Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

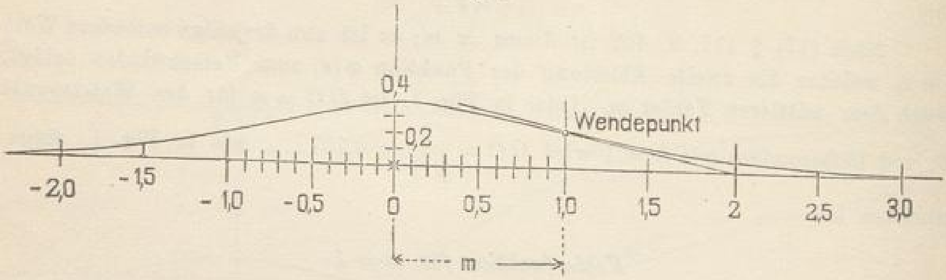
Stuttgart, 1895

§ 113. Der wahrscheinliche Fehler

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Hiernach ist die folgende Fig. 2. aufgetragen, welche im Vergleich mit der früheren verzerrten Fig. 1. S. 436 nun die Fehlerfunktion sozusagen in natürlichen Verhältnissen darstellt. (Die Wendepunkts-Tangente ist leider im Holzschnitt schlecht ausgefallen.)

Fig. 2.



§ 113. Der wahrscheinliche Fehler.

Der besondere Wert $W\binom{a}{0} = 0{,}5$, welcher im vorigen § 112. bei der Tabelle von S. 434 betrachtet wurde, führt zur Einführung eines neuen Begriffs, nämlich des wahrscheinlichen Fehlers.

Wenn nämlich die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen 0 und a den Wert 0,5 hat, so muss die Wahrscheinlichkeit für das Fallen zwischen die Grenzen a und ∞ ebenfalls $= 0{,}5$ sein, weil für das Fallen zwischen die äussersten Grenzen 0 und ∞ die Gesamtwahrscheinlichkeit $= 1$ ist. Bezeichnen wir also den besonderen Wert von a, für welchen dieses stattfindet, mit r, so haben wir:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = W\binom{\infty}{r}$$

Der dadurch bestimmte Wert r heisst der „*wahrscheinliche Fehler*". Derselbe stellt die Grenze vor, unter welcher ebenso viele kleinere Fehler zu erwarten sind, als grössere über ihr.

Der wahrscheinliche Fehler r wird mit Hilfe der Reihe (6) § 112. S. 434 dadurch bestimmt, dass jene Reihe den Wert $= \frac{1}{2}$ geben muss, wenn $a = r$ wird, d. h.:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(r\,h - \frac{(r\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(r\,h)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(r\,h)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(r\,h)^9}{9\,.\,4!} - \cdots\right) \tag{1}$$

da r hier immer zusammen mit h vorkommt, wird das Produkt $r\,h$ besonders bezeichnet, nämlich:

$$r\,h = \varrho \tag{2}$$

und damit giebt vorstehende Gleichung folgende Bestimmung für ϱ:

$$\varrho - \frac{\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^5}{10} - \frac{\varrho^7}{42} + \frac{\varrho^9}{216} - \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots$$

Um diese Gleichung nach ϱ aufzulösen, hat man in erster Näherung:

$$\varrho = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots \quad = p$$

wobei lediglich zur Abkürzung vorübergehend das Zeichen p eingeführt ist. Indem dann auch in erster Näherung $\varrho^3 = p^3$ gesetzt wird, hat man in zweiter Näherung:

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3}$$

weiter $$\varrho^3 = p^3 + 3\,p^2 \frac{p^3}{3} + \dots \quad = p^3 + p^5 \text{ und } \varrho^5 = p^5 + \dots$$

also $$\varrho - \left(\frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{3}\right) + \frac{p^5}{10} = p$$

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3} + \frac{7}{30} p^5 + \dots$$

So fortfahrend erhält man in nächster Näherungsstufe:

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3} + \frac{7}{30} p^5 + \frac{127}{630} p^7 + \dots$$

$$\varrho = 0{,}4431 + 0{,}0290 + 0{,}0040 + 0{,}0007$$

$$\varrho = 0{,}4768$$

Durch solche und ähnliche Näherungen, wozu namentlich auch die Benützung einer ausführlichen Tafel von der Art von § 112. S. 434 gehört, kann man den Wert ϱ mit beliebig weit getriebener Näherung berechnen. Nach Angabe von Gauss ist der Wert:

$$r\,h = \varrho = 0{,}476\,9363 \qquad log\,\varrho = 9.678\,4064 \tag{3}$$

(nach Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, Tübingen 1816 S. 194).

Nachdem somit der Zahlenwert von ϱ genau bestimmt ist, verfolgen wir die Bedeutung desselben weiter und nehmen nochmals die Gleichung (2) vor, nämlich:

$$r\,h = \varrho \quad \text{oder} \quad h = \frac{\varrho}{r} \tag{4}$$

Man sieht hieraus, dass h umgekehrt proportional dem wahrscheinlichen Fehler r ist; man nennt deswegen h die *Genauigkeitszahl*. Setzt man $h = 1$, so wird $r = \varrho$, d. h. es ist ϱ der wahrscheinliche Fehler für die Genauigkeitszahl 1.

Durch Einführung von $\frac{\varrho}{r}$ an Stelle von h in die Reihe (6) § 112. S. 434 kann man dieselbe auf eine mehr anschauliche Form bringen. Es wird damit:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{r}\varrho - \frac{1}{3.1!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^3 + \frac{1}{5.2!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^5 - \frac{1}{7.3!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^7 + \frac{1}{9.4!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^9 - \dots\right) \tag{5}$$

Das Verhältnis $\frac{a}{r}$ irgend eines Fehlers a zum wahrscheinlichen Fehler r bezeichnen wir mit n, und entsprechend nennen wir nun $W\binom{n\,r}{0}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen 0 und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt, damit nimmt (5) folgende Form an:

$$W\binom{n\,r}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(n\,\varrho - \frac{(n\,\varrho)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(n\,\varrho)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(n\,\varrho)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(n\,\varrho)^9}{9\,.\,4!} - \frac{(n\,\varrho)^{11}}{11\,.\,5!} + \dots\right) \tag{6}$$

oder mit Ausrechnung der Coefficienten:

$$W\binom{n\,r}{0} = 0{,}538\,1650\,n - 0{,}040\,8051\,n^3 + 0{,}002\,7846\,n^5 - 0{,}000\,1508\,n^7 \\ + 0{,}000\,0067\,n^9 - 0{,}000\,0002\,n^{11} + \dots \tag{7}$$

Eine Kontrolle dieser Gleichung besteht für den besonderen Fall $n = 1$, denn mit $n = 1$ muss sie den Wert 0,5 geben, was bis auf 7 Decimalstellen hinreichend der Fall ist.

Folgendes sind die genaueren Coefficienten-Logarithmen für die Formel (7):

$$[9.730\,9154]\,n - [8.610\,7149\,n^3 + [7.444\,7570]\,n^5 - [6.178\,428]\,n^7 + [4.824\,14]\,n^9 - [3.3949]\,n^{11} + \ldots \tag{8}$$

Im Anhang S. [20] haben wir eine Tafel der Funktionswerte (6), (7) zusammengestellt, d. h. der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen Null und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt. Diese Tafel ist aus der Tafel II von Encke im Berl. astr. Jahrb. 1834, S. 309—312 mit Weglassung der 5ten Decimale gebildet. Ein Teil der Tafelwerte wurde direkt nach den Formeln (6) und (7) nachgerechnet, und einzelne Werte nach der Bessel schen Originaltafel in dem Werk fundamenta astronomiae S. 36 und 37 bestimmt.

Die Encke sche Tafel ist auch abgedruckt und erläutert von Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 414—416 und S. 189.

Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittleren Fehler.

Wenn man die vorstehende Gleichung (4) mit der früheren Gleichung (17) § 111. S. 432 verbindet, so hat man

$$r\,h = \varrho \quad \text{und} \quad \frac{1}{h} = m\sqrt{2}$$

also

$$r = \varrho\sqrt{2}\,m \tag{9}$$

Dabei ist $\varrho\sqrt{2}$ ein konstanter Faktor, dessen Ausrechnung giebt:

$$\varrho\sqrt{2} = 0{,}674\,4898 \qquad \log \varrho\sqrt{2} = 9.828\,9754 \tag{10}$$

Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch Abzählen.

Hat man sich eine grössere Zahl gleichartiger wahrer Beobachtungsfehler auf irgend welche Art verschafft, und ordnet dieselben nach ihrer absoluten Grösse, so kann man denjenigen Grenzwert als wahrscheinlichen Fehler nehmen, welcher die Fehlerreihe so teilt, dass die Werte der einen Hälfte kleiner und die der anderen Hälfte grösser als er sind. Bei einer ungeraden Zahl von Fehlern nimmt man den in die Mitte fallenden Fehler und bei einer geraden Anzahl das Mittel der beiden in die Mitte fallenden Fehler als wahrscheinlichen Fehler. Wenn man z. B. die schon mehrfach benützten 18 Werte v von § 7. S. 23 nach ihrer Grösse ordnet, wie auf S. 426 geschehen ist, so hat man:

			Mitte			
	Erste Hälfte			Zweite Hälfte		
...	0,83	1,12		1,13	1,17	...

Die zwei in der Mitte liegenden Fehler sind 1,12 und 1,13, man nimmt also nach der gegebenen Regel 1,125 als wahrscheinlichen Fehler.

Offenbar ist diese Bestimmung eine sehr unsichere, denn es kommt dabei die absolute Grösse aller andern als gerade der in der Mitte liegenden Fehler nicht in Betracht. Die beste Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers ist immer diejenige nach (9), auf dem Wege über den mittleren Fehler m.

Der wahrscheinliche Fehler ist ohne das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit nicht zu bestimmen, während der mittlere Fehler ganz unabhängig von der Fehlerwahrscheinlichkeit besteht, wie aus der Einführung desselben in § 4. S. 13—15 hervorgeht. Man hat früher als charakteristisches Genauigkeitsmaass häufig (z. B. in der Astronomie) den wahrscheinlichen Fehler angegeben, in der Geodäsie meist den mittleren Fehler, nach Anweisung von Gauss selbst, welcher in dem „Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher" I. S. 435 sagt: „Die sogenannten wahrscheinlichen Fehler wünsche ich eigentlich, als von Hypothese abhängig, ganz proscribiert; man mag sie aber berechnen, indem man die mittleren Fehler mit 0,674 4897 multipliziert."

§ 114. Der durchschnittliche Fehler.

Auch dem schon in § 3. eingeführten, aber dann zurückgestellten durchschnittlichen Fehler können wir nun näher treten.

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε ist nach § 111 aus (3) S. 427 u. (13) S. 430:

$$W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon$$

Unter n Fällen wird daher der Fehler ε vorkommen in der Anzahl $n\, W(\varepsilon)$ und die Summe aller Fehler von dem Betrag ε ist daher:

$$n\, W(\varepsilon)\, \varepsilon = n\, \varepsilon \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon$$

das ist nun erst die Summe derjenigen Fehler, welche die besondere Grösse ε haben, und die Summe *aller* Fehler, welche *überhaupt* auftreten, ist daher:

$$[\varepsilon] = \int n\, \varepsilon \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon$$

Hiezu ist aber noch eine Überlegung zu machen, wegen der Vorzeichen der ε und wegen der Integrations-Grenzen. Wenn $[\varepsilon]$ nur für positive ε gelten soll, so müssen die Grenzen 0 und ∞ für die Integration genommen werden und für negative ε wären die Grenzen 0 und $-\infty$. Will man die positiven ε *und* die negativen ε ohne Rücksicht auf das Vorzeichen summieren, so darf man nicht etwa die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nehmen, weil sonst das Integral = Null würde, man bekommt aber den richtigen Wert für alle $\pm\varepsilon$, wenn man das Integral zwischen 0 und ∞ nimmt und dann verdoppelt, also:

$$[\pm\varepsilon] = 2\, n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon$$

$$\text{oder} \qquad \frac{[\pm\varepsilon]}{n} = t = 2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\,\varepsilon \tag{1}$$

Dabei ist mit t der durchschnittliche Fehler bezeichnet. Um dieses Integral auszurechnen, setzen wir $h\,\varepsilon = t$, also $\varepsilon = \frac{t}{h}$, $d\,\varepsilon = \frac{d\,t}{h}$, was die Grenzen unverändert lässt, also:

$$t = \frac{2\,h}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t\, e^{-t^2} d\,t \tag{2}$$