Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 116. Verschiedene Fehler-Potenz-Summen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Setzt man dann noch näherungsweise $\pi = 3$, so wird $x = \frac{1}{2}$ und damit wird (15):

$$m = \sqrt{\pi}\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} = 1{,}77245\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} \tag{16}$$

Fechner sche Formel.

Was im Vorstehenden von (5) bis (16) mitgeteilt ist, enthält meist keine strengen Entwicklungen, sondern nur Plausibelmachung der betreffenden Formeln. Folgendes sind die näheren Quellenangaben dazu:

Die Formel (7) oder (6), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-1)}}$ wurde zuerst von Peters im 44. Band der „Astr. Nachrichten“ S. 29 (1856) aufgestellt.

Die erweiterte Formel (9), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}}$ wurde von Lüroth im 73. Bd. (1869) S. 187 der „Astr. Nachrichten“ gegeben.

Helmert hat diese Sache genauer behandelt in „Astr. Nachr.“ 85. Band (1875) S. 353—366 und 88. Band (1876) S. 113—132, und hat dabei gefunden, dass nur die Peters sche Formel (7) für *eine* Unbekannte streng richtig ist, während die Formel (10) für u Unbekannte, mit dem Nenner $\sqrt{n\,(n-u)}$ nur etwa als eine Näherungsformel zu betrachten ist.

Hier sind noch zwei Abhandlungen von Helmert zu zitieren in Schlömilchs „Zeitschr. f. M. u. Ph.“ 1875 S. 300—303: „Über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler“ und 1876 S. 192 bis 218: „Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen.“

Was endlish die Fechner sche Formel (16) betrifft, so ist dieselbe von Fechner entwickelt in Poggendorff s „Annalen der Physik“, Jubelband, 1874, S. 66 bis 81, und eine kritische Untersuchung dieser Formel ist von Helmert im 88. Band der Astr. Nachrichten (1876) S. 120—127, gegeben worden. Hiernach ist die Fechner sche Formel die beste derjenigen Formeln, welche den wahrscheinlichen oder mittleren Fehler statt aus der Quadratsumme $[v^2]$, aus der absoluten Summe $[\pm v]$ der übrigbleibenden Fehler v berechnen.

Alle Formeln mit $[\pm v]$ sind von der Annahme über das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz abhängig und auch abgesehen davon weniger genau als die Formeln mit den Quadraten, nämlich Formel (3) und (8), letzteres wird allerdings erst später in § 117 bewiesen werden, mag aber jetzt schon (zusammen mit der Frage der Abhängigkeit vom Fehlergesetz) zu der Bemerkung führen, dass alle die Formeln mit $[\pm v]$ nur insofern Interesse verdienen, als man damit das Ausrechnen der Quadrate v^2, d. h. eine verhältnismässig geringe Arbeit, sparen kann. —

§ 116. Verschiedene Fehler-Potenzsummen.

Dieselbe Überlegung, welche am Anfang von § 114. zu der Formel (1) S. 441 mit der Summe $[\pm \varepsilon]$ der ersten Potenzen wahrer Fehler ε geführt hat, kann auch angewendet werden auf andere Potenzen und giebt weiter auf 2te, 4te u. s. w. Potenzen angewendet:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \tag{1}$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^4 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \tag{2}$$

allgemein

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^p e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \tag{3}$$

Wir wollen hievon zunächst das quadratische Mittel nach (1) behandeln, obgleich wir hiebei nichts neues finden können (denn es muss $m^2 = m^2$ herauskommen). Zunächst wird mit $h\varepsilon = t$ aus (1):

$$m^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt \tag{4}$$

Teilweise Integration giebt:

$$\int t\,t\,e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} t\,e^{-t^2} + \frac{1}{2}\int e^{-t^2} dt \tag{5}$$

Von (11) § 111. S. 430 wissen wir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{6}$$

Wenn man daher die Grenzen 0 und ∞ in (5) einsetzt, so wird der erste Teil von (5), nämlich $\frac{t}{2} e^{-t^2} = \frac{t}{2\,e^{t^2}}$ beidemale $= 0$, was man für $t = \infty$ nötigenfalls durch Anwendung der Reihe für e^{t^2} zeigen kann; im Ganzen hat man also aus (5) und (6):

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = 0 + \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \tag{7}$$

also nach (4):

$$m^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{4}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\,h^2} \tag{8}$$

Nach (17) § 111. S. 432 ist dieses aber:

$$m^2 = \frac{1}{2\,h^2} = m^2 \tag{9}$$

d. h. wir haben hier nichts neues, sondern nur eine Probe unserer Entwicklung gefunden.

Um zu den 4ten Potenzen überzugehen, nehmen wir von (2) mit $\varepsilon h = t$:

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2}{h^4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt \tag{10}$$

durch teilweises Integrieren hat man:

$$\int t^3 t\,e^{-t^2} dt = -\frac{t^3}{2} e^{-t^2} + \frac{3}{2}\int t^2 e^{-t^2} dt \tag{11}$$

Setzt man hier die Grenzen 0 und ∞ ein, so wird der erste Teil $t^3 e^{-t^2}$ beidemal $= 0$ (was ebenso wie oben bei (5) und (7) einzusehen ist) und der zweite Teil von (11) giebt mit den Grenzen 0 und ∞ das schon oben bei (6) gefundene Integral; man hat also im Ganzen aus (10) und (11):

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2}{h^4\sqrt{\pi}}\,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4\,h^4} \tag{12}$$

Mit Rücksicht auf $h^2 = 1 : 2\,m^2$ in (9) haben wir also nun die Mittelwerte der ersten, zweiten und vierten Potenzen als Zusammenfassung:

$$\frac{[\pm\varepsilon]}{n} = t = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m \tag{13}$$

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2h} \quad \text{"} \quad = m^2 \tag{14}$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \nu^4 = \frac{3}{4h^4} \quad \text{"} \quad = 3\,m^4 \tag{15}$$

In gleicher Weise kann man alle Potenzsummen auswerten, denn eine allmähliche Rekursion wie bei (11) führt bei geraden Potenzen auf das Integral (6) und bei ungeraden Potenzen auf das leicht anzugebende Integral (4) § 114. S. 442; man kann also alle beliebigen Potenzsummen allmählich auf $[\varepsilon^2]$ oder $[\pm\varepsilon]$ zurückführen.

Die allgemeine Rekursionsformel ist:

$$\frac{[\varepsilon^{p+2}]}{n} = \frac{p+1}{2h^2}\frac{[\varepsilon^p]}{n} \text{ oder} = (p+1)\,m^2\frac{[\varepsilon^p]}{n}$$

Der allgemeine Ausdruck für die p^{ten} Potenzen wird:

wenn p ungerade:

$$\frac{[\pm\varepsilon^p]}{n} = \frac{1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}}{h^p}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{[\pm\varepsilon^p]}{n} = \frac{(m\sqrt{2})^p}{\sqrt{\pi}}\,1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$$

wenn p gerade:

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{1.3.5\ldots(p-1)}{(h\sqrt{2})^p} \tag{16}$$

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = m^p\,1.3.5\ldots(p-1) \tag{17}$$

Die allgemeinen Formeln (16), (17) enthalten die besonderen Fälle (13)—(15) in sich, und geben noch weiter angewendet das Folgende:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{[\pm\varepsilon]}{n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m & \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 \\[2mm]
\frac{[\pm\varepsilon^3]}{n} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m^3 & \frac{[\varepsilon^4]}{n} = 3\,m^4 \\[2mm]
\frac{[\pm\varepsilon^5]}{n} = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m^5 & \frac{[\varepsilon^6]}{n} = 15\,m^6 \\[2mm]
\frac{[\pm\varepsilon^7]}{n} = 48\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m^7 & \frac{[\varepsilon^8]}{n} = 105\,m^8 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{18}$$

Umgekehrt können diese Formeln dazu dienen, um auf dem Umwege aus irgend welchen Potenzsummen den mittleren Fehler zu berechnen, was z. B. für die 4ten Potenzen geben würde:

$$m = \sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{3n}} \tag{19}$$

Indessen zur praktischen Anwendung für irgend welche Fehlerberechnungen sind nur die ersten und die zweiten Potenzen (ε und ε^2) geeignet.

§ 117. Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers.

Das mittlere Fehlerquadrat m^2 ist nach der im Anfang § 4. S. 13 gegebenen Definition ein Mittelwert aus einer Anzahl von wahren Einzelfehlerquadraten ε^2, und es ist für die Zuverlässigkeit einer solchen Ausrechnung von ε^2 durchaus nicht gleich-