Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 118. Scheinbare Fehler ν statt wahrer Fehler ε

§ 118. Scheinbare Fehler v statt wahrer Fehler ε.

Eine weitergehende Frage ist nun, in welchem Maasse die Zuverlässigkeit einer Bestimmung des mittleren Fehlers sich vermindert, wenn man nicht wie bisher angenommen, wahre Fehler ε, sondern nur die scheinbaren Fehler v, (welche bei einer Ausgleichung übrig bleiben), zur Verfügung hat.

Wenn die Ausgleichung n Beobachtungen und u Unbekannte hatte, so berechnet man aus der Quadratsumme $[v^2]$ der scheinbaren Fehler bekanntlich das mittlere Fehlerquadrat nach der Formel:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-u} \tag{1}$$

Wir haben diese wichtige Formel in (19) § 28. S. 87 entwickelt, auch in § 86. bei (19) S. 322 noch eine zweite Begründung für den Nenner $n-u$ kurz angedeutet. Aus (1) hat man mit $u = 1$:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-1} \tag{1a}$$

Nach (12) § 27. S. 86 ist die Beziehung zwischen $[v^2]$ und $[\varepsilon^2]$:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon]^2}{[b\,b.1]} - \frac{[c\,\varepsilon]^2}{[c\,c.2]} - \ldots \tag{2}$$

Bleiben wir zunächst bei *einer* Unbekannten stehen, so wird mit $u = 1$ aus (2) erhalten:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} = \frac{[\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n}}{n-1} \quad \text{für } u = 1 \tag{3}$$

Wenn nun $m_0{}^2$ der wahre Wert von m^2, d. h. derjenige Wert ist, der bei unendlich vielen ε (also $n = \infty$) erhalten würde, so stellt $m^2 - m_0{}^2$ den Fehler von m^2 in einem einzelnen Falle vor, und wenn wir den Mittelwert von $(m^2 - m_0{}^2)^2$ wüssten, so hätten wir damit das Quadrat des mittleren Fehlers von m^2, d. h. in unserer Bezeichnungsart nach (1) S. 418:

$$(m\,(m^2))^2 = \text{Mittelwert von } (m^2 - m_0{}^2)^2 \tag{4}$$

$$= \quad " \quad " \quad \left(\frac{[\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n}}{n-1} - m_0{}^2\right)^2 \tag{4a}$$

$$= \text{Mittelwert von } \left(\frac{1}{n\,(n-1)}\right)^2 \left(n\,[\varepsilon^2] - [\varepsilon]^2 - n\,(n-1)\,m_0{}^2\right)^2$$

$$= \quad " \quad " \quad \left(\frac{1}{n\,(n-1)}\right)^2 \begin{pmatrix} n^2\,[\varepsilon^2]^2 - 2\,n\,[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2 - 2\,n^2\,(n-1)\,[\varepsilon^2]\,m_0{}^2 \\ + [\varepsilon]^4 + 2\,n\,(n-1)\,[\varepsilon]^2\,m_0{}^2 \\ + n^2\,(n-1)^2\,m_0{}^4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Von diesen 6 Gliedern muss man nun einzeln die Mittelwerte bestimmen, wozu wir bereits manche Vorbereitungen haben. Jedenfalls ist algebraisch:

$$[\varepsilon^2]^2 = (\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots)^2 = (\varepsilon_1{}^4 + \varepsilon_2{}^4 + \ldots) + 2\,(\varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2{}^2 + \ldots) \tag{6}$$

Die Summe der 4ten Potenzen der Fehler hat man in (15) § 116. S. 447 gefunden:

$$[\varepsilon^4] = 3\,n\,m_0{}^4 \tag{7}$$

und die Summe aller $\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \ldots$ d. h. mit Ausscheidung aller $\varepsilon_1^2 \varepsilon_1^2 \ldots$, welche in (7) enthalten sind, lässt sich leicht abzählen und giebt im Mittel:

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 + \ldots = n(n-1)\, m_0^2\, m_0^2 = n(n-1)\, m_0^4 \tag{8}$$

Es wird also aus (6) mit (7) und (8):

$$[\varepsilon^2]^2 = (3\,n + n(n-1))\, m_0^4 = n(n+2)\, m_0^4 \tag{9}$$

damit hat man das erste Glied der Klammer von (5).

Ähnlich entwickelt man auch das zweite Glied von (5), nämlich:

$$[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots)^2$$
$$= (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3 \ldots)$$

Da aber der Mittelwert einer Gruppe ungerader Potenzen, wegen des wechselnden Vorzeichens der ε, verschwindet, so wird auch wie bei (9):

$$[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2 = [\varepsilon^2]\,[\varepsilon^2] = [\varepsilon^2]^2 = (n^2 + 2\,n)\, m_0^4 \tag{10}$$

Von den übrigen Gliedern in (5) wollen wir nur noch $[\varepsilon]^4$ ausführlich darlegen, nämlich:

$$[\varepsilon]^4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots)^4 = (\varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4 + \ldots) + (6\,\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2 + \ldots) + (4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2^3 + \ldots)$$

da aber die ungeraden Potenzen verschwinden, bleibt nur:

$$[\varepsilon^4] = 3\,n\, m_0^4 + 3\,n(n-1)\, m_0^4 = 3\,n^2\, m_0^4 \tag{11}$$

Wenn man in dieser Weise alle Glieder von (5) behandelt, so bekommt man:

$$(m\,(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} n^2(n^2+2\,n)\, m_0^4 - 2\,n(n^2+2\,n)\, m_0^4 - 2\,n^3(n-1)\, m_0^4 \\ + 3\,n^2\, m_0^4 + 2\,n^2(n-1)\, m_0^4 \\ + n^2(n-1)^2\, m_0^4 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

$$(m\,(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^2 \left(2\,n^3\, m_0^4 - 2\,n^2\, m_0^4\right) = \frac{2\, m_0^4}{n-1}$$

$$m\,(m^2) = m_0^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{13}$$

Dieses ist der mittlere Fehler von m^2, insofern m^2 nach (1a) berechnet ist, also aus (1a) und (13) zusammen:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \pm m^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \frac{[v^2]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) \tag{14}$$

Wenn $m\,(m^2)$ verhältnismässig klein ist gegen m^2 selbst, kann man auch schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-1)}}\right) = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n-1}}\right) \tag{15}$$

Dieses unterscheidet sich von dem früheren (14) § 117. S. 450 nur dadurch, dass nun überall v an Stelle von ε und $n-1$ an Stelle von n steht.

Übergang zu zwei und mehr Unbekannten.

Die bisherige Betrachtung von (3) bis (13) bezog sich auf *eine* Unbekannte, wie sie im arithmetischen Mittel vorkommt, wobei auch der Fall ungleich genauer Einzelbeobachtungen (§ 8.) und der Fall von Coefficienten a wie bei (10) § 12. S. 43 mit inbegriffen ist, insofern man dafür Reduktion auf gleiche Gewichte, also $\varepsilon\sqrt{p}$ u. s. w. annimmt.

Auch bei *zwei* Unbekannten lässt sich die vorhergehende Behandlungsweise noch im Wesentlichen beibehalten. Nach (12) § 27. S. 86 ist für 2 Unbekannte:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \text{ und } m^2 = \frac{[v^2]}{n-2} \tag{16}$$

Wenn also $m_0{}^2$ das wahre mittlere Fehlerquadrat ist, und mit $m\,(m^2)$ der mittlere Fehler von m^2 bezeichnet wird, so hat man:

$$\left(m\,(m^2)\right)^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{[\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}}{n-2} - m_0{}^2\right)^2$$

$$\left(m\,(m^2)\right)^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 \left([\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - (n-2)\,m_0{}^2\right)^2 \tag{17}$$

$$\left(m\,(m^2)\right)^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 \left\{\begin{array}{r} [\varepsilon^2]^2 - 2\,\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}\,[\varepsilon^2] - 2\,\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[b\,b.1]}\,[\varepsilon^2] - 2\,(n-2)\,[\varepsilon^2]\,m_0{}^2 \\ + \frac{[a\varepsilon]^4}{[aa]^2} + 2\,\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}\,\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[bb\,.\,1]} + 2\,(n-2)\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}\,m_0{}^2 \\ + \frac{[b\varepsilon.1]^4}{[bb\,.\,1]^2} + 2\,(n-2)\,\frac{[b\,\varepsilon.1]^2}{[b\,b.1]}\,m_0{}^2 \\ + (n-2)^2\,m_0{}^4 \end{array}\right\} \tag{18}$$

Von den 10 Gliedern, welche in dieser Klammer auftreten, sind die Mittelwerte einzeln zu bilden, und man sieht bald, dass für alle diejenigen Glieder, welche kein $[b\,\varepsilon\,.\,1]$ enthalten, die früheren Betrachtungen (6)—(10), sowie das frühere (16) S. 86 u. s. w. wieder gebraucht werden können, und was die Glieder mit $[b\,\varepsilon\,.\,1]$ betrifft, so braucht man nur dieselben in $[b\,\varepsilon] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,\varepsilon]$ aufzulösen, um alles auf $[a\,\varepsilon]$, $[b\,\varepsilon]$ u. s. w. zurückzuführen.

Die Ausführung ist umständlich, sie giebt:

$$\left(m\,(m^2)\right)^2 = \left(\frac{m_0{}^2}{n-2}\right)^2 \left\{\begin{array}{llll} +\,n\,(n+2) & -\,2\,(n+2) & -\,2\,(n+2) & -\,2\,(n-2)\,n \\ & +\,3 & +\,2 & +\,2\,(n-2) \\ & & +\,3 & +\,2\,(n-2) \\ & & & +\;(n-2)^2 \end{array}\right\}$$

$$\left(m\,(m^2)\right)^2 = \left(\frac{m_0{}^2}{n-2}\right)^2 \left\{2\,n - 4\right\} = 2\,\frac{m_0{}^4}{n-2}$$

und da man nun m^2 und $m_0{}^2$ nicht mehr zu unterscheiden braucht:

$$m\,(m^2) = m^2 \sqrt{\frac{2}{n-2}}$$

oder in anderer Form:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-2}}\right)$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-2)}}\right) \tag{19}$$

Die Ausdehnung auf mehr als 2 Unbekannte, allgemein u Unbekannte wird geben:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-u)}}\right) \tag{20}$$

Ohne auch dieses noch durchzuführen, wollen wir nur bemerken, dass man dazu verschiedene Wege einschlagen kann, etwa mit Einführung der $b'\,\varepsilon'$ in m, wie in (14) § 28. S. 86, wobei aber die Bildung der Mittelwerte nicht so einfach ist wie dort.

Die erste Quelle der Sache ist Art. 39—40 der Gauss schen theoria combinationis (vgl. S. 4), wobei die Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ u. s. w. unseres § 28. S. 89 unten gebraucht werden. Gauss behandelt die Aufgabe zunächst ohne eine bestimmte Annahme über das Fehlergesetz und findet alle auftretenden Mittelwerte ausdrückbar in m_0^2 und in ν^4 in dem Sinne von (15) § 116. S. 447. Es wird also bei unbestimmtem Fehlergesetz zunächst *nicht* $\nu^4 = 3\,m^4$ gesetzt, sondern ν^4 unbestimmt gelassen. Trotzdem lässt sich das gesuchte m (m^2) in gewisse Grenzen einschliessen, welche auch ohne die Kenntnis von ν^4 zu einer plausiblen Schätzung von m (m^2) führen, und dann mit $\nu^4 = 3\,m^4$ zu dem Schlussergebnis führen, welches in unserer Gleichung (20) enthalten ist. Es ist auch die entsprechende Bearbeitung aus Helmert, „Ausgleichungsrechnung nach d. M. d. kl. Q. 1872", S. 111—113 zu zitieren, mit *einer* Unbekannten, wobei unsere Gleichung (4a) in der Form auftritt $\left(\frac{[\varepsilon^2] - [\alpha\,\varepsilon]\,[\alpha\,\varepsilon]}{n-1} - m^2\right)^2$.

Wenn man die Gleichung (20) auf den Fall bedingter Beobachtungen mit r unabhängigen Bedingungsgleichungen anwendet, z. B. Triangulierung mit r Bedingungsgleichungen, so wird $n - u = r$ also

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,r}}\right\} \tag{21}$$

Nehmen wir hiezu beispielshalber das belgisch-deutsche Verbindungsnetz von § 83., so haben wir nach S. 298 die Summe $[v^2\,p] = 4{,}2$, also in unserem Sinne zu (21):

$$[v^2] = 4{,}2 \text{ und } r = 11$$

also

$$m = \sqrt{\frac{4{,}2}{11}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{22}}\right)$$

$$m = \pm\, 0{,}618''\,(1 \pm 0{,}213) = \pm\,(0{,}618'' \pm 0{,}132'')$$

d. h. der mittlere Fehler 0,618″ ist aus jener Triangulierung hervorgegangen mit einer Unsicherheit von rund 21 % seines eigenen Betrags oder 0,13″.

§ 119. Vergleichung des Fehlergesetzes mit Beobachtungsreihen.

Um das auf rein theoretischem Wege gefundene Fehlerverteilungs-Gesetz von § 111., nämlich $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}$ mit der Erfahrung zu vergleichen, muss man sich eine Reihe wahrer Beobachtungsfehler oder eine Reihe solcher zufälliger Ereignisse verschaffen, von denen man annehmen kann, dass sie gleichen Bedingungen unterworfen sind, wie Beobachtungsfehler.

Als solche Zufallsreihe wollen wir die Verteilung der Nullen in einer Logarithmentafel nehmen.

Wir haben nach Vega-Hülsse (Leipzig 1840) gezählt, und zwar nach S. 2—185, wo die 7stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 99999 stehen. Dieselben Logarithmen stehen natürlich auch in Vega-Bremiker, und in Schrön in gleicher Anordnung, nur mit dem kleinen Unterschied bei Vega-Bremiker, dass in jeder Kolumne nicht 50, sondern 51 Werte stehen, weil am Fusse die Zahl von der folgenden Seite wiederholt steht. Sehen wir davon ab, so haben wir in jeder Kolumne 50 Logarithmen, und die Zählung erstreckte sich auf die Zahl der Nullen in der 6ten Stelle, wie folgendes Beispiel einer Seitenabzählung zeigt: