Q., kann man bei den Punkteinschaltungen mit Coordinaten-Ausgleichung durch manche kleine Kunstgriffe die Rechnung sehr erleichtern oder umgekehrt durch ungeschickte Anordnung die Rechnung erschweren.

Die Hauptsache ist immer, die Fehlergleichungen so zu richten, dass man es mit nur *kleinen* und ausserdem möglichst *gleichen* Zahlenwerten zu thun hat; dann kann man bei nur *zwei* Unbekannten δx, δy die ganze Ausgleichung, einschliesslich

Elimination u. s. w. immer kurzweg mit dem *Rechenschieber* machen, was eine ganz ausserordentliche Erleichterung ist im Vergleich gegen die logarithmische Rechnung, gegen die Rechnung mit Crelles Produktentafel u. dgl.

Wir haben dieses schon früher in § 89. S. 329 bemerkt, und wir haben inzwischen auch bei allen praktischen Beispielen, namentlich S. 343 und S. 351 stets so gerechnet.

Man betrachte auch die Gleichungen (2) S. 367 mit den einfachen Coefficienten -5 und $+8$, deren Quadrate und Produkte sich geradezu anschreiben lassen, nämlich 25 , 64 , -40. Oder man betrachte die Fehlergleichungen (4) S. 370, deren erste die Coefficienten $+13$ und $+25$ hat, während eine entsprechende andere Rechnung (Citat S. 370, oben) die Coefficienten $+128$ und $+254$ hat.

Man wird auf den ersten Blick nun glauben, die Abrundung 128 auf 13 und 254 auf 25 gehe auf Kosten der nötigen Genauigkeit, allein das ist aus zwei Gründen nicht der Fall. Erstens lehrt uns die Erfahrung an hunderten von Fällen (vgl. den späteren § 106), dass man in III.—IV. Ordnung im Allgemeinen ausreicht mit 1- bis 2stelligen Coefficienten, und zweitens besteht eine theoretische Berechtigung, bei solchen Ausgleichungen die Fehlergleichungen und Normalgleichungen sogar *weniger* scharf zu behandeln, als man nachher die Coordinaten, Richtungswinkel und Entfernungen weiter führen will. Die Quadratsumme $[v\,v]$ ändert sich nämlich in der Nähe ihres Minimums, wie jede Funktion in solchem Falle, am langsamsten, oder wenn man im Sinne der Wahrscheinlichkeit die Sache betrachten will, die Wahrscheinlichkeit, das beste Ergebnis zu haben, ändert sich sehr wenig, wenn man auch um 0,1 bis 0,2 des mittleren Fehlers von den eigentlich günstigsten d. h. dem scharfen Minimum von $[v^2]$ entsprechenden Coordinaten abweicht.

Wenn man dann aus *formellen* Gründen doch schärfer rechnen will, z. B. auf 1^{mm} bei feinen Stadtmessungen, oder auf 1^{cm} scharf im Felde, so ist das eine vom vorigen bis zu einem gewissen Grade unabhängige Frage.

Dadurch unterscheiden sich diese Einschneide-Ausgleichungen nach vermittelnden Beobachtungen ganz wesentlich von den Netz-Ausgleichungen nach bedingten Beobachtungen (z. B. § 61.), denn bei jenen Netzen muss man die Ausgleichung selbst *mindestens* ebenso scharf führen (wegen der Abrundungsfehler meist noch schärfer) als man nachher aus formellen Gründen die Ergebnisse zusammenstimmend haben will, während bei den Einschneide-Ausgleichungen das nicht nötig ist.

Kurz wir halten bei Ausgleichungsrechnungen der hier betrachteten Art (namentlich auch in § 106. und § 107.) das Ansetzen der Coefficienten a , b mit nur 1—2 Wertstellen, wie sie sich bei der Rechnung von δx , δy in Decimetern ohne Decimalen rechts vom Komma von selbst einstellen, für vollauf ausreichend und deswegen empfehlenswert.

Eine vor Kurzem in der „Z. f. V. 1894", S. 182 und S. 240 über diesen Punkt geführte kurze Erörterung giebt uns Veranlassung, noch einiges weiteres zuzusetzen, und zwar mit Benützung eines damit in Beziehung stehenden Zahlenbeispieles, das wir hier in zweierlei Form vorführen, erstens mit Näherungs-Coordinaten auf 1^{m} abgerundet und Coordinaten-Correktionen δx , δy in Metern, und zweitens mit Näherungs-Coordinaten auf $0,1^{m}$ angesetzt und auch δx , δy in Decimetern.

Es ist eine gewöhnliche Rückwärts-Einschneide-Aufgabe (entsprechend unserem § 93. S. 351) mit 4 gemessenen Richtungen, deren Näherungs-Richtungswinkel (φ)

nur 5stellig berechnet sind und daher um 1″—2″ unsicher werden. Die Näherungs-Coordinaten des eingeschnittenen Punktes sind auf ganze Meter abgerundet, nämlich:

$$\text{Näherungen} \quad (y) = \times\, 6681^m \qquad (x) = 4745^m \tag{1}$$

und damit werden die Normalgleichungen für δx und δy in Metern:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{30196}\,\delta x - 1720\,\delta y - 4507 = 0 \\ +\underline{20100\,\delta y} - 5223 = 0 \\ \underline{2239} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Die Auflösung giebt $\delta y = +\,0{,}274^m$ und $\delta x = +\,0{,}165^m$ (3)

also: Ausgleichung $y = 6681{,}274^m$ $x = 4745{,}165^m$ (4)

Wenn man dagegen Näherungen ungefähr auf $0{,}1^m$ ansetzt, was stets leicht zu erlangen ist, etwa:

$$\text{Näherungen} \quad (y) = \times\, 6681{,}3^m \qquad (x) = 4745{,}2^m \tag{5}$$

und wenn man die Verbesserungen δx , δy in Decimetern rechnet, so werden die Normalgleichungen viel einfacher im Vergleich mit (2), nämlich:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{304}\,\delta x - 17\,\delta y + 101 = 0 \\ +\underline{200}\,\delta y + 57 = 0 \\ +\underline{135} \end{array}\right\} \tag{6}$$

Auflösung:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta y = -\,0{,}32^{dm} = -\,0{,}032^m & & \delta x = -\,0{,}35^m = -\,0{,}035^m \\ p_y = 199 & [l\,l\,.\,2] = 82 & p_x = 303 \end{array}\right\} \tag{7}$$

$$y = \times\, 6681{,}268^m \qquad x = 4745{,}165^m \tag{8}$$

Die Normalgleichungen (6) sind nicht nur viel kürzer und glatter als die Gleichungen (2), sondern die (6) sind auch genauer als (2), was von der bei (2) einwirkenden unscharfen 5stelligen Logarithmenrechnung der Richtungswinkel herrührt. Auch die Proberechnungen nach der Ausgleichung sind bei (6)—(8) glatter und genauer als bei (2)—(4), was ohne näheres Vorführen der Zahlen bemerkt sei.

Unsere Gleichungen (6) lassen sich ganz bequem in Zeit weniger Minuten mit dem gewöhnlichen Rechenschieber auflösen, die Gleichungen (2) aber nicht, weil sie zu viele Stellen haben.

Wenn die Näherungen dieselben sind, so unterscheiden sich die Normalgleichungen für Meter-Correktionen δx , δy dadurch, dass die $[a\,a]$, $[a\,b]$ . . . 2 Stellen mehr, die $[a\,l]$, $[b\,l]$ . . . 1 Stelle mehr haben als die entsprechenden Glieder für Decimeter; und man könnte etwa sagen, man braucht nur im ersten Falle die überzähligen Stellen mit Nullen auszufüllen, um beide Fälle identisch zu machen, man würde also statt (6) schreiben:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{30400}\,\delta x - 1700\,\delta y + 1010 = 0 \\ +\underline{20000}\,\delta y + 570 = 0 \\ +\underline{135} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Dieses aufgelöst giebt geradezu:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta y = -\,0{,}032^m & & \delta x = -\,0{,}035^m \\ p\,y = 19905 \ , & [l\,l\,.\,2] = 82 \ , & p\,x = 30256 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Es sind also die δy und δx in (10) unmittelbar dieselben wie in (7) auf dem Umwege über $-\,0{,}32^{dm}$ und $-\,0{,}35^{dm}$, und wenn man weiter rechnet, so kommt auch im Übrigen bei (10) dasselbe heraus wie bei (8), und so könnte man allerdings fragen, warum den Umweg über Decimeter nehmen? Wer die richtige Antwort darauf haben will, muss selbst eine Anzahl von Beispielen durchrechnen, und er wird ebenso wie bei der Vergleichung von (2) und (6) allgemein finden, dass dadurch die ganze Rechnung erheblich übersichtlicher, bequemer und kürzer wird.

Auch eine andere Formfrage möchten wir hier noch kurz berühren, nämlich die auf die Summe $[v\,v]$ bezüglichen Proben, welche unter der Benennung „Sigma-Proben" in neuerer Zeit auch in der amtlichen Preussischen Vermessungs-Anweisung aufgenommen sind.

Es ist lediglich eine *Form*-Frage, welche die Übersichtlichkeit der Rechnung betrifft. Wenn man die Quadratsumme $[v\,v]$ der übrig bleibenden Fehler v auf verschiedenen Wegen berechnet, nämlich etwa aus den einzelnen trigonometrisch als Differenzen erhaltenen v selbst, und aus der Elimination nach den Formeln (22) oder (24) von S. 340, so kann man die Differenz zwischen $[v\,v]$ und dem Quadratsummenglied $[l\,l]$ der Normalgleichungen betrachten:

$$[l\,l] - [v\,v] = \Sigma \qquad (11)$$

oder

$$[v\,v] = [l\,l] - \Sigma \qquad (12)$$

Hier ist nun (11) und (12) algebraisch betrachtet genau dasselbe, aber in der Rechenpraxis ist es *nicht* dasselbe, ob man die Form (11) oder (12) wählt. Wenn man nämlich die „Sigma-Probe" in der Form (11) behandelt, d. h. wenn man zwei auf verschiedenen Wegen erhaltene Σ unter sich vergleicht, z. B.:

$$\Sigma_1 = [a\,l]\,\delta x + [b\,l]\,\delta y$$

und

$$\Sigma_2 = [l\,l] - [v\,v]$$

dann kann man an der Differenz $\Sigma_1 - \Sigma_2$ nicht unmittelbar sehen, ob die Probe *gut* oder *schlecht* stimmt, denn es kommt wesentlich auf die Grösse von $[v\,v]$ selbst an.

Wenn man z. B. gute Messungen aber schlechte Näherungswerte hat, so wird $[v\,v]$ klein, aber Σ sehr gross, und man darf aus dem relativen Stimmen von Σ_1 und Σ_2 nicht auf das genügende Stimmen in $[v\,v]$ schliessen; man habe z. B. $2239 - 2174 = 65$ wo $65 = [v\,v]$ und $2174 = \Sigma_1$ und zwei verschiedene Σ sollen z. B. sein 2174 und 2109, was ein Stimmen auf 65 oder 3 % von Σ wäre, und der Rechner könnte glauben, eine Probe auf 3 % ist gut —, aber es handelt sich hier nicht um den Vergleich der Sigma-Probe mit Σ selbst, sondern mit dem kleinen $[v\,v]$, gegen welches ein Fehler von $[v\,v] = 65$ selbst oder 100 % stattfindet. Es soll nun gar nicht behauptet werden, dass die „Sigma-Probe" ein solches falsch-Auffassen der Sache notwendig hervorrufen müsse, man hätte eben stets von dem Σ auch nach der Summe $[v\,v]$ selbst hinüberzusehen, aber wenn durch besondere Benennung mit Σ die Probe in dieser Form herausgehoben, und im Druckformular in dieser Form an den Abschluss der Rechnung gestellt wird, so ist es nicht rationell, dass gerade an *dieser Form* gar nicht zu sehen ist, ob die Probe gut oder schlecht stimmt. Die Probe muss vielmehr auf $[v\,v]$ *selbst* konzentriert werden.

Endlich ist auch noch eine Kleinigkeit betreffs $[v] = 0$ beim Rückwärts-Einschneiden in der „Z. f. V. 1894", S. 378 als eine Bemerkung von *Seyfert* zu erwähnen, welche nach unserer Ansicht zutreffend ist.

Am Schlusse aller dieser Erörterungen über kleine Formfragen müssen wir ausdrücklich betonen, dass nur, wer mit solchen Sachen selbst längere Zeit praktisch gerechnet hat, solchen Kleinigkeiten eine Bedeutung beimessen wird, dass aber umgekehrt bei dem Aufstellen von Rechenformularen, welche viel hundert- und tausendfach angewendet werden sollen, solche Kleinigkeiten allerdings eine Rolle spielen.