Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 111. Fehler-Wahrscheinlichkeits-Funktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

von Fehlern und engen Intervallen wird man wohl annehmen dürfen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers *proportional* der Grösse des Intervalls ist, innerhalb dessen er gerechnet wird.

Indem wir nun das Ergebnis dieser Betrachtungen in die Formen der Analysis bringen wollen, bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε durch $W(\varepsilon)$ und da diese Wahrscheinlichkeit abhängig sein soll von der Grösse von ε, was analytisch durch eine Funktion von ε etwa $\varphi(\varepsilon)$ ausgedrückt sei, und da ferner die Wahrscheinlichkeit proportional dem Intervall sein muss, das mit $d\varepsilon$ bezeichnet sein soll, müssen wir setzen:

$$\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion: } \varphi(\varepsilon) \tag{2}$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit: } W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{3}$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε mit dem Intervall $d\varepsilon$, also z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler ε liege zwischen den Grenzen

$$\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$$

oder auch $\varepsilon - d\varepsilon$ und ε

" " ε und $\varepsilon + d\varepsilon$.

Je enger man die Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ zusammenzieht, um so kleiner wird $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und nimmt man $d\varepsilon$ unendlich klein, so wird auch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ d. h. die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Fehler ε zu begehen, unendlich klein. Wir machen die Annahme, es sei $d\varepsilon$ unendlich klein, im Sinne der Differentialrechnung und damit können wir die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen irgend welchen Grenzen nach dem Satz von der Summe der Wahrscheinlichkeiten § 109. S. 424 bestimmen.

Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε gegeben durch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und für einen Fehler ε' durch $\varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon$, ebenso für ε'' durch $(\varphi\, \varepsilon'')\, d\varepsilon$ und denkt man sich die Fehler $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$ je mit dem Intervall $d\varepsilon$ an einander gereiht, so ist die Wahrscheinlichkeit irgend *einen* Fehler aus dieser Reihe zu treffen, gleich der Wahrscheinlichkeit, entweder den Fehler ε *oder* den Fehler ε' *oder* den Fehler ε'' u. s. f. zu treffen, d. h. nach dem Satze (2) S. 424 ist es die Summe aller dieser Einzelwahrscheinlichkeiten und endlich wenn $d\varepsilon$ unendlich klein ist, tritt an die Stelle der Summe das bestimmte Integral, und wir können daher nun sagen, die Wahrscheinlichkeit einen Fehler zwischen gegebenen Grenzen a und b zu begehen, ist:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{5}$$

§ 111. Fehler-Wahrscheinlichkeits-Funktion.

Um zur Bestimmung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zu gelangen, betrachten wir zuerst die Grenzwerte von ε.

Wie schon bei der Beobachtungsreihe (1) § 110. S. 426 angegeben wurde, hat die Erfahrung gezeigt, dass kleine Fehler wahrscheinlicher sind als grössere, woraus wir schliessen, dass die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 0$ ihr Maximum haben muss, d. h.:

$$\varphi(0) = \text{Maximum} \tag{1}$$

Ausser der unteren Grenze $\varepsilon = 0$ betrachten wir die obere Grenze. Ohne Zweifel giebt es für jede Beobachtungsart eine gewisse Grenze, welche von den Fehlern nicht überschritten werden kann; da aber diese Grenze sich nicht allgemein angeben lässt, wird in der allgemeinen Fehlertheorie die denkbar äusserste Grenze, nämlich Unendlich, angenommen, und zwar nach beiden Seiten, $-\infty$ und $+\infty$.

Für diese Grenzen muss die Fehlerwahrscheinlichkeit gleich Null werden, also:

$$\varphi(\pm\infty) = 0 \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liege, ist die Gewissheit $= 1$; wenn man also in der Gleichung (5) am Schlusse des vorigen § 110. S. 427 $a = -\infty$ und $b = +\infty$ setzt, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \tag{3}$$

Als zweite Bedingung, welcher die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ genügen soll, nehmen wir an, es soll dieselbe so beschaffen sein, dass, ihr zu Folge, das arithmetische Mittel mehrerer gleich genauer Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse ist. Wenn also mehrere Beobachtungen einer Unbekannten die Werte $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ gegeben haben, und man nimmt an, es sei x der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten, so muss man damit auch annehmen, dass folgende Fehler als wahrscheinlichste begangen wurden:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = x - l_1 \\ \varepsilon_2 = x - l_2 \\ \varepsilon_3 = x - l_3 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\} \tag{4}$$

Nun soll die Wahrscheinlichkeit von x und damit die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \ldots$ ein Maximum werden. Diese letztere Wahrscheinlichkeit haben wir bereits in dem Satze von dem Produkt von Wahrscheinlichkeiten bei (4) § 109. S. 425 behandelt; wir wissen von dort, dass diese Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ ist, d. h.:

$$W(x) = \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon \,.\, \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon \,.\, \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon \ldots = \text{Maximum}.$$

Da man das Maximum eines Produktes bequemer in logarithmischer Form behandelt, bilden wir hieraus:

$$\log \varphi(\varepsilon_1) + \log \varphi(\varepsilon_2) + \log \varphi(\varepsilon_3) + \ldots = \text{Maximum}.$$

Das Maximum soll in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x erzielt werden, man müsste also die vorstehende Logarithmen-Summe nach x differentiieren, da aber wegen (4) auch $dx = d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 \ldots$ ist, schreiben wir nun:

$$\frac{d \log \varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} + \frac{d \log \varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} + \frac{d \log \varphi(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3} + \ldots = 0 \tag{5}$$

Da die ε nach (4) einem arithmetischen Mittel x angehören, muss ihre Summe $=$ Null sein, d. h.:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots = 0 \tag{6}$$

Diese Gleichung (6) und die vorhergehende (5) können für beliebig viele ε (mehr als zwei) nur dann allgemein zusammen bestehen, wenn folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{d \log \varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = k\,\varepsilon_1 \quad , \quad \frac{d \log \varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} = k\,\varepsilon_2 \quad , \quad \frac{d \log \varphi(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3} = k\,\varepsilon_3 \ldots$$

oder es muss allgemein gültig sein:

$$\frac{d \log \varphi(\varepsilon)}{d \varepsilon} = k \varepsilon$$

oder integriert:

$$\log \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2 + C$$

wobei C Integrations-Konstante ist. Wenn log natürliche Logarithmen mit der Basis e bedeutet, so folgt hieraus:

$$\varphi(\varepsilon) = e^{\left(\frac{1}{2} k \varepsilon^2 + C\right)} = e^C e^{\frac{1}{2} k \varepsilon^2}$$

Die Konstante k muss notwendig negativ sein, weil nach (1) die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 0$ ihren grössten Wert hat, und von da an immer abnimmt, wir schreiben daher:

$$\frac{1}{2} k = -h^2$$

Zugleich können wir die Integrations-Konstante e^C kürzer $= A$ bezeichnen und haben daher:

$$\varphi(\varepsilon) = A e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{7}$$

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Integrations-Konstanten A; wozu die noch unbenützte Bedingung (3) für das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ dient, nämlich:

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 1$$

mit $h \varepsilon = t$, also $d \varepsilon = \frac{d t}{h}$, was die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ unverändert lässt, wird dieses:

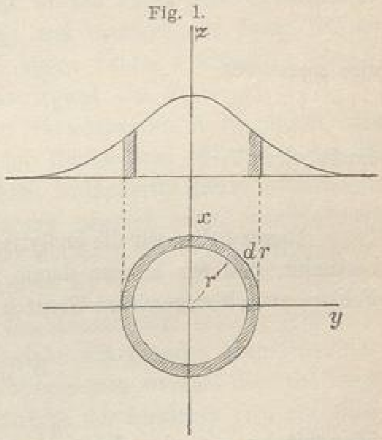
$$\frac{A}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d t = 1 \tag{8}$$

Um dieses bestimmte Integral auszuwerten, nehmen wir eine geometrische Betrachtung zu Hilfe:

Durch Fig. 1. sei eine Umdrehungsfläche dargestellt, deren Gleichung ist:

$$z = e^{-(x^2 + y^2)} \quad \text{oder} \quad z = e^{-r^2} \tag{6}$$

Fig. 1.



Um das Volumen zu bestimmen, welches zwischen der krummen Fläche und der $x\,y$ Ebene sich befindet, schlagen wir zwei verschiedene Wege ein:

Erstens giebt die Zerlegung nach $d\,x$ und $d\,y$ das Flächendifferential:

$$d V = d x d y z$$

also

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{-(x^2+y^2)} d x\, d y = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{-x^2} e^{-y^2} d x\, d y$$

wobei die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ sich auf beide Integrationen beziehen.

Indem man zuerst nach x und dann nach y integriert, hat man:

$$V = \int e^{-x^2} \left(\int e^{-y^2} d\,y \right) d\,x \quad \text{oder} \quad V = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} d\,x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} d\,y$$

Da in einem bestimmten Integral die Bezeichnung der ursprünglichen Veränderlichen mit x, y oder t unwesentlich ist, können wir dafür auch schreiben:

$$V = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d\,t \right)^2 \tag{9}$$

Zweitens kann man auch eine Zerlegung nach Cylinder-Elementen vornehmen und hiezu ist nach Fig. 1. S. 429 die Kreisringfläche in der $x\,y$ Ebene $= 2\,r\,\pi\,d\,r$, also das Volumen eines Hohlcylinders vom Halbmesser r, der Dicke $d\,r$ und der Höhe z:

$$d\,V' = 2\,r\,\pi\,d\,r\,z = 2\,r\,\pi\,d\,r\,e^{-r^2}$$

daraus das Gesamt-Volumen:

$$V = \int d\,V' = 2\,\pi \int\limits_0^{\infty} r\,e^{-r^2} d\,r \tag{9a}$$

Hier ist das allgemeine Integral:

$$\int r\,e^{-r^2} d\,r = -\frac{1}{2}\,e^{-r^2}$$

es lässt sich also auch das bestimmte Integral angeben, nämlich mit der oberen Grenze $r = \infty$ und der unteren Grenze $r = 0$:

$$\int\limits_0^{\infty} r\,e^{-r^2} d\,r = \left(-0 - (-\frac{1}{2}) \right) = +\frac{1}{2} \tag{10}$$

folglich wegen (9a):

$$V = \pi \tag{10a}$$

Die Vergleichung von (9) und (10a) giebt:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d\,t = \sqrt{\pi} \tag{11}$$

also wegen (8):

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \tag{12}$$

damit wird (7):

$$\varphi\,(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{13}$$

Damit haben wir die analytische Form der gesuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion bestimmt, und wir können damit auch die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen gewissen Grenzen a und b angeben, nämlich nach (5) § 110. S. 427:

$$W\binom{b}{a} = \int\limits_a^b \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon$$

oder mit $h\,\varepsilon = t$, also $d\,\varepsilon = \frac{d\,t}{h}$, wodurch die Grenzen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ in $t = a\,h$ und $t = b\,h$ übergehen:

$$W\binom{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a\,h}^{b\,h} e^{-t^2} d\,t \tag{14}$$

In unseren Schlussformeln (13) und (14) ist noch eine Konstante h geblieben, welche nicht wie die Integrations-Konstante A durch irgend welche Nebenbedingung allgemein bestimmt werden kann, sondern in den allgemeinen Formeln als eine Art Parameter bleiben muss. Diese Konstante h hängt nämlich von der Art der jeweiligen Beobachtung, d. h. von der *Genauigkeit* ab, und es ist auch an sich ganz begreiflich, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε durchaus nicht bloss von der Grösse ε (und dem Intervall $d\,\varepsilon$) allein abhängen kann, sondern auch auf die Genauigkeit der Messungsart Rücksicht nehmen muss. Die Konstante h, welche in der angedeuteten Weise von der Genauigkeit abhängt, nennt man die Genauigkeitszahl.

Bestimmung der Konstanten h.

Bei einer Beobachtungsart, welche die Genauigkeit h hat, sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Fehler $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ entstehen, bzw. die folgenden:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_1^2} d\,\varepsilon\ ,\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_2^2} d\,\varepsilon\ ,\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_3^2} d\,\varepsilon \quad \text{u. s. w.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, diese sämtlichen Fehler ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$ bei einer Beobachtungsreihe zusammen zu erhalten, ist nach (4) § 109. S. 425 das Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten. Diese Wahrscheinlichkeit ist also bei n Beobachtungen proportional dem Ausdruck:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 \varepsilon_1^2 - h^2 \varepsilon_2^2 - h^2 \varepsilon_3^2 - \ldots}$$

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon^2]} \tag{15}$$

wobei, wie sonst, mit $[\varepsilon^2]$ die Summe $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \ldots$ bezeichnet ist.

Um hieraus h zu bestimmen, ist eine Schlussfolge der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden in dieser Weise:

Das Fehlersystem ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$ ist erzeugt worden durch eine Beobachtungsart mit der Genauigkeitszahl h, welche als Ursache und massgebende Norm bei der Erzeugung der Fehler ε zu betrachten ist, so dass kleine Fehler ε auf einen grossen Wert h hindeuten und umgekehrt. Indessen kann irgend ein System $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$, da hier der Zufall mitspielt, möglicherweise von verschiedenen h herrühren, und namentlich wenn nur wenige ε vorliegen, wird der Rückschluss von den ε auf das wirksam gewesene h ein unsicherer sein. Der leitende Gedanke für diesen Rückschluss besteht darin, dass stets einem solchen h der Vorzug gegeben wird, welches mehr befähigt ist, oder an sich mehr Wahrscheinlichkeit darbietet für die Erzeugung des vorliegenden Fehlersystems $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ als ein anderes h.

Man hat also anzunehmen, dass eine solche Beobachtungsart bei der Erzeugung eines Fehlersystems $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ vorgelegen hat, welche mit grösster Wahrscheinlichkeit dieses Fehlersystem erzeugt; oder es muss angenommen werden, dass die Beobachtungen eine solche Genauigkeit h hatten, für welche der Ausdruck (15) ein Maximum wird, und man bestimmt h aus der Gleichung:

$$\frac{d\,W}{d\,h} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon^2]}}{d\,h} = 0$$

Die Ausführung dieser Differentiierung giebt, mit Weglassung des konstanten Nenners $\sqrt{\pi^n}$:

$$0 = \frac{d\left(h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}\right)}{d\,h} = n\,h^{n-1} e^{-h^2[\varepsilon^2]} + h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}(-2\,h\,[\varepsilon^2])$$

$$0 = h^{n-1} e^{h^2[\varepsilon^2]}\left(n - 2\,h^2\,[\varepsilon^2]\right)$$

Dieses Produkt kann nur = Null werden, wenn der Faktor in der Klammer = Null wird, also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{1}{2\,h^2} \tag{16}$$

Der hier zum Vorschein kommende Mittelwert $\frac{[\varepsilon^2]}{n}$ ist nichts anderes, als das Quadrat des uns schon längst bekannten mittleren Fehlers m, es ist also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2\,h^2}$$

$$\text{also } m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad \text{oder } h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \tag{17}$$

Setzt man dieses in (13) ein, so erhält man

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\,m^2}} \tag{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε ist:

$$W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon = \frac{1}{m\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\,m^2}}d\,\varepsilon \tag{19}$$

Nun wollen wir noch einführen:

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \quad \text{und} \quad \frac{d\,\varepsilon}{m} = d\,x \tag{20}$$

d. h. wir zählen die Fehler als Verhältniszahlen $\varepsilon : m$ oder in Einheiten des mittleren Fehlers m; damit wird:

$$W(\varepsilon) = W(m\,x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}d\,x \tag{21}$$

$$\text{oder } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{22}$$

Es ist für die Übersicht und auch sachlich am besten, alle weiteren Entwicklungen und Berechnungen in dieser letzten Form mit $\frac{\varepsilon}{m} = x$ zu führen, wobei also x eine reine Zahl und auch $\varphi(x)$ eine reine Zahl ist; indessen haben wir in Folgendem diese Form nur teilweise angewendet und sonst ε selbst nebst h eingeführt, um den Anschluss unserer Berechnungen an die seit *Gauss* üblichen Formen nicht zu verlieren (und zum Teil wegen der typographischen Schwierigkeiten der Formen (18)—(21)).

§ 112. Reihen-Entwicklungen und Fehlerkurven.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist nach (13) § 111. S. 430:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{1}$$