Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

Kapitel IV. Theorie der Fehler-Wahrscheinlichkeit.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Preuss. Landestriangulation, V. Teil, Berlin 1893", aus welchem wir in S. 95—165 das Vorstehende entlehnt haben, auch für alle anderen Stationen die Abrisse auf S. 147 u. ff. Dieses Schlesisch-Posensche Dreiecksnetz ist eines der elegantesten Beispiele für Netzeinschaltung mit Coordinaten-Ausgleichung, welche von General Schreiber etwa seit 1876 bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme eingeführt worden ist.

Wenn man solche mehrpunktige Coordinaten-Ausgleichung auch in einem Soldnerschen Coordinatensystem, etwa in einem der 40 preussischen Kataster-Systeme ausführen will, so bleibt im Wesentlichen die Anordnung bestehen, nur sind die Reduktionen $t - T$ im Soldnerschen System umständlicher zu bestimmen als im conformen System (vgl. S. 206); beschränkt man sich aber auf geringe Ausdehnung, III. Ordnung (etwa wie in § 99. S. 374), so würden in mässigem Abstand von der Haupt-Achse des Systems die $t - T$ verschwindend klein und damit die Coordinaten-Ausgleichung sehr bequem, nämlich mit der im vorstehenden § 108. vorgetragenen übereinstimmend, wenn man nur alle $t - T$ gleich Null setzt.

Kapitel IV.

Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeit.

§ 109. Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit zufälligen Ereignissen, d. h. mit Ereignissen, deren Ursachen im einzelnen Falle unbekannt sind. Solche Ereignisse sind z. B. das Ziehen aus einer Urne, das Fallen eines Würfels, bei Versicherungsanstalten das Eintreten eines Brandfalles oder eines Todesfalles, in der Methode der kleinsten Quadrate das Vorkommen eines Beobachtungsfehlers.

Wenn die Ursachen solcher Ereignisse auch nicht gänzlich unbekannt sind, so wird diesen Ursachen doch im einzelnen Falle nicht weiter nachgeforscht, wenn es sich um Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt.

Mathematische Wahrscheinlichkeit.

Die *Wahrscheinlichkeit* w eines Ereignisses ist das Verhältnis der Anzahl der dem Ereignis günstigen Fälle zu der Anzahl der überhaupt möglichen Fälle.

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel die Zahl 6 zu werfen, ist $= 1 : 6$, weil 1 Fall günstig und 6 Fälle möglich sind.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist immer ein echter Bruch, mit den Grenzen *Null* für Unmöglichkeit, und *Eins* für Gewissheit.

Wenn man im Stande ist, die möglichen und die günstigen Fälle abzuzählen, so kann man hiernach immer die mathematische Wahrscheinlichkeit angeben. Wir fragen z. B. nach der Wahrscheinlichkeit, mit 2 gewöhnlichen Würfeln die Augensumme $= 7$ zu werfen; dazu überlegen wir, dass 36 Fälle überhaupt möglich sind, weil zu jedem Fall des einen Würfels 6 Fälle des anderen Würfels hinzukommen können; weiter zählen wir ab, dass der Wurf 7 im Ganzen 6mal vorkommen kann, nämlich:

$$1+6 \quad , \quad 2+5 \quad , \quad 3+4 \quad , \quad 4+3 \quad , \quad 5+2 \quad , \quad 6+1$$

daraus folgt, dass der Wurf 7 bei zwei Würfeln die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ hat.

In gleicher Weise kann man auch geradezu abzählen, dass der Wurf 2 die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ hat u. s. w.

Indessen statt des unmittelbaren Abzählens kann man zu solchen Fällen auch die Sätze über Summen und Produkte von Wahrscheinlichkeiten anwenden, zu welchen wir nun übergehen.

Summe von Wahrscheinlichkeiten.

Sind w und w' die Wahrscheinlichkeiten zweier sich ausschliessender Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit w, dass eines *oder* das andere eintritt, gleich der Summe der beiden Einzelnwahrscheinlichkeiten, d. h.:

$$W = w + w' \tag{1}$$

Denken wir uns in einer Urne a schwarze, b weisse und c sonstige Kugeln, dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug eine schwarze Kugel zu erhalten:

$$w = \frac{a}{a+b+c}$$

desgleichen für eine weisse Kugel:

$$w' = \frac{b}{a+b+c}$$

und für eine schwarze *oder* eine weisse Kugel, da nun a und b günstig sind:

$$W = \frac{a+b}{a+b+c} \text{ oder } = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = w + w'$$

Damit ist die oben geschriebene Gleichung (1) nachgewiesen, für alle Fälle, welche in Hinsicht auf Wahrscheinlichkeit dem gewählten Urnenbeispiel entsprechen.

Dieser Satz von der Summe der Wahrscheinlichkeiten lässt sich auch auf mehr als zwei Ereignisse anwenden und giebt dann: Wenn w , w' , w'' ... die Wahrscheinlichkeiten beliebig vieler Ereignisse sind, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des ersten *oder* des zweiten *oder* des dritten u. s. w. gleich der Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten.

Wir werden diesen Satz später auf Beobachtungsfehler anwenden, etwa in dieser Form: Bei irgend welchen Messungen sei die Wahrscheinlichkeit einem Fehler ε zu begehen $= w$, die Wahrscheinlichkeit einem Fehler ε' zu begehen $= w'$, die Wahrscheinlichkeit einen Fehler ε'' zu begehen $= w''$ u. s. w., dann ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler ε oder ε' oder ε'' u. s. w. zu begehen, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$W = w + w' + w'' + \ldots \tag{2}$$

Produkt von Wahrscheinlichkeiten.

Sind w' und w'' die Wahrscheinlichkeiten zweier von einander unabhängiger Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit W, dass beide zusammen eintreten, gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten, d. h.:

$$W = w \,.\, w' \tag{3}$$

Man denke sich hiezu zwei Urnen mit a und a' schwarzen, nebst b und b' anderen Kugeln; bei diesen Urnen sind die Wahrscheinlichkeiten für Schwarz:

$$w = \frac{a}{a+b} \text{ bezw. } w' = \frac{a'}{a'+b'}$$

Nun fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Zügen aus beiden Urnen, beidemal schwarz erscheint. Hier sind $a\,a'$ Fälle günstig, weil zu jeder Kugel a eine Kugel a' kommen kann, und möglich sind $(a+b)(a'+b')$ Fälle, es ist also: Die Wahrscheinlichkeit für Schwarz und Schwarz:

$$W = \frac{a\,a'}{(a+b)(a'+b')} \text{ oder} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a'}{a'+b'} = w \,.\, w'$$

Damit ist die oben geschriebene Gleichung (2) nachgewiesen für die dem Urnenbeispiel entsprechenden Wahrscheinlichkeiten; und ebenso wie für 2 Ereignisse gilt das Produkt auch für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von mehr als 2 Ereignissen, z. B. in der Fehlertheorie werden wir nachher eine Anwendung von folgender Form haben: Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε sei w, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε' sei w', ferner ε'' mit w'' u. s. w. Dann ist die Wahrscheinlichkeit bei 3 Beobachtungen gerade die Fehler ε , ε' , ε'' und keine anderen zu erhalten, oder allgemeiner, die Wahrscheinlichkeit bei einer Beobachtungsreihe die Fehler ε , ε' , ε'' u. s. w. zu erhalten, ausgedrückt durch das Produkt:

$$W = w \,.\, w' \,.\, w'' \ldots \tag{4}$$

Das Gesetz der grossen Zahlen. Wenn man eine Wahrscheinlichkeit aus den Ursachen a priori nicht berechnen kann, so giebt es einen Schluss aus der Häufigkeit des Vorkommens rückwärts auf die Wahrscheinlichkeit.

Wenn z. B. von 1000 geborenen Knaben nur 250 das 50ste Lebensjahr erreichen, so schliesst man daraus, dass für irgend ein heute geborenes männliches Kind die Wahrscheinlichkeit $= \frac{250}{1000}$ oder $= \frac{1}{4}$ besteht, das 50ste Lebensjahr zu erreichen.

Oder wenn bei einem Doppelnivellement unter 491 Vergleichungen 209 Vergleichung die Differenz 1^{mm} gegeben haben, und wenn andere Differenzen als 0^{mm}, 1^{mm}, 2^{mm} überhaupt nicht vorkommen können, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Differenz 1^{mm}, der Bruch $\frac{209}{491} = 0{,}43$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfswissenschaft der Methode der kleinsten Quadrate giebt *Hagen* „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung." 2. Aufl. Berlin 1867.

§ 110. Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler.

Um die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungsfehler anzuwenden, muss man voraussetzen, dass die Beobachtungsfehler zufällige Ereignisse in dem Sinne sind, wie am Anfang des vorigen § 109. auseinandergesetzt wurde. (Grobe Fehler sollen ausgeschlossen sein, vgl. S. 11.)

Wir wollen weiter annehmen, man habe sich eine längere Reihe von Beobachtungsfehlern verschafft. Es ist allerdings oft schwer, wahre Beobachtungsfehler kennen zu lernen, indessen giebt es doch manche Wahrnehmungen, welche zwar nicht reine Fehler sind, aber doch völlig deren Charakter haben, z. B. die Dreieckswidersprüche von Triangulierungen (vgl. S. 12) oder die Differenzen von Doppelmessungen u. s. w.

oder man begnügt sich, statt wahrer Fehler mit scheinbaren Fehlern, z. B. den Differenzen einer grossen Zahl gleichartiger Messungen einer Grösse und deren arithmetischem Mittel (vgl. S. 23).

Wir wollen dabei annehmen, die Beobachtungen seien von einseitigen Fehlerwirkungen frei, und deswegen sei die Verteilung der Fehler nach der positiven und negativen Seite nahezu gleich.

Wenn man nun solche Fehler nach ihrer *Grösse* ordnet, so macht man die Erfahrung, dass die Verteilung derselben einem gewissen Gesetz folgt, dessen Erforschung nun unsere Aufgabe ist. Man findet, dass kleine Fehler häufiger sind als grosse, und dass namentlich um den Wert Null sich die Fehler häufen, während grössere Fehler, welche das zwei- bis dreifache des mittleren Fehlers übersteigen, sehr selten vorkommen.

Schon die geringe Zahl von 18 Beobachtungen, welche wir früher in § 7. S. 23 behandelt haben, zeigt dieses; man hat nämlich 10 positive und 8 negative Fehler; und wenn man ohne Rücksicht auf das Vorzeichen nach der Grösse ordnet, so erhält man folgende Reihe:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 0{,}10'' & 0{,}12'' & 0{,}12'' & 0{,}13'' & 0{,}30'' & 0{,}38'' & 0{,}62'' & 0{,}83'' & 1{,}12'' \\ 1{,}13 & 1{,}17 & 1{,}27 & 1{,}38 & 1{,}63 & 1{,}71 & 2{,}09 & 2{,}63 & 4{,}62 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Verteilung nach der Grösse giebt

zwischen	0″	und 1″	...	8	Fehler
„	1″	„ 2″	...	7	„
„	2″	„ 3″	...	2	„
„	3″	„ 4″	...	0	„
„	4″	„ 5″	...	1	„
			Summe	18	Fehler.

Es ist ganz augenscheinlich, dass kleine Fehler häufiger sind als grosse, denn z. B. zwischen 0″ und 1″ haben wir 8 Fälle, dagegen zwischen 4″ und 5″ nur 1 Fall.

Da ähnliche Erfahrungen bei allen längeren Beobachtungsreihen gemacht wurden, hat man allgemein geschlossen, dass die Häufigkeit des Vorkommens oder die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von der Grösse des Fehlers abhängig sei.

In der vorstehenden kleinen Reihe haben wir z. B. 8 Fehler zwischen 0″ und 1″, und da im Ganzen 18 Fehler vorliegen, können wir sagen, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen 0″ und 1″ sei = 8 : 18, oder indem wir alle Fehler zwischen 0″ und 1″ mit ihrem Mittelwerte 0,5″ in Rechnung nehmen, können wir näherungsweise auch sagen:

$$W\,(0{,}5'') = \frac{8}{18} = 0{,}444\ldots$$

d. h. in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von ungefähr 0,5″ zu begehen = 0,44 ...

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber offenbar nicht bloss abhängig von der Grösse des Fehlers, (in diesem Falle 0,5″), sondern auch von dem *Intervall* innerhalb dessen der Mittelwert 0,5″ gelten soll; dieses Intervall war im vorigen Falle 1″, und würde man dieses Intervall enger genommen haben, etwa halb so gross, so dass 0,5″ nur zwischen 0,25 und 0,75 gerechnet würde, so würde man nur noch 3 Fälle gefunden haben und die Wahrscheinlichkeit würde $W\,(0{,}5'') = 3 : 18$. Bei einer grossen Zahl von Fehlern und engen Intervallen wird man wohl annehmen dürfen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers *proportional* der Grösse des Intervalls ist, innerhalb dessen er gerechnet wird.

Indem wir nun das Ergebnis dieser Betrachtungen in die Formen der Analysis bringen wollen, bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε durch $W(\varepsilon)$ und da diese Wahrscheinlichkeit abhängig sein soll von der Grösse von ε, was analytisch durch eine Funktion von ε etwa $\varphi(\varepsilon)$ ausgedrückt sei, und da ferner die Wahrscheinlichkeit proportional dem Intervall sein muss, das mit $d\varepsilon$ bezeichnet sein soll, müssen wir setzen:

$$\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion: } \varphi(\varepsilon) \tag{2}$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit: } W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{3}$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε mit dem Intervall $d\varepsilon$, also z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler ε liege zwischen den Grenzen

$$\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$$

oder auch $\varepsilon - d\varepsilon$ und ε

„ „ ε und $\varepsilon + d\varepsilon$.

Je enger man die Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ zusammenzieht, um so kleiner wird $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und nimmt man $d\varepsilon$ unendlich klein, so wird auch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ d. h. die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Fehler ε zu begehen, unendlich klein. Wir machen die Annahme, es sei $d\varepsilon$ unendlich klein, im Sinne der Differentialrechnung und damit können wir die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen irgend welchen Grenzen nach dem Satz von der Summe der Wahrscheinlichkeiten § 109. S. 424 bestimmen.

Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε gegeben durch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und für einen Fehler ε' durch $\varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon$, ebenso für ε'' durch $(\varphi\, \varepsilon'')\, d\varepsilon$ und denkt man sich die Fehler $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$ je mit dem Intervall $d\varepsilon$ an einander gereiht, so ist die Wahrscheinlichkeit irgend *einen* Fehler aus dieser Reihe zu treffen, gleich der Wahrscheinlichkeit, entweder den Fehler ε *oder* den Fehler ε' *oder* den Fehler ε'' u. s. f. zu treffen, d. h. nach dem Satze (2) S. 424 ist es die Summe aller dieser Einzelwahrscheinlichkeiten und endlich wenn $d\varepsilon$ unendlich klein ist, tritt an die Stelle der Summe das bestimmte Integral, und wir können daher nun sagen, die Wahrscheinlichkeit einen Fehler zwischen gegebenen Grenzen a und b zu begehen, ist:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{5}$$

§ 111. Fehler-Wahrscheinlichkeits-Funktion.

Um zur Bestimmung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zu gelangen, betrachten wir zuerst die Grenzwerte von ε.

Wie schon bei der Beobachtungsreihe (1) § 110. S. 426 angegeben wurde, hat die Erfahrung gezeigt, dass kleine Fehler wahrscheinlicher sind als grössere, woraus wir schliessen, dass die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 0$ ihr Maximum haben muss, d. h.:

$$\varphi(0) = \text{Maximum} \tag{1}$$

Ausser der unteren Grenze $\varepsilon = 0$ betrachten wir die obere Grenze. Ohne Zweifel giebt es für jede Beobachtungsart eine gewisse Grenze, welche von den Fehlern nicht überschritten werden kann; da aber diese Grenze sich nicht allgemein angeben lässt, wird in der allgemeinen Fehlertheorie die denkbar äusserste Grenze, nämlich Unendlich, angenommen, und zwar nach beiden Seiten, $-\infty$ und $+\infty$.

Für diese Grenzen muss die Fehlerwahrscheinlichkeit gleich Null werden, also:

$$\varphi(\pm\infty) = 0 \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liege, ist die Gewissheit $= 1$; wenn man also in der Gleichung (5) am Schlusse des vorigen § 110. S. 427 $a = -\infty$ und $b = +\infty$ setzt, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \tag{3}$$

Als zweite Bedingung, welcher die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ genügen soll, nehmen wir an, es soll dieselbe so beschaffen sein, dass, ihr zu Folge, das arithmetische Mittel mehrerer gleich genauer Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse ist. Wenn also mehrere Beobachtungen einer Unbekannten die Werte $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ gegeben haben, und man nimmt an, es sei x der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten, so muss man damit auch annehmen, dass folgende Fehler als wahrscheinlichste begangen wurden:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = x - l_1 \\ \varepsilon_2 = x - l_2 \\ \varepsilon_3 = x - l_3 \\ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Nun soll die Wahrscheinlichkeit von x und damit die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \ldots$ ein Maximum werden. Diese letztere Wahrscheinlichkeit haben wir bereits in dem Satze von dem Produkt von Wahrscheinlichkeiten bei (4) § 109. S. 425 behandelt; wir wissen von dort, dass diese Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ ist, d. h.:

$$W(x) = \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon \,.\, \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon \,.\, \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon \ldots \; = \text{Maximum}.$$

Da man das Maximum eines Produktes bequemer in logarithmischer Form behandelt, bilden wir hieraus:

$$\log\varphi(\varepsilon_1) + \log\varphi(\varepsilon_2) + \log\varphi(\varepsilon_3) + \ldots \; = \text{Maximum}.$$

Das Maximum soll in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x erzielt werden, man müsste also die vorstehende Logarithmen-Summe nach x differentiieren, da aber wegen (4) auch $dx = d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 \ldots$ ist, schreiben wir nun:

$$\frac{d \log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} + \frac{d \log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} + \frac{d \log\varphi(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3} + \ldots \; = 0 \tag{5}$$

Da die ε nach (4) einem arithmetischen Mittel x angehören, muss ihre Summe $=$ Null sein, d. h.:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots \; = 0 \tag{6}$$

Diese Gleichung (6) und die vorhergehende (5) können für beliebig viele ε (mehr als zwei) nur dann allgemein zusammen bestehen, wenn folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{d \log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = k\,\varepsilon_1 \quad , \quad \frac{d \log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} = k\,\varepsilon_2 \quad , \quad \frac{d \log\varphi(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3} = k\,\varepsilon_3 \ldots$$

oder es muss allgemein gültig sein:

$$\frac{d \log \varphi(\varepsilon)}{d \varepsilon} = k \varepsilon$$

oder integriert:

$$\log \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2 + C$$

wobei C Integrations-Konstante ist. Wenn *log* natürliche Logarithmen mit der Basis e bedeutet, so folgt hieraus:

$$\varphi(\varepsilon) = e^{\left(\frac{1}{2} k \varepsilon^2 + C\right)} = e^{C} e^{\frac{1}{2} k \varepsilon^2}$$

Die Konstante k muss notwendig negativ sein, weil nach (1) die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 0$ ihren grössten Wert hat, und von da an immer abnimmt, wir schreiben daher:

$$\frac{1}{2} k = -h^2$$

Zugleich können wir die Integrations-Konstante e^C kürzer $= A$ bezeichnen und haben daher:

$$\varphi(\varepsilon) = A\, e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{7}$$

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Integrations-Konstanten A; wozu die noch unbenützte Bedingung (3) für das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ dient, nämlich:

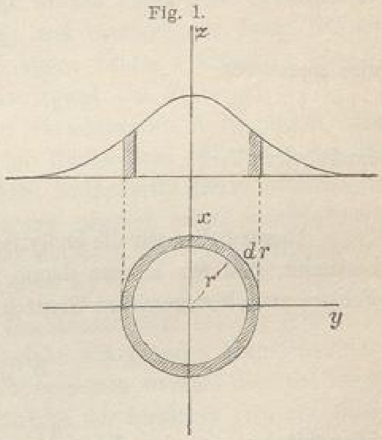
$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 1$$

mit $h \varepsilon = t$, also $d \varepsilon = \frac{d t}{h}$, was die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ unverändert lässt, wird dieses:

$$\frac{A}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d t = 1 \tag{8}$$

Um dieses bestimmte Integral auszuwerten, nehmen wir eine geometrische Betrachtung zu Hilfe:

Fig. 1.



Durch Fig. 1. sei eine Umdrehungsfläche dargestellt, deren Gleichung ist:

$$z = e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{oder} \quad z = e^{-r^2} \tag{6}$$

Um das Volumen zu bestimmen, welches zwischen der krummen Fläche und der $x\,y$ Ebene sich befindet, schlagen wir zwei verschiedene Wege ein:

Erstens giebt die Zerlegung nach $d\,x$ und $d\,y$ das Flächendifferential:

$$d\,V = d\,x\,d\,y\,z$$

also

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{-(x^2+y^2)} d\,x\,d\,y = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{-x^2} e^{-y^2} d\,x\,d\,y$$

wobei die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ sich auf beide Integrationen beziehen.

Indem man zuerst nach x und dann nach y integriert, hat man:

$$V = \int e^{-x^2}\left(\int e^{-y^2} d\,y\right) d\,x \quad \text{oder} \quad V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} d\,x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} d\,y$$

Da in einem bestimmten Integral die Bezeichnung der ursprünglichen Veränderlichen mit x, y oder t unwesentlich ist, können wir dafür auch schreiben:

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d\,t\right)^2 \tag{9}$$

Zweitens kann man auch eine Zerlegung nach Cylinder-Elementen vornehmen und hiezu ist nach Fig. 1. S. 429 die Kreisringfläche in der $x\,y$ Ebene $= 2\,r\,\pi\,d\,r$, also das Volumen eines Hohlcylinders vom Halbmesser r, der Dicke $d\,r$ und der Höhe z:

$$d\,V' = 2\,r\,\pi\,d\,r\,z = 2\,r\,\pi\,d\,r\,e^{-r^2}$$

daraus das Gesamt-Volumen:

$$V = \int d\,V' = 2\,\pi \int_0^\infty r\,e^{-r^2} d\,r \tag{9a}$$

Hier ist das allgemeine Integral:

$$\int r\,e^{-r^2} d\,r = -\frac{1}{2} e^{-r^2}$$

es lässt sich also auch das bestimmte Integral angeben, nämlich mit der oberen Grenze $r = \infty$ und der unteren Grenze $r = 0$:

$$\int_0^\infty r\,e^{-r^2} d\,r = \left(-0 - (-\frac{1}{2})\right) = +\frac{1}{2} \tag{10}$$

folglich wegen (9 a):

$$V = \pi \tag{10a}$$

Die Vergleichung von (9) und (10a) giebt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d\,t = \sqrt{\pi} \tag{11}$$

also wegen (8):

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \tag{12}$$

damit wird (7):

$$\varphi\,(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{13}$$

Damit haben wir die analytische Form der gesuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion bestimmt, und wir können damit auch die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen gewissen Grenzen a und b angeben, nämlich nach (5) § 110. S. 427:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon$$

oder mit $h\,\varepsilon = t$, also $d\,\varepsilon = \frac{d\,t}{h}$, wodurch die Grenzen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ in $t = a\,h$ und $t = b\,h$ übergehen:

$$W\binom{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\,h}^{b\,h} e^{-t^2} d\,t \tag{14}$$

In unseren Schlussformeln (13) und (14) ist noch eine Konstante h geblieben, welche nicht wie die Integrations-Konstante A durch irgend welche Nebenbedingung allgemein bestimmt werden kann, sondern in den allgemeinen Formeln als eine Art Parameter bleiben muss. Diese Konstante h hängt nämlich von der Art der jeweiligen Beobachtung, d. h. von der *Genauigkeit* ab, und es ist auch an sich ganz begreiflich, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε durchaus nicht bloss von der Grösse ε (und dem Intervall $d\,\varepsilon$) allein abhängen kann, sondern auch auf die Genauigkeit der Messungsart Rücksicht nehmen muss. Die Konstante h, welche in der angedeuteten Weise von der Genauigkeit abhängt, nennt man die Genauigkeitszahl.

Bestimmung der Konstanten h.

Bei einer Beobachtungsart, welche die Genauigkeit h hat, sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Fehler $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ entstehen, bzw. die folgenden:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_1^2} d\,\varepsilon\ ,\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_2^2} d\,\varepsilon\ ,\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_3^2} d\,\varepsilon \quad \text{u. s. w.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, diese sämtlichen Fehler ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$ bei einer Beobachtungsreihe zusammen zu erhalten, ist nach (4) § 109. S. 425 das Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten. Diese Wahrscheinlichkeit ist also bei n Beobachtungen proportional dem Ausdruck:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 \varepsilon_1^2 - h^2 \varepsilon_2^2 - h^2 \varepsilon_3^2 - \ldots}$$

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon^2]} \qquad (15)$$

wobei, wie sonst, mit $[\varepsilon^2]$ die Summe $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \ldots$ bezeichnet ist.

Um hieraus h zu bestimmen, ist eine Schlussfolge der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden in dieser Weise:

Das Fehlersystem ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$ ist erzeugt worden durch eine Beobachtungsart mit der Genauigkeitszahl h, welche als Ursache und massgebende Norm bei der Erzeugung der Fehler ε zu betrachten ist, so dass kleine Fehler ε auf einen grossen Wert h hindeuten und umgekehrt. Indessen kann irgend ein System $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$, da hier der Zufall mitspielt, möglicherweise von verschiedenen h herrühren, und namentlich wenn nur wenige ε vorliegen, wird der Rückschluss von den ε auf das wirksam gewesene h ein unsicherer sein. Der leitende Gedanke für diesen Rückschluss besteht darin, dass stets einem solchen h der Vorzug gegeben wird, welches mehr befähigt ist, oder an sich mehr Wahrscheinlichkeit darbietet für die Erzeugung des vorliegenden Fehlersystems $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ als ein anderes h.

Man hat also anzunehmen, dass eine solche Beobachtungsart bei der Erzeugung eines Fehlersystems $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ vorgelegen hat, welche mit grösster Wahrscheinlichkeit dieses Fehlersystem erzeugt; oder es muss angenommen werden, dass die Beobachtungen eine solche Genauigkeit h hatten, für welche der Ausdruck (15) ein Maximum wird, und man bestimmt h aus der Gleichung:

$$\frac{d\,W}{d\,h} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon^2]}}{d\,h} = 0$$

Die Ausführung dieser Differentiierung giebt, mit Weglassung des konstanten Nenners $\sqrt{\pi^n}$:

$$0 = \frac{d\left(h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}\right)}{d\,h} = n\,h^{n-1} e^{-h^2[\varepsilon^2]} + h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}(-2\,h\,[\varepsilon^2])$$

$$0 = h^{n-1} e^{h^2[\varepsilon^2]}\left(n - 2\,h^2\,[\varepsilon^2]\right)$$

Dieses Produkt kann nur = Null werden, wenn der Faktor in der Klammer = Null wird, also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{1}{2\,h^2} \tag{16}$$

Der hier zum Vorschein kommende Mittelwert $\frac{[\varepsilon^2]}{n}$ ist nichts anderes, als das Quadrat des uns schon längst bekannten mittleren Fehlers m, es ist also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2\,h^2}$$

$$\text{also } m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \text{ oder } h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \tag{17}$$

Setzt man dieses in (13) ein, so erhält man

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\,m^2}} \tag{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε ist:

$$W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon = \frac{1}{m\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\,m^2}} d\,\varepsilon \tag{19}$$

Nun wollen wir noch einführen:

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \quad \text{und} \quad \frac{d\,\varepsilon}{m} = d\,x \tag{20}$$

d. h. wir zählen die Fehler als Verhältniszahlen $\varepsilon : m$ oder in Einheiten des mittleren Fehlers m; damit wird:

$$W(\varepsilon) = W(m\,x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} d\,x \tag{21}$$

$$\text{oder } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{22}$$

Es ist für die Übersicht und auch sachlich am besten, alle weiteren Entwicklungen und Berechnungen in dieser letzten Form mit $\frac{\varepsilon}{m} = x$ zu führen, wobei also x eine reine Zahl und auch $\varphi(x)$ eine reine Zahl ist; indessen haben wir in Folgendem diese Form nur teilweise angewendet und sonst ε selbst nebst h eingeführt, um den Anschluss unserer Berechnungen an die seit *Gauss* üblichen Formen nicht zu verlieren (und zum Teil wegen der typographischen Schwierigkeiten der Formen (18)—(21)).

§ 112. Reihen-Entwicklungen und Fehlerkurven.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist nach (13) § 111. S. 430:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\,\varepsilon^2} \tag{1}$$

Diese Funktion kann man für irgend welche Werte von h und von ε geradezu ausrechnen, und zwar logarithmisch, da $\log e = \log 2{,}71828\ldots = 0.4342945\ldots = \mu$ und $\log \sqrt{\pi} = 0.2485749$ ist:

$$\log \varphi(\varepsilon) = 9.7514251 + \log h - \mu h^2 \varepsilon^2 \tag{2}$$

Hiernach sind folgende Zahlenwerte berechnet:

ε	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 1$	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 2$	ε	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 1$	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 2$
0,0	0,56419	1,12838	1,0	0,20755	0,02067
0,1	0,55858	0,08413	1,1	0,16824	0,00892
0,2	0,54207	0,96514	1,2	0,13367	0,00356
0,3	0,51563	0,78724	1,3	0,10410	0,00131
0,4	0,48077	0,59499	1,4	0,07947	0,00044
0,5	0,43939	0,41511	1,5	0,04946	0,00014
0,6	0,39362	0,26734	1,6	0,04361	0,00004
0,7	0,34564	0,15894	1,7	0,03136	0,00001
0,8	0,29749	0,08723	1,8	0,02210	0,000003
0,9	0,25098	0,04419	1,9	0,01526	0,0000006
1,0	0,20755	0,02067	2,0	0,01033	0,0000001
			3,0	0,00007	0,0 . . .
			∞	0	0

Man kann eine solche Funktion auch graphisch darstellen, indem man die Werte $\varphi(\varepsilon)$ als Ordinaten zu den Werten ε als Abscissen aufträgt. Die so erhaltene Curve für $h = 1$ ist in der nachfolgenden Fig. 1. am Schlusse dieses § S. 436 gegeben.

Wir wollen auch die Integralfunktion in Zahlenwerten und graphisch darstellen, nämlich nach (14) § 111. S. 430 die Funktion

$$W\binom{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^{bh} e^{-t^2} dt \tag{3}$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen a und b, und man erhält daraus auch die Wahrscheinlichkeit für das Fallen zwischen die Grenzen $-a$ und $+a$:

$$W\binom{+a}{-a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-ah}^{+ah} e^{-t^2} dt$$

Weil aber gleich grosse positive oder negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, also die Wahrscheinlichkeiten zwischen $-a$ und Null einerseits, und Null und $+a$ andererseits, einander gleich sind, kann man hiefür setzen, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von a:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{ah} e^{-t^2} dt \tag{4}$$

Um dieses Integral auszurechnen, müssen wir eine Reihenentwicklung anwenden. Hiezu dient die Exponentialreihe:

$$\overset{x}{e} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Diese giebt mit $x = -t^2$:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \ldots$$

$$\int e^{-t^2} dt = t - \frac{t^3}{3.1!} + \frac{t^5}{5.2!} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^9}{9.4!} - \ldots$$

$$\int_0^T e^{-t^2} dt = T - \frac{T^3}{3.1!} + \frac{T^5}{5.2!} - \frac{T^7}{7.3!} + \frac{T^9}{9.4!} \qquad (5)$$

Diese Reihe (5) konvergiert für endliche Werte von T jedenfalls, denn es ist der Quotient q zweier auf einander folgender Glieder, wenn man bis $n!$ im Nenner fortgeht,:

$$q = \frac{(2n-1)\,T^2}{(2n+1)\,n}$$

Da die Reihe abwechselnd positive und negative Glieder hat, so genügt es für die Konvergenz, wenn von irgend welcher Stelle an immer $q < 1$ wird, dieses ist aber für jeden endlichen Wert von T der Fall, wenn man nur die Reihe lang genug fortsetzt.

Allerdings muss man für grössere Werte T sehr viele Glieder nehmen, um nur überhaupt an den Anfang der Konvergenz zu gelangen, doch genügt uns hier die theoretische Möglichkeit der Rechnung nach der Reihe (5).

(Im übrigen verweisen wir hiezu auf Brünnow, „Lehrbuch der sphärischen Astronomie,“ 3. Ausgabe S. 34 und Theorie der Beobachtungsfehler von Emanuel Czuber, Leipzig 1891, S. 115—120).

Aus (4) und (5) haben wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegt:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(a h - \frac{(a h)^3}{3.1!} + \frac{(a h)^5}{5.2!} - \frac{(a h)^7}{7.3!} + \frac{(a h)^9}{9.4!} - \ldots\right) \qquad (6)$$

Z. B. mit $a h = 0{,}1$ erhält man damit:

$$\left(W_0^a\right) = 1{,}12838\,(0{,}100000 - 0{,}000333 + 0{,}000001) = 0{,}112\,463$$

Folgendes sind einige Zahlenwerte für die Funktion $W\binom{a}{0}$ nach der Gleichung (6):

$a h$	$W\binom{a}{0}$	$a h$	$W\binom{a}{0}$	$a h$	$W\binom{a}{0}$	$a h$	$W\binom{a}{0}$
0,0	0,00000	1,0	0,84270	2,0	0,99532	3,0	0,99997 79
0,1	0,11246	1,1	0,88020	2,1	0,99702	3,1	0,99998 84
0,2	0,22270	1,2	0,91031	2,2	0,99814	3,2	0,99999 40
0,3	0,32863	1,3	0,93401	2,3	0,99886	3,3	0,99999 69
0,4	0,42839	1,4	0,95229	2,4	0,99931	3,4	0,99999 85
0,47694	0,5						
0,5	0,52050	1,5	0,96611	2,5	0,99959	3,5	0,99999 26
0,6	0,60386	1,6	0,97635	2,6	0,99976	3,6	0,99999 96
0,7	0,67780	1,7	0,98379	2,7	0,99987	3,7	0,99999 98
0,8	0,74210	1,8	0,98909	2,8	0,99992	3,8	0,99999 99
0,9	0,79691	1,9	0,99279	2,9	0,99996	∞	1,0

Eine ausführlichere Tafel dieser Art gab *Encke* im „Berliner astron. Jahrbuch für 1834", S. 305—308 und *Czuber*, „Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891", S. 121 und S. 411—413 und *Ferrero*, espositione del metodo dei minimi quadrati, Firenze 1876", S. 223—225.

In der vorstehenden kleinen Tafel haben wir einen Wert $a\,h = 0{,}47694$ besonders hervorgehoben, es ist derjenige, welcher zu $W\binom{a}{0} = \frac{1}{2}$ gehört. Mit diesem Werte 0,47694 oder genauer 0,4769363 ... werden wir uns im nächsten § 113. ausführlicher beschäftigen; inzwischen ist von demselben nur so viel zu sagen, dass er in die Reihe (6) eingesetzt, wie jeder andere das zugehörige $W\binom{a}{0}$ zu berechnen gestattet, und zwar wird die Ausrechnung hiefür $W\binom{a}{0} = 0{,}50000$ geben.

Führt man im Vorstehenden statt der Genauigkeitszahl h den mittleren Fehler m ein, nämlich nach (17) § 111. S. 432.

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \quad \text{also} \quad a\,h = \frac{a}{m\sqrt{2}}$$

so bekommt man:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^3 \frac{1}{3\,.\,1!} + \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^5 \frac{1}{5\,.\,2!} - \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^7 \frac{1}{7\,.\,3!} + \ldots\right) \quad (7)$$

Dieses ist nur eine andere Form für (6); wenn man jedoch den Nenner $\sqrt{2}$ absondert und damit das Verhältnis $\frac{a}{m}$ als Veränderliche herstellt, so erhält man noch eine etwas andere Form:

$$W\binom{a}{0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left(\frac{a}{m}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{m}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{a}{m}\right)^5 - \frac{1}{336}\left(\frac{a}{m}\right)^7 + \frac{1}{3456}\left(\frac{a}{m}\right)^9 - \ldots\right) \quad (8)$$

Oder indem man das Verhältnis $\frac{a}{m} = n$ setzt, kann man dasselbe auch noch so schreiben:

$$W\binom{n\,m}{0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{40} - \frac{n^7}{336} + \frac{n^9}{3456} - \ldots\right) \quad (9)$$

Oder es ist dieses die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den n fachen mittleren Fehler, als Funktion von n.

Hiernach ist unsere Tafel im Anhange S. [21] berechnet.

Graphische Darstellungen.

Die nachstehende Fig. 1. giebt Kurven für die Funktionen (1), (2) und (6), (8) nebst einer Kurve für $W^{n\,r}_{\;0}$, von welcher erst in § 113. beim wahrscheinlichen Fehler die Rede sein wird, in (6) S. 439.

Die mit $\varphi(\varepsilon)$ bezeichnete Kurve entspricht der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ und der zugehörigen Tabelle auf S. 433 mit $h = 1$.

Die Kurve W entspricht der Funktion (6) oder (8) mit der Tabelle auf S. 434, wobei wieder $h = 1$ angenommen ist.

Die graphische Darstellung führt weiter zu folgenden geometrischen Betrachtungen:

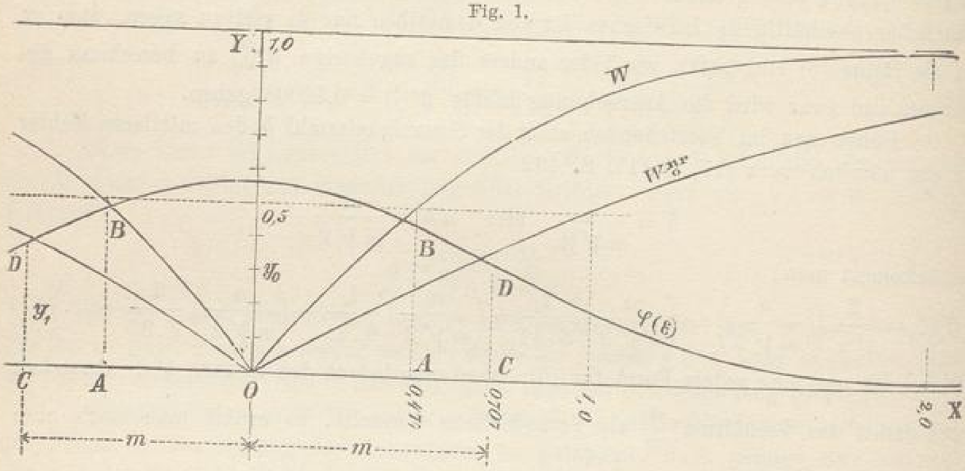
Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε, oder genauer, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\,\varepsilon$ liegt, ist:

$$W = \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon$$

und die geometrische Darstellung hievon ist ein schmales, unendlich kleines Rechteck, dessen Höhe gleich der Ordinate $= \varphi(\varepsilon)$ der ersten Kurve, und dessen Breite $= d\,\varepsilon$ in der Richtung $O\,X$ gemessen ist. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon \tag{10}$$

Fig. 1.



Dieses ist geometrisch dargestellt durch eine Fläche, welche begrenzt ist durch die Abscissenaxe, durch die Kurve $\varphi(\varepsilon)$ selbst und durch die zwei Ordinaten, welche zu den Abscissen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ gehören. Z. B. ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $\varepsilon = 0{,}477$ und $\varepsilon = 0{,}707$ liegt, in Fig. 1. dargestellt durch die Fläche $A\,C\,D\,B$.

Die Gesamtfläche zwischen der Abscissenaxe (Asymptote) und der Kurve $\varphi(\varepsilon)$ ist $= 1$, was der Gleichung (3) § 111. S. 428 entspricht, nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon \quad \text{oder} \quad 2\int^{\infty} \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon = 1 \tag{11}$$

Wendepunkt der Kurve $\varphi(\varepsilon)$.

Noch eine merkwürdige Beziehung besteht zwischen dem Wendepunkt der Kurve $\varphi(\varepsilon)$ und dem mittleren Fehler m, es ist nämlich die Abscisse dieses Wendepunktes gleich dem mittleren Fehler.

Im Wendepunkt einer Kurve ist bekanntlich der zweite Differentialquotient $=$ Null. Man hat also:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{12}$$

$$\frac{d\,\varphi(\varepsilon)}{d\,\varepsilon} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}\left(-2\,h^2\,\varepsilon\right) = -\frac{2\,h^3}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon\,e^{-h^2\varepsilon^2}$$

$$\frac{d^2\,\varphi(\varepsilon)}{d\,\varepsilon^2} = -\frac{2\,h^3}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-h^2\varepsilon^2} - \varepsilon\,e^{-h^2\varepsilon^2}\,.\,2\,h^2\,\varepsilon\right\}$$

Dieses kann nur dadurch Null werden, dass die Klammer = Null gesetzt wird, woraus folgt:

$$1 - 2\,h^2\,\varepsilon^2 = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} \tag{13}$$

Nach (17) § 111. S. 432 ist dieses = m; es ist also derjenige besondere Wert von ε, welcher die zweite Ableitung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zum Verschwinden bringt, gleich dem mittleren Fehler m. Oder in Fig. 1. ist $O\,C = m$ für den Wendepunkt D, und insbesondere mit $h = 1$ wird $O\,C = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist.

Fehlerfunktion für $m = 1$.

In der Tabelle S. 433 und in der zugehörigen Kurve Fig. 1. S. 436 ist die zuerst sich darbietende einfache Annahme gemacht $h = 1$ oder $h = 2$, indessen ist das zwar mathematisch einfach, aber im Sinne der Fehler-Anschaulichkeit nicht nützlich; in letzterem Sinne ist es besser, alles auf den mittleren Fehler $m = 1$ zu reduzieren, wie wir schon am Schlusse von § 111. S. 432 angedeutet haben mit der Bezeichnung:

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \tag{14}$$

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{15}$$

$$x = 0 \text{ giebt} \qquad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}39894 \tag{16}$$

$$x = 1, \text{ oder } \varepsilon = m \text{ giebt } \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2e\pi}} = 0{,}24197 \tag{17}$$

und die übrige Ausrechnung giebt:

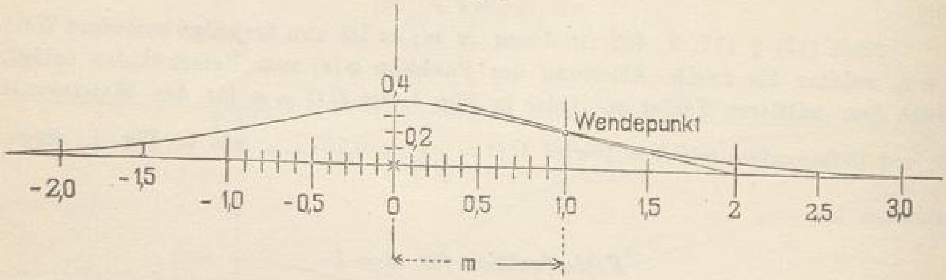
$$\log\,y = 9{,}6009106 - 0{,}21714724\,x^2$$

wonach folgende Tabelle berechnet wurde:

$\frac{\varepsilon}{m} = x$	$\varphi(x)$	$\frac{\varepsilon}{m} = x$	$\varphi(x)$
0,0	0,39894	0,7	0,31225
0,1	0,39695	0,8	0,28969
0,2	0,39104	0,9	0,26609
0,3	0,38139	1,0	0,24197
0,4	0,36827	1,5	0,12951
0,5	0,35206	2,0	0,05399
0,6	0,33322	3,0	0,00443
0,7	0,31225	∞	0,00000

Hiernach ist die folgende Fig. 2. aufgetragen, welche im Vergleich mit der früheren verzerrten Fig. 1. S. 436 nun die Fehlerfunktion sozusagen in natürlichen Verhältnissen darstellt. (Die Wendepunkts-Tangente ist leider im Holzschnitt schlecht ausgefallen.)

Fig. 2.



§ 113. Der wahrscheinliche Fehler.

Der besondere Wert $W\binom{a}{0} = 0{,}5$, welcher im vorigen § 112. bei der Tabelle von S. 434 betrachtet wurde, führt zur Einführung eines neuen Begriffs, nämlich des wahrscheinlichen Fehlers.

Wenn nämlich die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen 0 und a den Wert 0,5 hat, so muss die Wahrscheinlichkeit für das Fallen zwischen die Grenzen a und ∞ ebenfalls $= 0{,}5$ sein, weil für das Fallen zwischen die äussersten Grenzen 0 und ∞ die Gesamtwahrscheinlichkeit $= 1$ ist. Bezeichnen wir also den besonderen Wert von a, für welchen dieses stattfindet, mit r, so haben wir:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = W\binom{\infty}{r}$$

Der dadurch bestimmte Wert r heisst der „*wahrscheinliche Fehler*". Derselbe stellt die Grenze vor, unter welcher ebenso viele kleinere Fehler zu erwarten sind, als grössere über ihr.

Der wahrscheinliche Fehler r wird mit Hilfe der Reihe (6) § 112. S. 434 dadurch bestimmt, dass jene Reihe den Wert $= \frac{1}{2}$ geben muss, wenn $a = r$ wird, d. h.:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(r\,h - \frac{(r\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(r\,h)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(r\,h)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(r\,h)^9}{9\,.\,4!} - \cdots\right) \tag{1}$$

da r hier immer zusammen mit h vorkommt, wird das Produkt $r\,h$ besonders bezeichnet, nämlich:

$$r\,h = \varrho \tag{2}$$

und damit giebt vorstehende Gleichung folgende Bestimmung für ϱ:

$$\varrho - \frac{\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^5}{10} - \frac{\varrho^7}{42} + \frac{\varrho^9}{216} - \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots$$

Um diese Gleichung nach ϱ aufzulösen, hat man in erster Näherung:

$$\varrho = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots \quad = p$$

wobei lediglich zur Abkürzung vorübergehend das Zeichen p eingeführt ist. Indem dann auch in erster Näherung $\varrho^3 = p^3$ gesetzt wird, hat man in zweiter Näherung:

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3}$$

weiter $\varrho^3 = p^3 + 3\,p^2\,\frac{p^3}{3} + \ldots \quad = p^3 + p^5$ und $\varrho^5 = p^5 + \ldots$

also

$$\varrho - \left(\frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{3}\right) + \frac{p^5}{10} = p$$

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3} + \frac{7}{30}\,p^5 + \ldots$$

So fortfahrend erhält man in nächster Näherungsstufe:

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3} + \frac{7}{30}\,p^5 + \frac{127}{630}\,p^7 + \ldots$$

$$\varrho = 0{,}4431 + 0{,}0290 + 0{,}0040 + 0{,}0007$$

$$\varrho = 0{,}4768$$

Durch solche und ähnliche Näherungen, wozu namentlich auch die Benützung einer ausführlichen Tafel von der Art von § 112. S. 434 gehört, kann man den Wert ϱ mit beliebig weit getriebener Näherung berechnen. Nach Angabe von Gauss ist der Wert:

$$r\,h = \varrho = 0{,}476\,9363 \qquad log\,\varrho = 9.678\,4064 \tag{3}$$

(nach Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, Tübingen 1816 S. 194).

Nachdem somit der Zahlenwert von ϱ genau bestimmt ist, verfolgen wir die Bedeutung desselben weiter und nehmen nochmals die Gleichung (2) vor, nämlich:

$$r\,h = \varrho \quad \text{oder} \quad h = \frac{\varrho}{r} \tag{4}$$

Man sieht hieraus, dass h umgekehrt proportional dem wahrscheinlichen Fehler r ist; man nennt deswegen h die *Genauigkeitszahl.* Setzt man $h = 1$, so wird $r = \varrho$, d. h. es ist ϱ der wahrscheinliche Fehler für die Genauigkeitszahl 1.

Durch Einführung von $\frac{\varrho}{r}$ an Stelle von h in die Reihe (6) § 112. S. 434 kann man dieselbe auf eine mehr anschauliche Form bringen. Es wird damit:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{r}\,\varrho - \frac{1}{3\,.\,1!}\left(\frac{a}{r}\,\varrho\right)^3 + \frac{1}{5\,.\,2!}\left(\frac{a}{r}\,\varrho\right)^5 - \frac{1}{7\,.\,3!}\left(\frac{a}{r}\,\varrho\right)^7 + \frac{1}{9\,.\,4!}\left(\frac{a}{r}\,\varrho\right)^9 - \ldots\right) \tag{5}$$

Das Verhältnis $\frac{a}{r}$ irgend eines Fehlers a zum wahrscheinlichen Fehler r bezeichnen wir mit n, und entsprechend nennen wir nun $W\binom{n\,r}{0}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen 0 und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt, damit nimmt (5) folgende Form an:

$$W\binom{n\,r}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(n\,\varrho - \frac{(n\,\varrho)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(n\,\varrho)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(n\,\varrho)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(n\,\varrho)^9}{9\,.\,4!} - \frac{(n\,\varrho)^{11}}{11\,.\,5!} + \ldots\right) \tag{6}$$

oder mit Ausrechnung der Coefficienten:

$$W\binom{n\,r}{0} = 0{,}538\,1650\,n - 0{,}040\,8051\,n^3 + 0{,}002\,7846\,n^5 - 0{,}000\,1508\,n^7$$
$$+ 0{,}000\,0067\,n^9 - 0{,}000\,0002\,n^{11} + \ldots \tag{7}$$

Eine Kontrolle dieser Gleichung besteht für den besonderen Fall $n = 1$, denn mit $n = 1$ muss sie den Wert 0,5 geben, was bis auf 7 Decimalstellen hinreichend der Fall ist.

Folgendes sind die genaueren Coefficienten-Logarithmen für die Formel (7):

$$[9.730\,9154]\,n - [8.610\,7149]\,n^3 + [7.444\,7570]\,n^5 - [6.178\,428]\,n^7$$
$$+ [4.824\,14]\,n^9 - [3.3949]\,n^{11} + \ldots \tag{8}$$

Im Anhang S. [20] haben wir eine Tafel der Funktionswerte (6), (7) zusammengestellt, d. h. der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen Null und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt. Diese Tafel ist aus der Tafel II von Encke im Berl. astr. Jahrb. 1834, S. 309—312 mit Weglassung der 5ten Decimale gebildet. Ein Teil der Tafelwerte wurde direkt nach den Formeln (6) und (7) nachgerechnet, und einzelne Werte nach der Bessel schen Originaltafel in dem Werk fundamenta astronomiae S. 36 und 37 bestimmt.

Die Encke sche Tafel ist auch abgedruckt und erläutert von Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 414—416 und S. 189.

Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittleren Fehler.

Wenn man die vorstehende Gleichung (4) mit der früheren Gleichung (17) § 111. S. 432 verbindet, so hat man

$$r\,h = \varrho \quad \text{und} \quad \frac{1}{h} = m\sqrt{2}$$

also

$$r = \varrho\sqrt{2}\,m \tag{9}$$

Dabei ist $\varrho\sqrt{2}$ ein konstanter Faktor, dessen Ausrechnung giebt:

$$\varrho\sqrt{2} = 0{,}674\,4898 \qquad \log \varrho\sqrt{2} = 9.828\,9754 \tag{10}$$

Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch Abzählen.

Hat man sich eine grössere Zahl gleichartiger wahrer Beobachtungsfehler auf irgend welche Art verschafft, und ordnet dieselben nach ihrer absoluten Grösse, so kann man denjenigen Grenzwert als wahrscheinlichen Fehler nehmen, welcher die Fehlerreihe so teilt, dass die Werte der einen Hälfte kleiner und die der anderen Hälfte grösser als er sind. Bei einer ungeraden Zahl von Fehlern nimmt man den in die Mitte fallenden Fehler und bei einer geraden Anzahl das Mittel der beiden in die Mitte fallenden Fehler als wahrscheinlichen Fehler. Wenn man z. B. die schon mehrfach benützten 18 Werte v von § 7. S. 23 nach ihrer Grösse ordnet, wie auf S. 426 geschehen ist, so hat man:

Erste Hälfte			Mitte	Zweite Hälfte		
...	0,83	1,12	|	1,13	1,17	...

Die zwei in der Mitte liegenden Fehler sind 1,12 und 1,13, man nimmt also nach der gegebenen Regel 1,125 als wahrscheinlichen Fehler.

Offenbar ist diese Bestimmung eine sehr unsichere, denn es kommt dabei die absolute Grösse aller andern als gerade der in der Mitte liegenden Fehler nicht in Betracht. Die beste Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers ist immer diejenige nach (9), auf dem Wege über den mittleren Fehler m.

Der wahrscheinliche Fehler ist ohne das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit nicht zu bestimmen, während der mittlere Fehler ganz unabhängig von der Fehlerwahrscheinlichkeit besteht, wie aus der Einführung desselben in § 4. S. 13—15 hervorgeht. Man hat früher als charakteristisches Genauigkeitsmaass häufig (z. B. in der Astronomie) den wahrscheinlichen Fehler angegeben, in der Geodäsie meist den mittleren Fehler, nach Anweisung von Gauss selbst, welcher in dem „Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher" I. S. 435 sagt: „Die sogenannten wahrscheinlichen Fehler wünsche ich eigentlich, als von Hypothese abhängig, ganz proscribiert; man mag sie aber berechnen, indem man die mittleren Fehler mit 0,674 4897 multipliziert."

§ 114. Der durchschnittliche Fehler.

Auch dem schon in § 3. eingeführten, aber dann zurückgestellten durchschnittlichen Fehler können wir nun näher treten.

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε ist nach § 111 aus (3) S. 427 u. (13) S. 430:

$$W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\,\varepsilon$$

Unter n Fällen wird daher der Fehler ε vorkommen in der Anzahl $n\, W(\varepsilon)$ und die Summe aller Fehler von dem Betrag ε ist daher:

$$n\, W(\varepsilon)\, \varepsilon = n\, \varepsilon\, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\,\varepsilon$$

das ist nun erst die Summe derjenigen Fehler, welche die besondere Grösse ε haben, und die Summe *aller* Fehler, welche *überhaupt* auftreten, ist daher:

$$[\varepsilon] = \int n\, \varepsilon\, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\,\varepsilon$$

Hiezu ist aber noch eine Überlegung zu machen, wegen der Vorzeichen der ε und wegen der Integrations-Grenzen. Wenn $[\varepsilon]$ nur für positive ε gelten soll, so müssen die Grenzen 0 und ∞ für die Integration genommen werden und für negative ε wären die Grenzen 0 und $-\infty$. Will man die positiven ε *und* die negativen ε ohne Rücksicht auf das Vorzeichen summieren, so darf man nicht etwa die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nehmen, weil sonst das Integral = Null würde, man bekommt aber den richtigen Wert für alle $\pm\varepsilon$, wenn man das Integral zwischen 0 und ∞ nimmt und dann verdoppelt, also:

$$[\pm\varepsilon] = 2\, n\, \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\,\varepsilon$$

$$\text{oder} \qquad \frac{[\pm\varepsilon]}{n} = t = 2\, \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\,\varepsilon \tag{1}$$

Dabei ist mit t der durchschnittliche Fehler bezeichnet. Um dieses Integral auszurechnen, setzen wir $h\, \varepsilon = t$, also $\varepsilon = \frac{t}{h}$, $d\,\varepsilon = \frac{d\,t}{h}$, was die Grenzen unverändert lässt, also:

$$t = \frac{2\, h}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t\, e^{-t^2}\, d\,t \tag{2}$$

Hier ist das allgemeine Integral:

$$\int t\, e^{-t^2} d\,t = -\frac{1}{2}\, e^{-t^2} \tag{3}$$

und mit Einführung der Grenzen 0 und ∞ wird das bestimmte Integral, (ebenso wie früher bei (10) § 111. S. 430):

$$\int_0^\infty t\, e^{-t^2} d\,t = +\frac{1}{2} \tag{4}$$

dieses giebt nach (2):

$$t = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Es ist aber nach (17) § 111. S. 432:

$$\frac{1}{h} = m\sqrt{2}$$

also:

$$t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m = 0{,}79788\, m \tag{5}$$

und

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t = 1{,}2533\, t \tag{6}$$

Damit haben wir gefunden, dass der durchschnittliche Fehler t und der mittlere Fehler m in einem konstanten Verhältnis stehen, dass man also stets den einen aus dem andern berechnen kann.

Man kann davon insofern praktischen Gebrauch machen, als der durchschnittliche Fehler t bei gegebenen Elementen ε bequemer zu berechnen ist, als der mittlere Fehler m, indem man bei t das Quadrieren der ε erspart, hat man also den Durchschnittswert t berechnet, so braucht man ihn nur mit 1,2533 zu multiplizieren um auch m zu haben.

Diese Berechnung von m auf dem Umweg über t ist jedoch weniger zuverlässig, als die unmittelbare Berechnung von m aus den ε^2, und da die Quadrierung der ε bzw. der v einer Ausgleichung keine grosse Mühe ist, so hat die besprochene Berechnung von t und $m = 1{,}2533\ t$ fast nur bei flüchtigen und Überschlags-Genauigkeitsrechnungen praktische Bedeutung. Weiteres hierüber wird in § 124. verhandelt werden.

§ 115. Beziehungen zwischen dem mittleren, wahrscheinlichen und durchschnittlichen Fehler.

Nachdem im Bisherigen der wahrscheinliche und der mittlere Fehler, und dann der wahrscheinliche und der durchschnittliche Fehler zu einander in Beziehung gesetzt sind, können wir die gegenseitigen Beziehungen aller dieser 3 Fehler unter sich bilden.

Es gelten die Bezeichnungen:

Mittlerer Fehler $= m$
Wahrscheinlicher Fehler $= r$
Durchschnittlicher Fehler $= t$.

Wenn man n wahre Fehler ε hat, so ist:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \qquad t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} \tag{1}$$

Zur gegenseitigen Verwandlung von m, r und t hat man die Zahlenwerte:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varrho = 0{,}476\,9363 & log = 9.678\,4603.8 \\
r = \varrho\sqrt{2}\,m = 0{,}684\,4898\,m & log = 9.828\,9753{\cdot}8 \\
r = \varrho\sqrt{\pi}\,t = 0{,}845\,3476\,t & log = 9.927\,0353{\cdot}1 \\
m = \dfrac{1}{\varrho\sqrt{2}}\,r = 1{,}482\,6021\,r & log = 0.171\,0246{\cdot}2 \\
m = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,t = 1{,}253\,3141\,t & log = 0.098\,0599{\cdot}4 \\
t = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,m = 0{,}797\,8846\,m & log = 9{,}901\,9400{\cdot}6 \\
t = \dfrac{1}{\varrho\sqrt{\pi}}\,r = 1{,}182\,9372\,r & log = 0.072\,9616{\cdot}9
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Dabei ist $\varrho = 0{,}476\,9363$ zu Grunde gelegt nach Gauss' „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" Art. 1 (s. o. § 113. S. 439).

Hat man statt der wahren Fehler ε nur scheinbare Fehler v zur Verfügung, so rechnet man bei *einer* Unbekannten nach § 7. S. 21 oder § 11. S. 39:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-1} \quad (3)$$

und deswegen:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad (4)$$

Um auch in der Berechnung von t die scheinbaren Fehler einzuführen, dient folgende Betrachtung:

Indem man nun annimmt, dass die v demselben Fehlergesetz folgen wie die ε, kann man schliessen, dass die einzelnen ε^2 durchschnittlich im Verhältnis $n:(n-1)$ grösser sind als die entsprechenden v^2, oder dass die einzelnen ε durchschnittlich grösser sind als die entsprechenden v im Verhältnis $\sqrt{n}:\sqrt{n-1}$, folglich kann man weiter schliessen:

$$[\pm\varepsilon]:[\pm v] = \sqrt{n}:\sqrt{n-1} \quad (5)$$

Also der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm\varepsilon]}{n} = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-1)}} \quad (6)$$

und der mittlere Fehler nach (2):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t = 1{,}2533\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-1)}} \quad (7)$$

Dieses ist die Formel von *Peters*.

Bei mehr als *einer* Unbekannten, wir nehmen an bei u Unbekannten, und n Fehlergleichungen, wird nach (19) § 28. S. 87:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}} \quad (8)$$

und um eine entsprechende Formel auch für t zu erlangen, machen wir (ähnlich wie bei (5)) die Annahme zu (8):

$$\varepsilon : v = \sqrt{n}:\sqrt{n-u}$$

$$[\pm\varepsilon]:[\pm v] = \sqrt{n}:\sqrt{n-u}$$

also

$$t = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-u)}} \tag{9}$$

und der mittlere Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t = 1{,}2533 \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-u)}} \tag{10}$$

Diese Formel ist von *Lüroth.*

Bei bedingten Beobachtungen mit r Bedingungsgleichungen ist $n - u = r$ zu setzen, also nach (8) § 38. S. 116:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \tag{11}$$

und entsprechend für (10):

$$m = 1{,}25331 \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,r}} \tag{12}$$

Die Formeln (7), (9) und (12) sind die gebräuchlichsten zur Berechnung mit den ersten Potenzen v scheinbarer Fehler statt der Quadrate v^2.

Die Peters sche Formel (7) hat aber den Übelstand, dass sie für den einfachen Fall zweier Beobachtungen, also $n = 2$ mit der strengen Formel (4) nicht übereinstimmt, denn wenn man 2 Beobachtungen mit der Differenz d annimmt, dann ist nach (4) mit $n = 2$:

$$m_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}70711\, d \tag{13}$$

dagegen nach (7):

$$m_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2}}{\sqrt{2 \,.\, 1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}88623\, d \tag{14}$$

Man kann nun auf den Gedanken kommen, die Formeln (7) und (4) dadurch auf den Fall $n = 2$ zum Stimmen zu bringen, dass man in dem Nenner von (7) statt $n - 1$ einen vorerst unbestimmt gelassenen Wert $n - x$ setzt, und nachher x so bestimmt, dass für $n = 2$ beide Formeln (7) und (4) zusammen fallen. Man nimmt also zunächst nach (7):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-x)}} \tag{15}$$

und speziell für $n = 2$:

$$m_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2}}{\sqrt{2(2-x)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{\sqrt{2(2-x)}}$$

und dieses der strengen Formel (13) gleichgesetzt giebt:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(2-x)}} = 1$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst giebt:

$$x = \frac{4 - \pi}{2}$$

Setzt man dann noch näherungsweise $\pi = 3$, so wird $x = \frac{1}{2}$ und damit wird (15):

$$m = \sqrt{\pi}\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} = 1{,}77245\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} \tag{16}$$

Fechner sche Formel.

Was im Vorstehenden von (5) bis (16) mitgeteilt ist, enthält meist keine strengen Entwicklungen, sondern nur Plausibelmachung der betreffenden Formeln. Folgendes sind die näheren Quellenangaben dazu:

Die Formel (7) oder (6), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-1)}}$ wurde zuerst von Peters im 44. Band der „Astr. Nachrichten" S. 29 (1856) aufgestellt.

Die erweiterte Formel (9), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}}$ wurde von Lüroth im 73. Bd. (1869) S. 187 der „Astr. Nachrichten" gegeben.

Helmert hat diese Sache genauer behandelt in „Astr. Nachr." 85. Band (1875) S. 353—366 und 88. Band (1876) S. 113—132, und hat dabei gefunden, dass nur die Peters sche Formel (7) für *eine* Unbekannte streng richtig ist, während die Formel (10) für u Unbekannte, mit dem Nenner $\sqrt{n\,(n-u)}$ nur etwa als eine Näherungsformel zu betrachten ist.

Hier sind noch zwei Abhandlungen von Helmert zu zitieren in Schlömilchs „Zeitschr. f. M. u. Ph." 1875 S. 300—303: „Über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler" und 1876 S. 192 bis 218: „Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen."

Was endlish die Fechner sche Formel (16) betrifft, so ist dieselbe von Fechner entwickelt in Poggendorff's „Annalen der Physik", Jubelband, 1874, S. 66 bis 81, und eine kritische Untersuchung dieser Formel ist von Helmert im 88. Band der Astr. Nachrichten (1876) S. 120—127, gegeben worden. Hiernach ist die Fechner sche Formel die beste derjenigen Formeln, welche den wahrscheinlichen oder mittleren Fehler statt aus der Quadratsumme $[v^2]$, aus der absoluten Summe $[\pm v]$ der übrigbleibenden Fehler v berechnen.

Alle Formeln mit $[\pm v]$ sind von der Annahme über das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz abhängig und auch abgesehen davon weniger genau als die Formeln mit den Quadraten, nämlich Formel (3) und (8), letzteres wird allerdings erst später in § 117 bewiesen werden, mag aber jetzt schon (zusammen mit der Frage der Abhängigkeit vom Fehlergesetz) zu der Bemerkung führen, dass alle die Formeln mit $[\pm v]$ nur insofern Interesse verdienen, als man damit das Ausrechnen der Quadrate v^2, d. h. eine verhältnismässig geringe Arbeit, sparen kann. —

§ 116. Verschiedene Fehler-Potenzsummen.

Dieselbe Überlegung, welche am Anfang von § 114. zu der Formel (1) S. 441 mit der Summe $[\pm \varepsilon]$ der ersten Potenzen wahrer Fehler ε geführt hat, kann auch angewendet werden auf andere Potenzen und giebt weiter auf 2te, 4te u. s. w. Potenzen angewendet:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon \tag{1}$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^4\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon \tag{2}$$

allgemein

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^p\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon \tag{3}$$

Wir wollen hievon zunächst das quadratische Mittel nach (1) behandeln, obgleich wir hiebei nichts neues finden können (denn es muss $m^2 = m^2$ herauskommen). Zunächst wird mit $h\varepsilon = t$ aus (1):

$$m^2 = \frac{2}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt \tag{4}$$

Teilweise Integration giebt:

$$\int t\, t\, e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} t\, e^{-t^2} + \frac{1}{2} \int e^{-t^2} dt \tag{5}$$

Von (11) § 111. S. 430 wissen wir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \tag{6}$$

Wenn man daher die Grenzen 0 und ∞ in (5) einsetzt, so wird der erste Teil von (5), nämlich $\frac{t}{2} e^{-t^2} = \frac{t}{2\, e^{t^2}}$ beidemale $= 0$, was man für $t = \infty$ nötigenfalls durch Anwendung der Reihe für e^{t^2} zeigen kann; im Ganzen hat man also aus (5) und (6):

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = 0 + \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \tag{7}$$

also nach (4):

$$m^2 = \frac{2}{h^2 \sqrt{\pi}} \frac{1}{4} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\, h^2} \tag{8}$$

Nach (17) § 111. S. 432 ist dieses aber:

$$m^2 = \frac{1}{2\, h^2} = m^2 \tag{9}$$

d. h. wir haben hier nichts neues, sondern nur eine Probe unserer Entwicklung gefunden.

Um zu den 4ten Potenzen überzugehen, nehmen wir von (2) mit $\varepsilon h = t$:

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2}{h^4 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt \tag{10}$$

durch teilweises Integrieren hat man:

$$\int t^3 t\, e^{-t^2} d\, t = -\frac{t^3}{2} e^{-t^2} + \frac{3}{2} \int t^2 e^{-t^2} dt \tag{11}$$

Setzt man hier die Grenzen 0 und ∞ ein, so wird der erste Teil $t^3 e^{-t^2}$ beidemal $= 0$ (was ebenso wie oben bei (5) und (7) einzusehen ist) und der zweite Teil von (11) giebt mit den Grenzen 0 und ∞ das schon oben bei (6) gefundene Integral; man hat also im Ganzen aus (10) und (11):

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2}{h^4 \sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\pi} = \frac{3}{4\, h^4} \tag{12}$$

Mit Rücksicht auf $h^2 = 1 : 2\, m^2$ in (9) haben wir also nun die Mittelwerte der ersten, zweiten und vierten Potenzen als Zusammenfassung:

$$\frac{[\pm \varepsilon]}{n} = t = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m \tag{13}$$

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2\,h} \quad \text{"} \quad = m^2 \tag{14}$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \nu^4 = \frac{3}{4\,h^4} \quad \text{"} \quad = 3\,m^4 \tag{15}$$

In gleicher Weise kann man alle Potenzsummen auswerten, denn eine allmähliche Rekursion wie bei (11) führt bei geraden Potenzen auf das Integral (6) und bei ungeraden Potenzen auf das leicht anzugebende Integral (4) § 114. S. 442; man kann also alle beliebigen Potenzsummen allmählich auf $[\varepsilon^2]$ oder $[\pm \varepsilon]$ zurückführen.

Die allgemeine Rekursionsformel ist:

$$\frac{[\varepsilon^{p+2}]}{n} = \frac{p+1}{2\,h^2}\frac{[\varepsilon^p]}{n} \text{ oder} = (p+1)\,m^2\,\frac{[\varepsilon^p]}{n}$$

Der allgemeine Ausdruck für die p^{ten} Potenzen wird:

wenn p ungerade:

$$\frac{[\pm \varepsilon^p]}{n} = \frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots \frac{p-1}{2}}{h^p}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{[\pm \varepsilon^p]}{n} = \frac{(m\sqrt{2})^p}{\sqrt{\pi}}\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots \frac{p-1}{2}$$

wenn p gerade:

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (p-1)}{(h\sqrt{2})^p} \tag{16}$$

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = m^p\,1\,.\,3\,.\,5 \ldots (p-1) \tag{17}$$

Die allgemeinen Formeln (16), (17) enthalten die besonderen Fälle (13)—(15) in sich, und geben noch weiter angewendet das Folgende:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{[\pm \varepsilon]}{n} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, m & \dfrac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 \\[2ex]
\dfrac{[\pm \varepsilon^3]}{n} = 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, m^3 & \dfrac{[\varepsilon^4]}{n} = 3\,m^4 \\[2ex]
\dfrac{[\pm \varepsilon^5]}{n} = 8\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, m^5 & \dfrac{[\varepsilon^6]}{n} = 15\,m^6 \\[2ex]
\dfrac{[\pm \varepsilon^7]}{n} = 48\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, m^7 & \dfrac{[\varepsilon^8]}{n} = 105\,m^8 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{18}$$

Umgekehrt können diese Formeln dazu dienen, um auf dem Umwege aus irgend welchen Potenzsummen den mittleren Fehler zu berechnen, was z. B. für die 4^{ten} Potenzen geben würde:

$$m = \sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{3\,n}} \tag{19}$$

Indessen zur praktischen Anwendung für irgend welche Fehlerberechnungen sind nur die ersten und die zweiten Potenzen (ε und ε^2) geeignet.

§ 117. Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers.

Das mittlere Fehlerquadrat m^2 ist nach der im Anfang § 4. S. 13 gegebenen Definition ein Mittelwert aus einer Anzahl von wahren Einzelfehlerquadraten ε^2, und es ist für die Zuverlässigkeit einer solchen Ausrechnung von ε^2 durchaus nicht gleich-gültig, ob mehr oder weniger einzelne ε^2 zur Verfügung stehen, sondern ein m^2 aus nur zwei oder drei einzelnen ε^2 wird zweifellos viel unsicherer sein als eine Mittelbildung aus hunderten von ε^2, gerade so wie ja auch das arithmetische Mittel x aus mehreren Messungen l weniger oder mehr zuverlässig ist, je nachdem wenige oder viele Messungen l vorhanden sind (vgl. § 7. Gleichung (6) S. 21 und die Kurve S. 23).

Dazu kommt noch eine zweite Frage, betreffend die Art und Weise der Bestimmung des mittleren Fehlers. Wir haben nämlich in § 114. gesehen, dass man den mittleren Fehler m auch auf dem bequemen Wege über den durchschnittlichen Fehler t berechnen kann, nach der Formel (6) S. 442 $m = \varrho \sqrt{\pi}\, t = 1{,}2533\, t$, ja wir haben am Schlusse von § 116. S. 447 sogar gesehen, dass man den mittleren Fehler m auch auf dem Umweg über die 3ten, 4ten u. s. w. Potenzen wahrer Fehler ε berechnen könnte, und es entsteht daher die Frage nach der Zuverlässigkeit dieser verschiedenen Arten der Bestimmung von m.

Indem wir dieser Frage näher treten, bleiben wir zunächst bei der Annahme stehen, man sei im Besitze einer gewissen Anzahl n von *wahren* Fehlern ε, indem der Übergang zu scheinbaren Fehlern v erst später in § 118. vorgenommen werden soll.

Zur Bezeichnung mittlerer Fehler wollen wir das Zeichen m wie ein Funktionszeichen anwenden, d. h. es soll z. B. der mittlere Fehler irgend eine Grösse x mit $m\,(x)$ bezeichnet werden, ähnlich wie $f\,(x)$ eine Funktion von x bedeutet also

$$m\,(x) = \text{mittlerer Fehler von } x \tag{1}$$

Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir mit der Rechnungsart der ersten Potenzen ε.

Der durchschnittliche Fehler wird berechnet aus der Gleichung:

$$t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots \varepsilon_n}{n} = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} \tag{2}$$

Wenn wir nach dem mittleren Fehler dieses t fragen, so handelt es sich um die Abweichung des t von demjenigen theoretischen Werte t_0, den man erhalten würde, wenn nicht bloss n Zufallswerte $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, sondern unendlich viele Werte ε vorhanden wären. Einen solchen Wert t_0 wollen wir den wahren Wert nennen, also $t_0 - \varepsilon_1$, $t_0 - \varepsilon_2$ u. s. w. die wahren Fehler der zufällig beobachteten $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ und dann ist das mittlere Fehlerquadrat eines einzelnen ε:

$$(m\,(\varepsilon))^2 = \frac{(t_0 - \varepsilon_1)^2 + (t_0 - \varepsilon_2)^2 + \ldots (t_0 - \varepsilon_n)^2}{n} \tag{3}$$

also das mittlere Fehlerquadrat von t, insofern t ein arithmetisches Mittel aus n einzelnen ε ist, nach (6) § 7. S. 21:

$$(m\,(t))^2 = \frac{(m\,(\varepsilon))^2}{n} = \frac{(t_0 - \varepsilon_1)^2 + (t_0 - \varepsilon_2)^2 + \ldots (t_0 - \varepsilon_n)^2}{n^2} \tag{4}$$

Die Ausrechnung der Quadrate im Zähler, wobei alle ε nur absolut (z. B. alle ε positiv) gezählt werden, giebt:

$$(m\,(t))^2 = \frac{n\,t_0^2 - 2\,t_0\,[\pm \varepsilon] + [\varepsilon^2]}{n^2} = \frac{t_0^2}{n}\left(1 - 2\,\frac{[\pm \varepsilon]}{n}\,\frac{1}{t_0} + \frac{[\varepsilon^2]}{n}\,\frac{1}{t_0^2}\right)$$

Hier ist $\dfrac{[\pm \varepsilon]}{n} = t$ und $\dfrac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2$ also:

$$(m\,(t))^2 = \frac{t_0^2}{n}\left(1 - 2\,\frac{t}{t_0} + \frac{m^2}{t_0^2}\right) \tag{5}$$

Da aber nicht bekannt ist, ob t_0 grösser oder kleiner als t ist, darf man hier $t = t_0$ nehmen und da ferner nach (6) § 114. S. 442, $\frac{m^2}{t_0^2} = \frac{m^2}{t^2} = \frac{\pi}{2}$, hat man aus (5):

$$(m\,(t))^2 = \frac{t^2}{n}\left(1 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{t^2}{n}\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$$

daraus die Wurzel gezogen:

$$m\,(t) = \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \qquad (6)$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Bestimmung von t aus dem Mittel aller $\pm\,\varepsilon$, wir können also schreiben:

$$t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}$$

oder $$t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}\right) \qquad (7)$$

Wenn man von dem durchschnittlichen Fehler zum mittleren Fehler übergeht, nach (6) § 114. S. 442 mit $m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t$, so erhält man aus (7):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}\right) \qquad (8)$$

oder $$m = 1{,}2533\,\frac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{0{,}7555}{\sqrt{n}}\right) \qquad (9)$$

In gleicher Weise, wie wir hier den mittleren Fehler des durchschnittlichen Fehlers bestimmt haben, kann man auch den mittleren Fehler des mittleren Fehlers selbst bestimmen, wozu wir haben:

$$m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots \varepsilon_n^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$$

Der wahre Wert von m^2 d. h. derjenige, welchen man bei unendlich vielen ε $(n = \infty)$ erhalten würde, sei m_0^2, dann wird der mittlere Fehler $m\,(\varepsilon^2)$ eines einzelnen ε^2 bestimmt durch:

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = \frac{(m_0^2 - \varepsilon_1^2)^2 + (m_0^2 - \varepsilon_2^2)^2 + \ldots (m_0^2 - \varepsilon_n^2)^2}{n}$$

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = \frac{n\,m_0^4 - 2\,m_0^2\,[\varepsilon^2] + [\varepsilon^4]}{n} = m_0^4\left(1 - \frac{2\,[\varepsilon^2]}{n\,m_0^2} + \frac{[\varepsilon^4]}{n\,m_0^4}\right) \qquad (10)$$

Man setzt nun wieder (ähnlich wie bei (5)):

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m_0^2 \text{ und nach (15) § 116. S. 447 } \frac{[\varepsilon^4]}{n} = 3\,m^4$$

also, indem die Unterscheidung zwischen m_0 und m nicht mehr nötig ist, aus (10):

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = m^4\,(1 - 2 + 3) = 2\,m^4 \qquad (11)$$

oder $$m\,(\varepsilon^2) = m^2\sqrt{2}$$

Dieses ist der mittere Fehler eines einzelnen ε^2, und da m^2 als arithmetisches Mittel aus n solcher ε^2 erhalten wird, muss man nach der Regel (6) § 7. S. 21 des arithmetischen Mittels den mittleren Fehler von m^2 so berechnen:

$$m\,(m^2) = \frac{m\,(\varepsilon^2)}{\sqrt{n}} = m^2 \sqrt{\frac{2}{n}} \tag{12}$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Bestimmung von m^2 aus der Quadratsumme aller ε^2, also:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} \pm m^2 \sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{[\varepsilon^2]}{n}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

Um zu m selbst überzugehen, betrachten wir den mittleren Fehler stets als verhältnismässig klein, und nehmen daher:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,n}}\right) \tag{13}$$

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \frac{0{,}70710}{\sqrt{n}}\right) \tag{14}$$

Vergleicht man dieses mit (8) oder (9), so findet man, dass die Berechnung von m aus den Quadraten ε^2 günstiger ist als die Berechnung aus den ε selbst und zwar im Verhältnis 0,7555 : 0,7071.

Die Fortsetzung dieser Untersuchungen auf höhere Potenzen, welche keine praktische Bedeutung mehr haben, giebt folgende Reihe, in welche wir des Zusammenhangs wegen auch die beiden Werte (9) und (14) für erste und zweite Potenzen nochmals aufnehmen:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & m = 1{,}2533\,\dfrac{[\pm\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \dfrac{0{,}7555}{\sqrt{n}}\right) \\
2) & m = \sqrt{\dfrac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{0{,}7071}{\sqrt{n}}\right) \\
3) & m = 0{,}8557\,\sqrt[3]{\dfrac{[\pm\varepsilon^3]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{0{,}7371}{\sqrt{n}}\right) \\
4) & m = 0{,}7598\,\sqrt[4]{\dfrac{[\varepsilon^4]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{0{,}8165}{\sqrt{n}}\right) \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
9) & m = 0{,}5293\,\sqrt[9]{\dfrac{[\pm\varepsilon^9]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{2{,}1408}{\sqrt{n}}\right) \\
10) & m = 0{,}5040\,\sqrt[10]{\dfrac{[\varepsilon^{10}]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{2{,}7058}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\} \tag{15}$$

Die günstigste Bestimmung von m ist die Bestimmung aus den Quadraten ε^2, denn diese Bestimmung 2) hat den kleinsten mittleren Fehler, nämlich 0,7071 m. Die Bestimmung aus den 10ten Potenzen der ε hat nach 10) den nahezu 4mal grösseren Fehler 2,7058 m.

Hiezu gehört das Citat der Quellenschrift von Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen (s. unsere Einleitung S. 3 unten), auch Encke, „Berl. Astr. Jahrb. für 1834", S. 289 bis 293, wobei aber ja nicht zu übersehen ist, dass Gauss und Encke durchaus mit *wahrscheinlichen* Fehlern rechnen, sowohl bei den Potenzmitteln, als auch bei deren Unsicherheiten, sie geben also stets den wahrscheinlichen Fehler mit seinem wahrscheinlichen Fehler, während unsere Rechnung im Vorstehenden sich stets auf *mittlere* Fehler und mittlere Fehler der mittleren Fehler beziehen; es sind daher alle unsere Coefficienten im Verhältnis $1 : \varrho\sqrt{2}$ oder 1 : 0,6745 grösser als die Coefficienten nach Gauss-Encke.

§ 118. Scheinbare Fehler v statt wahrer Fehler ε.

Eine weitergehende Frage ist nun, in welchem Maasse die Zuverlässigkeit einer Bestimmung des mittleren Fehlers sich vermindert, wenn man nicht wie bisher angenommen, wahre Fehler ε, sondern nur die scheinbaren Fehler v, (welche bei einer Ausgleichung übrig bleiben), zur Verfügung hat.

Wenn die Ausgleichung n Beobachtungen und u Unbekannte hatte, so berechnet man aus der Quadratsumme $[v^2]$ der scheinbaren Fehler bekanntlich das mittlere Fehlerquadrat nach der Formel:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-u} \tag{1}$$

Wir haben diese wichtige Formel in (19) § 28. S. 87 entwickelt, auch in § 86. bei (19) S. 322 noch eine zweite Begründung für den Nenner $n-u$ kurz angedeutet. Aus (1) hat man mit $u=1$:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-1} \tag{1a}$$

Nach (12) § 27. S. 86 ist die Beziehung zwischen $[v^2]$ und $[\varepsilon^2]$:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon]^2}{[b\,b.1]} - \frac{[c\,\varepsilon]^2}{[c\,c.2]} - \ldots \tag{2}$$

Bleiben wir zunächst bei *einer* Unbekannten stehen, so wird mit $u=1$ aus (2) erhalten:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} = \frac{[\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}}{n-1} \quad \text{für } u = 1 \tag{3}$$

Wenn nun $m_0{}^2$ der wahre Wert von m^2, d. h. derjenige Wert ist, der bei unendlich vielen ε (also $n=\infty$) erhalten würde, so stellt $m^2 - m_0{}^2$ den Fehler von m^2 in einem einzelnen Falle vor, und wenn wir den Mittelwert von $(m^2 - m_0{}^2)^2$ wüssten, so hätten wir damit das Quadrat des mittleren Fehlers von m^2, d. h. in unserer Bezeichnungsart nach (1) S. 418:

$$(m\,(m^2))^2 = \text{Mittelwert von } (m^2 - m_0{}^2)^2 \tag{4}$$

$$= \quad " \quad " \quad \left(\frac{[\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}}{n-1} - m_0{}^2\right)^2 \tag{4a}$$

$$= \text{Mittelwert von } \left(\frac{1}{n\,(n-1)}\right)^2 \left(n\,[\varepsilon^2] - [\varepsilon]^2 - n\,(n-1)\,m_0{}^2\right)^2$$

$$= \quad " \quad " \quad \left(\frac{1}{n\,(n-1)}\right)^2 \begin{pmatrix} n^2\,[\varepsilon^2]^2 - 2\,n\,[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2 - 2\,n^2\,(n-1)\,[\varepsilon^2]\,m_0{}^2 \\ + [\varepsilon]^4 + 2\,n\,(n-1)\,[\varepsilon]^2\,m_0{}^2 \\ + n^2\,(n-1)^2\,m_0{}^4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Von diesen 6 Gliedern muss man nun einzeln die Mittelwerte bestimmen, wozu wir bereits manche Vorbereitungen haben. Jedenfalls ist algebraisch:

$$[\varepsilon^2]^2 = (\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots)^2 = (\varepsilon_1{}^4 + \varepsilon_2{}^4 + \ldots) + 2\,(\varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2{}^2 + \ldots) \tag{6}$$

Die Summe der 4ten Potenzen der Fehler hat man in (15) § 116. S. 447 gefunden:

$$[\varepsilon^4] = 3\,n\,m_0{}^4 \tag{7}$$

und die Summe aller $\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \ldots$ d. h. mit Ausscheidung aller $\varepsilon_1^2 \varepsilon_1^2 \ldots$, welche in (7) enthalten sind, lässt sich leicht abzählen und giebt im Mittel:

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 + \ldots = n(n-1)\, m_0^2 m_0^2 = n(n-1)\, m_0^4 \tag{8}$$

Es wird also aus (6) mit (7) und (8):

$$[\varepsilon^2]^2 = (3n + n(n-1))\, m_0^4 = n(n+2)\, m_0^4 \tag{9}$$

damit hat man das erste Glied der Klammer von (5).

Ähnlich entwickelt man auch das zweite Glied von (5), nämlich:

$$\begin{aligned}[\varepsilon^2][\varepsilon]^2 &= (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots)^2 \\ &= (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 \ldots)\end{aligned}$$

Da aber der Mittelwert einer Gruppe ungerader Potenzen, wegen des wechselnden Vorzeichens der ε, verschwindet, so wird auch wie bei (9):

$$[\varepsilon^2][\varepsilon]^2 = [\varepsilon^2][\varepsilon^2] = [\varepsilon^2]^2 = (n^2 + 2n)\, m_0^4 \tag{10}$$

Von den übrigen Gliedern in (5) wollen wir nur noch $[\varepsilon]^4$ ausführlich darlegen, nämlich:

$$[\varepsilon]^4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots)^4 = (\varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4 + \ldots) + (6\,\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \ldots) + (4\,\varepsilon_1 \varepsilon_2^3 + \ldots)$$

da aber die ungeraden Potenzen verschwinden, bleibt nur:

$$[\varepsilon^4] = 3n\, m_0^4 + 3n(n-1)\, m_0^4 = 3n^2 m_0^4 \tag{11}$$

Wenn man in dieser Weise alle Glieder von (5) behandelt, so bekommt man:

$$(m(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^2 \left\{\begin{matrix} n^2(n^2+2n)\, m_0^4 - 2n(n^2+2n)\, m_0^4 - 2n^3(n-1)\, m_0^4 \\ + 3n^2 m_0^4 + 2n^2(n-1)\, m_0^4 \\ + n^2(n-1)^2 m_0^4 \end{matrix}\right\} \tag{12}$$

$$(m(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^2 \left(2n^3 m_0^4 - 2n^2 m_0^4\right) = \frac{2\, m_0^4}{n-1}$$

$$m(m^2) = m_0^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{13}$$

Dieses ist der mittlere Fehler von m^2, insofern m^2 nach (1a) berechnet ist, also aus (1a) und (13) zusammen:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \pm m^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \frac{[v^2]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) \tag{14}$$

Wenn $m(m^2)$ verhältnismässig klein ist gegen m^2 selbst, kann man auch schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right) = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n-1}}\right) \tag{15}$$

Dieses unterscheidet sich von dem früheren (14) § 117. S. 450 nur dadurch, dass nun überall v an Stelle von ε und $n-1$ an Stelle von n steht.

Übergang zu zwei und mehr Unbekannten.

Die bisherige Betrachtung von (3) bis (13) bezog sich auf *eine* Unbekannte, wie sie im arithmetischen Mittel vorkommt, wobei auch der Fall ungleich genauer Einzelbeobachtungen (§ 8.) und der Fall von Coefficienten a wie bei (10) § 12. S. 43 mit inbegriffen ist, insofern man dafür Reduktion auf gleiche Gewichte, also $\varepsilon\sqrt{p}$ u. s. w. annimmt.

Auch bei *zwei* Unbekannten lässt sich die vorhergehende Behandlungsweise noch im Wesentlichen beibehalten. Nach (12) § 27. S. 86 ist für 2 Unbekannte:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \text{ und } m^2 = \frac{[v^2]}{n-2} \tag{16}$$

Wenn also $m_0{}^2$ das wahre mittlere Fehlerquadrat ist, und mit $m\,(m^2)$ der mittlere Fehler von m^2 bezeichnet wird, so hat man:

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{[\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}}{n-2} - m_0{}^2\right)^2$$

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 \left([\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - (n-2)\,m_0{}^2\right)^2 \tag{17}$$

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 \left\{\begin{aligned} &[\varepsilon^2]^2 - 2\,\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}\,[\varepsilon^2] - 2\,\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[b\,b.1]}\,[\varepsilon^2] - 2\,(n-2)\,[\varepsilon^2]\,m_0{}^2 \\ &\quad + \frac{[a\varepsilon]^4}{[aa]^2} + 2\,\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}\,\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[bb.1]} + 2\,(n-2)\,\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}\,m_0{}^2 \\ &\qquad + \frac{[b\varepsilon.1]^4}{[bb.1]^2} + 2\,(n-2)\,\frac{[b\,\varepsilon.1]^2}{[b\,b.1]}\,m_0{}^2 \\ &\qquad\qquad + (n-2)^2\,m_0{}^4 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Von den 10 Gliedern, welche in dieser Klammer auftreten, sind die Mittelwerte einzeln zu bilden, und man sieht bald, dass für alle diejenigen Glieder, welche kein $[b\,\varepsilon\,.\,1]$ enthalten, die früheren Betrachtungen (6)—(10), sowie das frühere (16) S. 86 u. s. w. wieder gebraucht werden können, und was die Glieder mit $[b\,\varepsilon\,.\,1]$ betrifft, so braucht man nur dieselben in $[b\,\varepsilon] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,\varepsilon]$ aufzulösen, um alles auf $[a\,\varepsilon]$, $[b\,\varepsilon]$ u. s. w. zurückzuführen.

Die Ausführung ist umständlich, sie giebt:

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \left(\frac{m_0{}^2}{n-2}\right)^2 \left\{\begin{array}{rrrr} +\,n\,(n+2) & -\,2\,(n+2) & -\,2\,(n+2) & -\,2\,(n-2)\,n \\ & +\,3 & +\,2 & +\,2\,(n-2) \\ & & +\,3 & +\,2\,(n-2) \\ & & & +\,(n-2)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \left(\frac{m_0{}^2}{n-2}\right)^2 \Big\{2\,n-4\Big\} = 2\,\frac{m_0{}^4}{n-2}$$

und da man nun m^2 und $m_0{}^2$ nicht mehr zu unterscheiden braucht:

$$m\,(m^2) = m^2 \sqrt{\frac{2}{n-2}}$$

oder in anderer Form:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-2}}\right)$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-2)}}\right) \tag{19}$$

Die Ausdehnung auf mehr als 2 Unbekannte, allgemein u Unbekannte wird geben:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-u)}}\right) \tag{20}$$

Ohne auch dieses noch durchzuführen, wollen wir nur bemerken, dass man dazu verschiedene Wege einschlagen kann, etwa mit Einführung der $b' \varepsilon'$ in m, wie in (14) § 28. S. 86, wobei aber die Bildung der Mittelwerte nicht so einfach ist wie dort.

Die erste Quelle der Sache ist Art. 39—40 der Gauss schen theoria combinationis (vgl. S. 4), wobei die Coefficienten $[a\,\alpha]$ u. s. w. unseres § 28. S. 89 unten gebraucht werden. Gauss behandelt die Aufgabe zunächst ohne eine bestimmte Annahme über das Fehlergesetz und findet alle auftretenden Mittelwerte ausdrückbar in $m_0{}^2$ und in ν^4 in dem Sinne von (15) § 116. S. 447. Es wird also bei unbestimmtem Fehlergesetz zunächst *nicht* $\nu^4 = 3\,m^4$ gesetzt, sondern ν^4 unbestimmt gelassen. Trotzdem lässt sich das gesuchte m (m^2) in gewisse Grenzen einschliessen, welche auch ohne die Kenntnis von ν^4 zu einer plausiblen Schätzung von m (m^2) führen, und dann mit $\nu^4 = 3\,m^4$ zu dem Schlussergebnis führen, welches in unserer Gleichung (20) enthalten ist. Es ist auch die entsprechende Bearbeitung aus Helmert, „Ausgleichungsrechnung nach d. M. d. kl. Q. 1872", S. 111—113 zu zitieren, mit *einer* Unbekannten, wobei unsere Gleichung (4a) in der Form auftritt $\left(\frac{[\varepsilon^2] - [\alpha\,\varepsilon]\,[\alpha\,\varepsilon]}{n-1} - m^2\right)^2$.

Wenn man die Gleichung (20) auf den Fall bedingter Beobachtungen mit r unabhängigen Bedingungsgleichungen anwendet, z. B. Triangulierung mit r Bedingungsgleichungen, so wird $n - u = r$ also

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,r}}\right\} \tag{21}$$

Nehmen wir hiezu beispielshalber das belgisch-deutsche Verbindungsnetz von § 83., so haben wir nach S. 298 die Summe $[v^2\,p] = 4{,}2$, also in unserem Sinne zu (21):

$$[v^2] = 4{,}2 \text{ und } r = 11$$

also

$$m = \sqrt{\frac{4{,}2}{11}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{22}}\right)$$

$$m = \pm\,0{,}618''\,(1 \pm 0{,}213) = \pm\,(0{,}618'' \pm 0{,}132'')$$

d. h. der mittlere Fehler 0,618″ ist aus jener Triangulierung hervorgegangen mit einer Unsicherheit von rund 21 % seines eigenen Betrags oder 0,13″.

§ 119. Vergleichung des Fehlergesetzes mit Beobachtungsreihen.

Um das auf rein theoretischem Wege gefundene Fehlerverteilungs-Gesetz von § 111., nämlich $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}$ mit der Erfahrung zu vergleichen, muss man sich eine Reihe wahrer Beobachtungsfehler oder eine Reihe solcher zufälliger Ereignisse verschaffen, von denen man annehmen kann, dass sie gleichen Bedingungen unterworfen sind, wie Beobachtungsfehler.

Als solche Zufallsreihe wollen wir die Verteilung der Nullen in einer Logarithmentafel nehmen.

Wir haben nach Vega-Hülsse (Leipzig 1840) gezählt, und zwar nach S. 2—185, wo die 7 stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 99999 stehen. Dieselben Logarithmen stehen natürlich auch in Vega-Bremiker, und in Schrön in gleicher Anordnung, nur mit dem kleinen Unterschied bei Vega-Bremiker, dass in jeder Kolumne nicht 50, sondern 51 Werte stehen, weil am Fusse die Zahl von der folgenden Seite wiederholt steht. Sehen wir davon ab, so haben wir in jeder Kolumne 50 Logarithmen, und die Zählung erstreckte sich auf die Zahl der Nullen in der 6ten Stelle, wie folgendes Beispiel einer Seitenabzählung zeigt:

Zählung der Nullen in der 6ten Logarithmenstelle.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	0300	0517	0734	0951	1168	1386	1603	1820	2037	2254
2001	2471	2688	2905	3122	3339	3556	3773	3990	4207	4424
2002	4641	4858	5075	5291	5508	5725	5942	6159	6376	6593
2003	6809	7026	7243	7460	7677	7893	8110	8327	8544	8760
2004	8977	9194	9411	9627	9844	0061	0277	0494	0711	0927
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2045	6933	7145	7358	7570	7783	7995	8207	8419	8632	8844
2046	9056	9269	9481	9693	9905	0117	0330	0542	0754	0966
2047	1178	1391	1603	1815	2027	2239	2451	2663	2875	3087
2048	3300	3512	3724	3936	4148	4360	4572	4784	4996	5208
2049	5420	5632	5843	6055	6267	6479	6691	6903	7115	7327
Summe	9	1	7	6	6	4	8	5	6	3

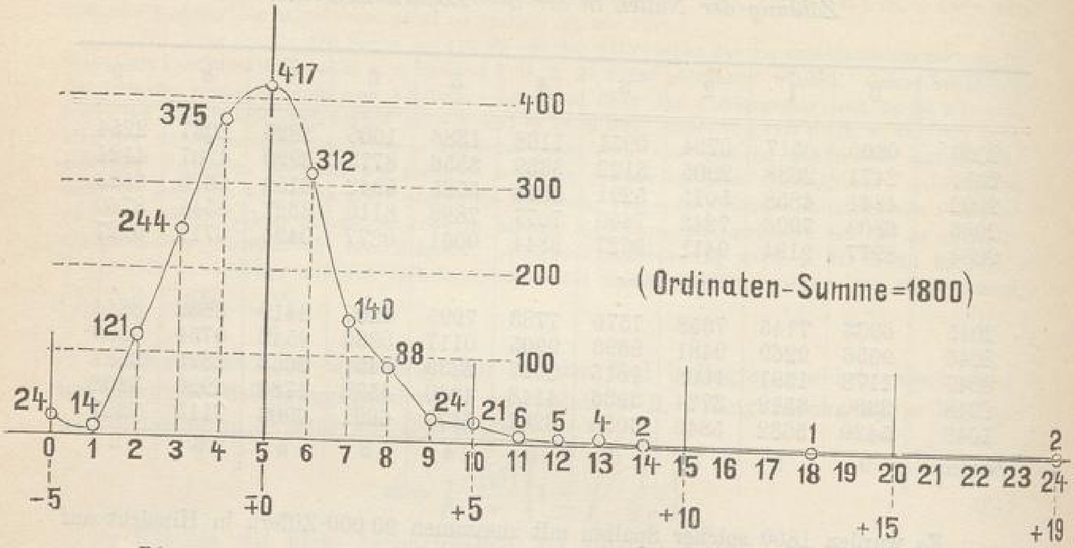
Es wurden 1800 solcher Spalten mit zusammen 90 000 Ziffern in Hinsicht auf Nullen durchgezählt.

Einiges Nähere hierüber haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1890", S. 560—564 mitgeteilt, auch sei zu dem entsprechenden Beispiele in den früheren Auflagen dieses Buches (z. B. 3. Aufl. I. Band 1888, S. 282—285) bemerkt, dass jenes frühere Beispiel in zweifacher Beziehung ein anderes war, erstens waren nur 600 Spalten, statt jetzt 1800 Spalten behandelt, und zweitens waren die Spalten nicht einzeln, sondern je 2 zusammen behandelt.

Im Einzelnen gab die Zählung Folgendes:

Anzahl der Nullen in einer Spalte l	kommt vor p	Produkt $p\,l$	Fehler $l-5=\varepsilon$	ε^2	$p\,\varepsilon^2$
0	24mal	0	-5	25	600
1	14	14	-4	16	224
2	121	242	-3	9	1089
3	244	732	-2	4	976
4	375	1500	-1	1	375
5 (Mittelwert)	417 (Maximum)	2085	0	0	0
6	312	1872	$+1$	1	312
7	140	980	$+2$	4	560
8	88	704	$+3$	9	792
9	24	216	$+4$	16	384
10	21	210	$+5$	25	525
11	6	66	$+6$	36	216
12	5	60	$+7$	49	245
13	4	52	$+8$	64	256
14	2	28	$+9$	81	162
18	1	18	$+13$	169	169
24	2	48	$+19$	361	722
Summe 1800		8827			7607

Hiezu wurde auch folgende graphische Darstellung gemacht:



Die Abscissen 0, 1, 2 ... 24 beziehen sich auf die Anzahl l der Nullen, welche in je einer fünfziggliedrigen Kolumne gefunden wurden. Die Ordinaten $p = 24$, $p = 14 \ldots p = 417 \ldots p = 2$ geben die Zahl der Fälle, in welchen die Nullenzahl l gefunden wurde, z. B. wurden 4 Nullen in je einer Kolumne 375mal gefunden, oder 5 Nullen in je einer Kolumne 417mal u. s. w.

Nun rechnen wir weiter, wie wenn unsere l die Ergebnisse von unabhängigen gleichartigen Beobachtungen einer Unbekannten x wären, welche dann als arithmetisches Mittel aller l berechnet wird:

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{8827}{1800} = 4{,}9033$$

Dieser Wert $x = 4{,}9033$ ist kleiner als der Wert $x = 5$, welcher bei gleichmässiger Verteilung der Ziffern in den abgezählten Spalten zu erwarten war. Wir wollen nicht den beobachteten Mittelwert $x = 4{,}9033$, sondern den theoretischen Wert $x = 5$ den weiteren Berechnungen zu Grunde legen, indem wir nun die Differenzen $l - x = \varepsilon$ wie wahre Beobachtungsfehler weiter behandeln.

Jedoch betrachten wir zuvor nochmals die graphische Darstellung, wobei in die Augen fällt, dass diese Curve nicht symmetrisch gegen die Achse ist. Eine solche Unsymmetrie, oder ungleiche Wahrscheinlichkeiten für $-\varepsilon$ und für $+\varepsilon$, ist auch von vornherein zu erwarten gewesen, namentlich bei den Grenzwerten; denn der Fehler $\varepsilon = -5$, oder 0 Nullen, ist unbedingt die untere *Grenze*, weil $\varepsilon = -6$, oder weniger als 0 Nullen, in einer Spalte undenkbar ist, während auf der positiven Seite mit $\varepsilon = +5$ oder 10 Nullen in einer Spalte die Sache gar nicht abgeschlossen ist, und es kommen darüber hinaus 11, 12, 13, 14 Nullen noch ganz stetig vor, worauf zwei Lücken folgen, und die Reihe mit zweimal 24 Nullen in einer Spalte abschliesst.

Trotz dieser Unsymmetrie im Ganzen können wir einen mittleren Fehler berechnen, wozu die Quadrate ε^2 schon oben in der Hauptzusammenstellung von S. 455 enthalten sind, nämlich $[\varepsilon^2] = 7607$, also mittlerer Fehler $m = \sqrt{\frac{7607}{1800}} = \pm 2{,}056$.

Ausserdem wollen wir noch die beiden Teile, $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, getrennt behandeln, und zwar soll der wichtige Fall $\varepsilon = 0$ mit $n = 417$ dabei hälftig nach der negativen Seite und hälftig nach der positiven Seite hin gezählt werden, so dass wir erhalten:

negative Fehler:

ε	ε^2	p	$p\,\varepsilon^2$
0	0	208,5	0
-1	1	375	375
-2	4	244	976
-3	9	121	1089
-4	16	14	224
-5	25	24	600
		986,5	3264

$$m^2 = \frac{3264}{986{,}5} = 3{,}3087$$
$$m = \pm 1{,}8190$$

positive Fehler:

ε	ε^2	p	$p\,\varepsilon^2$
0	0	208,5	0
$+1$	1	312	312
$+2$	4	140	560
$+3$	9	88	792
$+4$	16	24	384
$+5$	25	21	525
$+6$	36	6	216
$+7$	49	5	245
$+8$	64	4	256
$+9$	81	2	162
$+13$	169	1	169
$+16$	361	2	722
		813,5	4343

$$m^2 = \frac{4343}{813{,}5} = 5{,}3387$$
$$m = \pm 2{,}3106$$

Die nächste Betrachtung soll sich auf die negativen Fehler allein erstrecken, und wir wollen die Verteilung mit dem theoretischen Fehlergesetze von § 111. vergleichen, wozu es zuerst nötig ist, das Intervall $d\varepsilon = 1$ in Teilen des mittleren Fehlers m auszudrücken. Aus $m = 1{,}8190$ folgt:

$$d\varepsilon = 1 = 0{,}54976\,m$$

und

$$\frac{d\varepsilon}{2} = 0{,}5 = 0{,}27488\,m$$

Nun bestimmt man nach der Tabelle S. [21] des Anhangs die Wahrscheinlichkeiten W für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den $n$fachen mittleren Fehler und rechnet zugleich weiter, wie nachstehende Tabelle zeigt:

Grenzen				W nach Seite [21]	986,5 W	Differenzen p'
0 und ε		0 und n				
						213,7
0	0,5	0	0,27488	0,2166	213,7	
						368,7
0	1,5	0	0,82464	0,5904	582,4	
						237,1
0	2,5	0	1,37440	0,8307	819,5	
						113,3
0	3,5	0	1,92416	0,9456	932,8	
						40,6
0	4,5	0	2,47392	0,9867	973,4	
						10,6
0	5,5	0	3,02368	0,9975	984,0	
						2,5
0	∞	0	∞	1,0000	986,5	
						986,5

Die in der letzten Spalte stehenden Differenzen p' sind nun die theoretischen Anzahlen, welche den beobachteten p in der vorhergehenden Tabelle S. 457 entsprechen, und man hat daher folgende Vergleichung für die negativen ε:

Grenzen	Anzahl der Fehler nach der Theorie p'	Anzahl der Fehler nach der Erfahrung p	Abweichung
0 und 0,5	214	209	+ 5
0,5 „ 1,5	369	375	— 6
1,5 „ 2,5	237	244	— 7
2,5 „ 3,5	113	121	— 8
3,5 „ 4,5	41	14	+ 27
4,5 „ 5,5	11	24	— 13
5,5 „ ∞	2	0	+ 2
Summe	987	987	0

Die Übereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung ist so, dass man sagen kann, die Verteilung der Nullen folgt näherungsweise dem Gesetze von § 111. Allerdings die entsprechende Verteilung der positiven ε stimmt noch erheblich schlechter mit der Theorie, wir wollen diese Verteilung nicht auch noch vorführen, dieselbe wird namentlich durch die vereinzelten *grossen* ε (vgl. die Fig. auf S. 456 mit den rechts auslaufenden Werten bis 24) entstellt.

Solche Vergleichungen zwischen der Fehlerverteilung nach der Erfahrung und nach der Theorie des Gauss schen Fehlergesetzes sind zuerst angestellt worden von Bessel in „fundamenta astronomiae" S. 19—20, mit drei Fehlerreihen, von denen die dritte, 470 Rectascensionsbeobachtungen umfassend, auch von Encke im „Berl. Astr. Jahrbuch für 1834" S. 274—275 behandelt wird dieselbe war auch enthalten in der 2ten Auflage unseres „Handb. d. Verm., 1. Band 1877", S. 101 und 104).

Die neueste und bedeutendste Untersuchung dieser Art betrifft die Schlussfehler von 2238 Dreiecken der Italienischen Triangulierung, behandelt auf Anregung von General Ferrero durch Ingenieur Guarducci, mitgeteilt in der italienischen Zeitschrift „Rivista di topografia e catasto", Roma 1889, Volume II, S. 1—12. Es sind 2 Gruppen, erstens 661 Dreiecke mit dem mittleren Schlussfehler 14,08″ und zweitens 1577 Dreiecke mit Schlussfehler 17,13″. Ein Bericht hierüber wird auch gegeben von Czuber in „Theorie der Beobachtungsfehler", Leipzig 1891, S. 193—194, und ferner eine Reihe von 40 Teilstrichbestimmungen aus A. R. Clarkes Geodesy, mitgeteilt von Faye in Comptes rendus, 106. Band, 1888, S. 783—786.

General Ferrero hat ferner in dem „Rapport sur les triangulations, présenté à la dixième Conférence générale à Bruxelles en 1892" eine Tafel mit 12 graphischen Darstellungen zu 18085 Schlussfehlern gegeben, und berichtet auf S. 4 dieses Rapports, dass er auf der Pariser Versammlung 1889 eine Broschüre verteilt habe, welche an mehr als 5000 Dreiecksschlussfehlern die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung schlagend nachgewiesen habe.

§ 120. Fehler-Kurven mit endlicher Erstreckung.

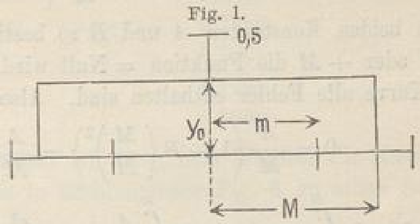
Bei der Bestimmung der Fehlerfunktion in § 111. wurde die Annahme gemacht, dass die Fehlergrenzen die denkbar weitesten, nämlich $-\infty$ und $+\infty$ seien. Die Praxis steht dieser Annahme entgegen, und deswegen machen wir nun verschiedene Versuche mit solchen Fehlerfunktionen, deren Kurven nicht asymptotisch auslaufen, sondern die Achse berühren oder schneiden.

Wir wollen sogar im Interesse möglichster Allgemeinheit mit dem gröbsten Falle beginnen, dass nämlich die Fehler-Kurve eine begrenzte Gerade, parallel der Achse, sei, wie in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1.

$$M^2 = 3\,m^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2\,M} = \frac{0{,}2887}{m}$$



I. Parallele Gerade (Rechteck).

Wir nehmen zuerst unbestimmt an $\varphi(\varepsilon) = A$ und wollen die Konstante A so bestimmen, dass zwischen den Grenzen $-M$ und $+M$ alle Fehler enthalten sind, d. h.:

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon = 1$$

$$2\int_0^M A\,d\,\varepsilon = 2\,A\,M = 1 \quad \text{also} \quad A = \frac{1}{2\,M}$$

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2\,M} \tag{1}$$

Das mittlere Fehlerquadrat wird:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon = 2\int_0^M \frac{\varepsilon^2}{2\,M}\,d\,\varepsilon = \frac{M^2}{3}$$

also $$M^2 = 3\,m^2 \qquad M = 1{,}732\,m \tag{2}$$

Zu späteren Vergleichungen wollen wir auch den Mittelwert ν^4 der 4ten Potenzen ausrechnen:

$$\nu^4 = 2\int_0^M \varepsilon^4\,\varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon = 2\int_0^M \frac{1}{2\,M}\,\varepsilon^4\,d\,\varepsilon = \frac{M^5}{5}$$

und da $M^2 = 3\,m^2$ ist, hat man auch

$$\nu^4 = \frac{9}{5}\,m^4 = 1{,}800\,m^4 \tag{3}$$

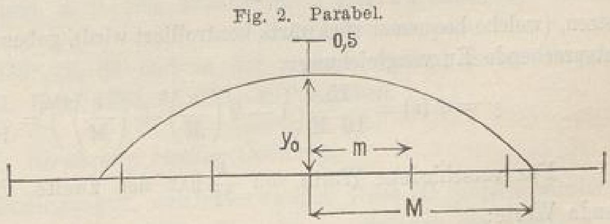
II. Parabel.

Die Fehlerkurve soll vom Scheitel nach beiden Seiten symmetrisch abnehmen.

Fig. 2. Parabel.

$$M^2 = 5\,m^2$$

$$y_0 = \frac{3}{4\,M} = \frac{0{,}3354}{m}$$



Die Funktion sei zunächst unbestimmt in dieser Form:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{A}{M}\left(1 - B\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2\right) \tag{4}$$

wobei die beiden Konstanten A und B so bestimmt werden sollen, dass erstens für $\varepsilon = -M$ oder $+M$ die Funktion $=$ Null wird, und dass zweitens zwischen der Achse und der Kurve alle Fehler enthalten sind. Also:

$$0 = \frac{A}{M}\left(1 - B\left(\frac{M}{M}\right)^2\right) = \frac{A}{M}(1 - B) \quad , \quad B = 1$$

$$1 = 2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = 2\int_0^M \frac{A}{M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right) d\,\varepsilon = 2\,\frac{A}{M}\left(M - \frac{M^3}{3\,M^2}\right)$$

$$1 = 2\,A\left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad , \quad A = \frac{3}{4}$$

Also die Funktion:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{3}{4\,M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right) \tag{5}$$

Dieses ist die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $= \frac{2}{3}M^2$. Damit wird:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = \frac{3}{2\,M}\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^5}{5\,M^2}\right) = \frac{M^2}{5}$$

$$M^2 = 5\,m^2 \qquad\qquad M = 2{,}236\,m \tag{6}$$

$$\nu^4 = 2\int_0^M \varepsilon^4\,\varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = \frac{3}{2\,M}\left(\frac{M^5}{5} - \frac{M^7}{7\,M^2}\right) = \frac{3}{35}M^4$$

$$\nu^4 = \frac{15}{7}\,m^4 = 2{,}143\,m^4 \tag{7}$$

III. *Berührung erster Ordnung.*

Wenn man von der Fehlerkurve verlangt, dass sie zunächst im Scheitel ähnlich wie die Parabel ansetzt, dann aber links und rechts in Abständen M symmetrisch die Achse berühren soll, so kann man der Kurvengleichung 3 Coefficienten geben, und diese bestimmen durch die 3 Bedingungen, dass erstens $2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = 1$, zweitens $y = 0$ für $\varepsilon = M$, und drittens $\frac{d\,y}{d\,\varepsilon} = 0$ für $\varepsilon = M$. Ohne die Ausrechnung herzusetzen, (welche bequemer rückwärts kontrolliert wird), geben wir die diesen 3 Bedingungen entsprechende Kurvengleichung:

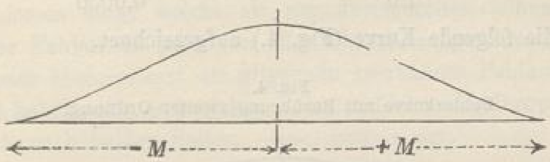
$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{15}{16\,M}\left(1 - 2\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4\right) = \frac{15}{16\,M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^2 \tag{8}$$

Für verschiedene Werte von $\frac{\varepsilon}{M}$ hat der zweite Faktor dieser Funktion folgende Werte:

$\frac{\varepsilon}{M} = 0{,}0$	$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^2 = 1{,}0000$
0,2	0,9216
0,4	0,7056
0,6	0,7056
0,8	0,1296
1,0	0,0000

Da der erste Faktor in (8) konstant ist, kann man hiernach die Kurve für (8) in beliebigem Massstabe auftragen, wie in nachfolgender Fig. 3. zu sehen ist.

Fig. 3.
Fehlerkurve mit Berührung erster Ordnung.



Das mittlere Fehlerquadrat m^2 und das mittlere Biquadrat ν^4 werden aus (8) erhalten:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = \frac{15}{8\,M}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) M^3$$

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{7} M^2 \qquad & m &= 0{,}3796\, M \\ M^2 &= 7\, m^2 \qquad & M &= 2{,}64575\, m \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\nu^4 = 2\int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = \frac{15}{8\,M}\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right) M^5$$

$$\nu^4 = \frac{1}{21} M^4 \qquad \nu^4 = 0{,}04762\, M^4$$

$$\nu^4 = \frac{1}{21}\, 49\, m^4 = \frac{7}{3}\, m^4 = 2{,}3333\, m^4 \tag{10}$$

In gleicher Weise kann man auch den durchschnittlichen Fehler t und den wahrscheinlichen Fehler r berechnen:

$$t = \frac{5}{16} M = 0{,}3125\, M = \frac{5\sqrt{7}}{16}\, m = 0{,}8268\, m$$

$$r = 0{,}28108\, M = 0{,}74367\, m$$

Dieses und weiteres hiezu, z. B. eine Tabelle für $\int_{-M}^{+M} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 39 und in der vorigen Auflage dieses Buches „Handb. d. Verm., 3. Aufl., I. Band 1888, S. 289—291 gegeben.

IV. Berührung zweiter Ordnung.

Wenn man zu den 3 Bedingungen, welche im vorigen Falle III gestellt wurden, auch noch als vierte Bedingung hinzunimmt, dass für $\varepsilon = M$ auch die zweite Ableitung $\frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} = 0$ werde, so kann man der Funktion y noch ein weiteres Glied geben, und man wird dadurch erhalten:

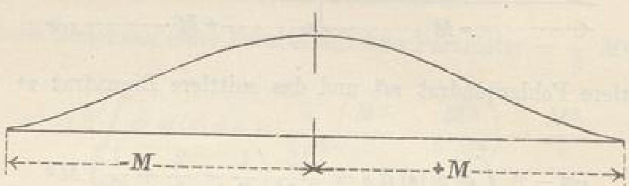
$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{35}{32\,M}\left(1 - 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4 - \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^6\right) = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^3 \tag{11}$$

Hiernach ist berechnet:

$\frac{\varepsilon}{M}$	$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^3$
0,0	1,0000
0,2	0,8847
0,4	0,5927
0,6	0,2621
0,8	0,0466
1,0	0,0000

Damit ist die folgende Kurve (Fig. 4.) aufgezeichnet.

Fig. 4.
Fehlerkurve mit Berührung zweiter Ordnung.



Aus der Funktion (11) wird auch wieder m^2 und ν^4 bestimmt:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{35}{16\,M}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) M^3$$

$$m^2 = \frac{1}{9} M^2 \quad , \quad m = \frac{1}{3} M \quad , \quad M = 3\,m \tag{12}$$

$$\nu^4 = 2\int \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{35}{16\,M}\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{7} + \frac{3}{9} - \frac{1}{11}\right) M^5$$

$$\nu^4 = \frac{1}{33} M^4 \qquad \nu^4 = 0{,}03030\, M^4$$

$$\nu^4 = \frac{1}{33}\, 81\, m^4 = \frac{27}{11} m^4 = 2{,}4545\, m^4 \tag{13}$$

Die Fortsetzung dieser Entwicklungen giebt für Berührung von der n^{ten} Ordnung:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\,\frac{3\,.\,5\,.\,7 \ldots 2n+1}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots 2n}\,\frac{1}{M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^n \tag{14}$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{5 + 2n}\ , \quad \frac{\nu^4}{M^4} = \frac{3}{(5 + 2n)\,(7 + 2n)} \tag{15}$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\,m^4}{\nu^4} - 1\right) \tag{16}$$

Wenn man mittelst (15) $M^2 = (5 + 2n)\, m^2$ in (14) einsetzt, und auch m selbst durch (17) S. 432 in h ausdrückt, so wird (14):

$$y = \frac{3\,.\,5\,.\,7 \ldots 2n+1}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots 2n}\,\frac{h}{\sqrt{10 + 4n}}\left(1 - \binom{n}{1}\varepsilon^2\,\frac{2h^2}{5 + 2n} + \ldots\right) \tag{17}$$

Mit $n = \infty$ geht der Faktor vor der Klammer über in $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, wegen des Wallisschen Ausdruckes für π (Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 489), und die Reihe in der Klammer wird als Exponentialreihe (S. 434) gleich $e^{-h^2 \varepsilon^2}$ und damit geht mit $n = \infty$ der Ausdruck (17) über in die Fehlerfunktion (13) S. 430.

§ 121. Der Maximalfehler.

Schon die allerersten Betrachtungen über das Wesen der Beobachtungsfehler (vgl. § 3. S. 11) führen darauf, dass diese Fehler zwar unvermeidlich, aber in gewisse *Grenzen* eingeschlossen sind, welche sie nur überschreiten können beim Auftreten sogenannter grober Fehler, die aber von aller Theorie ausgeschlossen sind.

Im Gegensatz hiezu nimmt die allgemein anerkannte Fehlertheorie, die wir in § 111. entwickelt haben, an, es bestehen keine endlichen Fehlergrenzen, sondern die Grenzen Unendlich nach beiden Seiten, $-\infty$ und $+\infty$.

Wenn man daher das Fehlergesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ auf gewöhnliche Beobachtungsfehler anwendet, so begeht man eine Inkonsequenz, denn z. B. die Wahrscheinlichkeit, bei der Winkelmessung mit einem guten Theodolit einen Fehler von 1° zu begehen, ist ohne Frage = Null und nicht ein Wert, der von der Null verschieden ist.

Dieser Inkonsequenz muss man sich klar bewusst sein, und man darf das theoretische Fehlergesetz nur als eine Annäherung an die Wirklichkeit, niemals aber als das Gesetz der wirklichen Beobachtungsfehler selbst betrachten.

Als Analogie zu der Ungültigkeit des theoretischen Fehlergesetzes ausserhalb gewisser Grenzen möchten wir ein Fortpflanzungsgesetz anderer Art betrachten, welches ebenfalls innerhalb enger Grenzen gilt, aber auf weitere Ausdehnung völlig unzutreffend wird:

Ein Mäuse-Paar oder ein Paar anderer sich rasch vermehrender Tiere, Kaninchen oder dergleichen, möge in 1 Jahr eine Nachkommenschaft von M Paaren erzeugen, welche im nächsten Jahre selbst fortpflanzungsfähig sind, und daher nach dem Schlusse des zweiten Jahres eine Anzahl von M^2 neue Paare hinterlassen. Wenn das so fortgeht, so würde nach n Jahren eine Anzahl von M^n solcher Paare vorhanden sein, d. h. wenn n nur einigermassen gross ist, würden bei Mäusen, Kaninchen u. s. w. nach diesem Gesetze bald Millionen und Milliarden von Nachkommen vorhanden sein. Wenn nicht vernichtende Kräfte einwirken, so tritt solch masslose Vermehrung in der That ein (z. B. Kaninchen-Plage in Australien), im Allgemeinen aber wird der Vermehrung der Tiere bald kräftig entgegengewirkt durch die zahlreichen Feinde jener Tiere, namentlich die Vernichtung durch den Menschen; und das Gesetz der Vermehrung M^n mag zwar durch einige Generationen wirksam sein, (mit bereits auf mittlere Vernichtung gültigem M), aber die Millionen- und Milliarden-Vermehrung tritt thatsächlich nicht ein.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Beobachtungsfehlern: das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ gilt für kleine Werte ε, etwa innerhalb des mittleren Fehlers $\varepsilon = M$ jedenfalls, aber darüber hinaus, schon bei $\varepsilon = 2\,m$, $\varepsilon = 3\,m$ und vollends $\varepsilon > 3\,m$ sind so viele Vernichtungskräfte für die Fehler vorhanden, dass sehr grosse Fehler überhaupt nicht mehr zu stande kommen können.

Um die Unmöglichkeit sehr grosser Fehler, etwa über dem 5—10fachen mittleren Fehler, nachzuweisen, wollen wir das dem Geodäten am nächsten liegende Beispiel der Winkelsumme eines Dreiecks ($\alpha + \beta + \gamma$, bezw. $\alpha + \beta + \gamma +$ sph. Excess) betrachten.

Zuerst kommen die Teilungsfehler der Theodolitkreise in Frage, allein schon diese Kreise sind, *ehe* sie der Geodät in die Hand bekommt, schon so gründlich kontrolliert, dass die Fehler nur ein gewisses Durchschnittsmass, aber nicht darüber erreichen können. Jeder Mechaniker weiss schon aus dem Verlaufe der Teilungs-Arbeit, ob der Kreis für gewisse Zwecke zulässig ist oder nicht; er wird zum mindesten den Kreis, ehe er ihn abliefert, nochmals summarisch durchgehen, ob er ihn ohne Schaden für sein Geschäft abliefern kann. Sollte aber auch das nicht sein, so würde doch der ausübende Geodät, schon nach den ersten Wochen, etwaige starke Fehler selbst finden, den Kreis zurückschicken und die etwa bereits damit gemachten Messungen streichen.

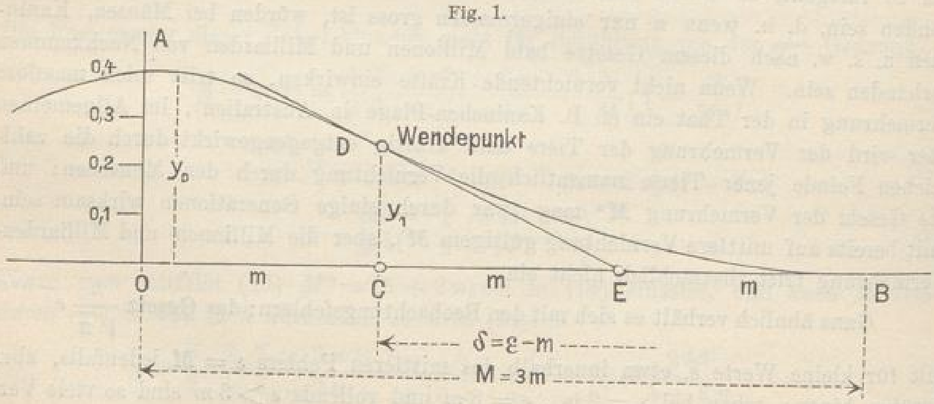
Sei nun der Kreis innerhalb gewisser Grenzen richtig, dann wird auch der Geodät schon im Felde etwaige vorstehende Abweichungen seiner Ablesungen entdecken, dann in der Berechnung seiner Satzmittel u. dergl. wird er starke Messungsfehler finden; er wird — auch bei strengster Objektivität — sehr starke Fehler unbarmherzig ausmerzen. Sollte ein solcher Fehler, etwa gleich dem 10fachen mittleren Fehler, sich bis zur Zusammenstellung der Dreieckssummen durchwinden, so wird nach dem Auftreten desselben nochmals eine Revision bis herunter zu der Aufschreibung der Ablesungen in den Feldbüchern stattfinden, und — ein Grund zum Ausscheiden *wird gefunden werden,* auch bei Wahrung der strengsten Unparteilichkeit. —

Wir wollen unterlassen, all diese Einzelheiten noch weiter zu verfolgen. Jeder Praktiker weiss, dass starke Fehler die zahlreichen Kontrollstationen geodätischer Messung und Berechnung einfach nicht passieren *können.*

Dieses eine Beispiel mag genügen zur Begründung des Satzes, dass das gewöhnliche Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ als strenges Gesetz nur gültig ist für Fehler ε kleiner als der mittlere Fehler m, oder gleich demselben und wenig darüber hinaus, dass aber für ε grösser als m ein *anderes* allmählich von dem ersten $\varphi(\varepsilon)$ abweichendes Gesetz zur Geltung kommt.

Dieses hat uns dazu geführt, in der nachfolgenden Fig. 1. eine Fehlerkurve

Fig. 1.



zu betrachten, welche aus zwei Teilen zusammengesetzt ist, nämlich erstens aus einem Teil AD nach der Gauss schen Funktion von § 111, und zweitens einem Teile DB, welcher in D die erste Kurve AD und in B die Achse berührt, und zwar sollen die beiden Berührungen in D und in B nicht bloss von erster, sondern von zweiter Ordnung sein.

Für den Kurventheil AD haben wir nach § 111:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{2}$$

$$\frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \left(1 - 2h^2 \varepsilon^2\right) \tag{3}$$

Die zweite Abteilung gleich Null gesetzt giebt die Wendepunktsabscisse, welche nach (17) § 111. S. 432 gleich dem mittleren Fehler ist, nämlich:

$$OC = m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad , \quad \text{oder} \quad h^2 = \frac{1}{2m^2} \tag{4}$$

Die Scheitel-Ordinate wird mit $\varepsilon = 0$:

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} = \frac{0,39894}{m} \tag{5}$$

Die Wendepunkts-Ordinate mit $\varepsilon = m$ wird

$$y_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m\sqrt{2e\pi}} = \frac{0,24197}{m} \tag{6}$$

Die Wendepunkts-Tangente giebt mit $\varepsilon = m$:

$$\left.\frac{dy}{d\varepsilon}\right]_1 = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} m e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{y_1}{m} \tag{7}$$

Diesem entspricht in Fig. 1. die Tangente DE, welche den Punkt E im Abstande $CE = m$ liefert.

Nun soll eine Kurve DB so gelegt werden, dass sie in D und in B Berührung zweiter Ordnung hat. Man wird dieses durch Rechnung mit unbestimmten Coefficienten erzielen, mit dem Ergebnis:

$$y = y_1 \left(1 - \frac{\delta}{m} + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^3 - \frac{1}{16}\left(\frac{\delta}{m}\right)^4\right) \tag{8}$$

dabei sind die Abscissen δ von C an gezählt, also $\delta = \varepsilon - m$. Die Gleichung (8) giebt:

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{y_1}{m}\left(-1 + \frac{3}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^3\right) \tag{9}$$

$$\frac{d^2 y}{d\delta^2} = \frac{y_1}{m^2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\delta}{m}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2\right) \tag{10}$$

Man überblickt alsbald, dass die Gleichung (8) mit (9) und (10) den vorher ausgesprochenen Bedingungen der Kurve DB von Fig. 1. entspricht.

Hiezu wollen wir zuerst den Maximalwert von δ bestimmen, welcher $y = 0$ macht; es ist $\delta = 2\,m$, wie sich aus (8) erprobt, nämlich:

$$y = y_1 \left(1 - 2 + \frac{8}{4} - \frac{16}{16}\right) = 0$$

Es ist also:

$$\delta_{max} = 2\,m \quad \text{und}\; \varepsilon_{max} = M = 3\,m \tag{11}$$

Als Probe für die Berührungen in D und B hat man aus (9) mit $\delta = 0$ denselben Wert wie früher (7) und mit $\delta = 2\,m$ giebt (9) den Wert Null. Ferner (10) wird = Null erstens mit $\delta = 0$ und zweitens mit $\delta = 2\,m$.

Als Hauptergebnis wollen wir die Beziehung (11) mit $M = 3\,m$ betrachten; d. h. wenn man die Gausssche Funktion $\varphi(\varepsilon)$ nur bis $\varepsilon = m$ gelten lässt, und dann eine Funktion anschliesst, welche als Kurve betrachtet nicht asymptotisch ausläuft, sondern die Achse mit Berührung zweiter Ordnung erreicht, so wird der Maximalfehler M gleich dem *drei*fachen mittleren Fehler.

Um hieraus einen Rückschluss auf die Verhältnisse wirklicher Beobachtungsfehler zu ermöglichen, müssen wir zuerst allgemein die Kurve als *Bild* irgend einer Erscheinung auffassen, wie bei graphischen Darstellungen der Technik, der Statistik u. s. w. täglich geschieht.

Eine unbegrenzt der Null sich nähernde Funktion ist unserem geistigen Vorstellungsvermögen viel schwieriger auszudenken, als eine asymptotisch auslaufende Kurve mit dem physischen Auge erfasst wird. Das geometrische Asymptotenbild erleichtert uns den *vorher* geschaffenen Begriff des unbegrenzten Abnehmens mit geistigem Auge zu erfassen. Umgekehrt muss für einen *neuen* Begriff, für welchen ein abstrakter Ausdruck fehlt, das Kurvenbild aushelfen.

In diesem Sinne sagen wir, die berührende Kurve $D\,B$ erleichtert uns die Vorstellung eines allmählichen Abweichens von dem abstrakten Gaussschen Fehlergesetz, und in demselben Sinne sind auch die Kurven von § 120 aufzufassen.

Nun kann aber das Verhältnis $M : m$, welches, in Fig. 1. S. 464, = 3 angenommen wurde, *überhaupt nicht allgemein bestimmt werden*, ebensowenig, als die Konstante h des Fehlergesetzes (1) allgemein bestimmbar ist. Wie jeder Beobachtungsart eine gewisse Genauigkeitskonstante h zukommt, ebenso hat auch jede Beobachtungsbehandlung ein gewisses Verhältnis $M : m$. Je gewissenhafter und objektiver ein Beobachter ist, desto grösser wird bei ihm $M : m$ werden, und je mehr in einer Beobachtungstabelle grosse Fehler ausgeschieden wurden, — bewusst oder unbewusst — desto kleiner wird $M : m$ sein.

Es kommt nun darauf an, dieses mathematisch zu fassen, und dazu scheinen uns die mittleren Fehlerbiquadrate $\nu^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n}$ geeignet zu sein.

Im Gaussschen Fehlergesetz ist $\nu^4 : m^4 = 3$ (nach (15) § 116. S. 447), und dabei sind Fehler ε von Null bis Unendlich angenommen, werden aber die grossen Fehler von einer gewissen Grenze an ausgeschieden, so drückt das auf die Biquadrate ε^4 viel stärker als auf die Quadrate ε^2, und das Verhältnis $\nu^4 : m^4$ wird in diesem Fall *kleiner* als 3 werden; oder das Verhältnis $\nu^4 : m^4$ im Allgemeinen wird einen Massstab für das Ausscheiden grosser Fehler abgeben.

Aus den theoretischen Fehlergesetzannahmen von § 120. bilden wir folgende Vergleichung:

1) Rechteck S. 459	$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$	$\frac{\nu^4}{m^4} = \frac{9}{5} = 1{,}8000$
2) Parabel S. 460	„ $\frac{1}{5} = 0{,}2000$	„ $\frac{15}{7} = 2{,}1429$
3) Berührung 1. Ordnung S. 461	„ $\frac{1}{7} = 0{,}1429$	„ $\frac{7}{3} = 2{,}3333$
4) „ 2. „ S. 462	„ $\frac{1}{9} = 0{,}1111$	„ $\frac{27}{11} = 2{,}4545$
5) Asymptote S. 447	„ $\frac{1}{\infty} = 0{,}0000$	„ $\frac{3}{1} = 3{,}0000$

Der Anblick dieser Zahlen, und mehr noch ihre Darstellung in einer Kurve, giebt zweifellos zu erkennen, dass das Verhältnis $\frac{m^2}{M^2}$ in einer gewissen Beziehung zu dem anderen Verhältnis $\frac{\nu^4}{m^4}$ steht, welche bereits in (16) § 120. S. 462 allgemein gegeben ist durch die Gleichung:

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\,m^4}{\nu^4} - 1\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2}\frac{m^4}{\nu^4}\left(3 - \frac{\nu^4}{m^4}\right) \tag{12}$$

Wir denken uns eine Beobachtungsart, welche in Hinsicht auf $M:m$ untersucht werden soll, irgend einer der unendlich vielen Funktionen (14) S. 462 angepasst durch Vermittung des Verhältnisses $m^4:\nu^4$ nach der vorstehenden Gleichung (12).

Zu einer ersten Anwendung dieser Theorie wollen wir die 22 Dreiecksschlussfehler benützen, welche in § 3. S. 12. mitgeteilt sind. Wenn man dieselben quadriert und biquadriert, so erhält man:

$$m^2 = \frac{30{,}52}{22} = 1{,}387 \qquad \nu^4 = \frac{70{,}02}{22} = 3{,}183$$

$$m^4 = 1{,}924 \qquad \frac{\nu^4}{m^4} = 1{,}654$$

$$m = 1{,}178 \qquad 3 - \frac{\nu^4}{m^4} = 1{,}346$$

Damit nach (12): $\frac{m^2}{M^2} = 0{,}407$

$$\frac{m}{M} = 0{,}638 \qquad \frac{M}{m} = 1{,}568 \tag{13}$$

Da $m = 1{,}178$ ist, müsste also $M = 1{,}568 \times 1{,}178 = 1{,}847$ werden, und in der That ist der grösste Wert auf S. 12, mit der Nummer 14, $\varepsilon_{max} = +1{,}86''$, also sehr nahe dem theoretischen 1,847.

Das Verhältnis $M:m = 1{,}568$ ist hier erheblich kleiner als das Verhältnis $M:m = 3$, welches für asymptotisches Fehlergesetz gilt, und man kann daraus auf Ausscheidungen der grossen Fehler schliessen.

Auch schon das Verhältnis des mittleren Fehlers m zum durchschnittlichen Fehler t lässt sich in solcher Weise verwerten, dieses Verhältnis ist im Falle unserer 22 Dreiecksschlüsse (vgl. S. 22) $m:t = 1{,}18:1{,}03 = 1{,}15$, während für das asymptotische Fehlergesetz dieses Verhältnis $= 1{,}25$, also grösser sein soll, woraus abermals auf Ausmerzung der grössten Fehler, welche in m stärker ins Gewicht fallen würden, geschlossen werden kann, jedoch mit geringerer Sicherheit als bei Benützung von ν^4 und m^4. Ausser den 4ten Potenzen könnten auch noch die 6ten, 8ten u. s. w. Potenzen von ε zugezogen werden.

Mag unsere vorstehende Gleichung (12) so bleiben, oder noch weiter behandelt werden, jedenfalls haben wir in der Vergleichung der Werte $m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$ und $\nu^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n}$ einen ersten Weg zur Auffindung des bis jetzt von aller Theorie ausgeschlossen gewesenen Maximalfehlers eröffnet.

Wenn zu den vielen Tausenden von Dreiecksschlussfehlern w, welche in dem nachfolgenden § 123. u. ff. zu berichten sein werden, nicht bloss die Mittelwerte $\frac{[w^2]}{n}$ sondern auch noch $\frac{[w^4]}{n}$ ausgerechnet würden, so könnte daran unsere Theorie der Gleichung (12) erprobt werden. —

Kapitel V.

Genauigkeit der Triangulierungen. Geschichtliche Abrisse.

§ 122. Allgemeines.

Die Frage nach der Genauigkeit der Messungen und die Beantwortung dieser Frage ist der Anfang und das Ende aller feineren geodätischen Untersuchungen, und zur Gewinnung eines Urteils über solche Fragen ist es von besonderer Wichtigkeit, die Werke der Vergangenheit in Hinsicht auf die erstrebte und die erreichte Genauigkeit zu studieren.

Wie wir schon in der Einleitung S. 8 bemerkt haben, sind die Genauigkeits-Untersuchungen in der früheren geodätischen Litteratur viel zu wenig gepflegt worden.

Vor etwa 30 Jahren, zu Beginn der Europäischen Gradmessung, diente als Anhaltspunkt zur geodätischen Genauigkeitsschätzung eine gelegentliche Bemerkung von General Baeyer in seinem „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche“ 1862, S. 79, nämlich: „den wahrscheinlichen Fehler der besten Winkelmessungen können wir nicht unter $\frac{1}{4}$ Sekunde annehmen.“ Die Gradmessung in Ostpreussen bot gar keine Genauigkeitsberechnung, und die „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen in Baeyers berühmter „Küstenvermessung“, erwies sich beim ersten Blick im Sinne der M. d. kl. Q. als unzutreffend.

Über die klassischen Messungen von Gauss in Hannover war nichts bekannt.

Ebenso war es in Süddeutschland. Über die Bayerische Triangulierung, das geodätische Hauptwerk Deutschlands im Anfang des Jahrhunderts, gab die Bayerische Litteratur, in welcher man nachzuschlagen berechtigt war, nur unbestimmte Auskunft über „befriedigende Übereinstimmung“ oder dergl. Auch das amtliche Württembergische Landesvermessungswerk ging allen Genauigkeitsfragen entweder geflissent-