



Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 119. Vergleichung des Fehlergesetzes mit Beobachtungsreihen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

Ohne auch dieses noch durchzuführen, wollen wir nur bemerken, dass man dazu verschiedene Wege einschlagen kann, etwa mit Einführung der $b' e'$ in m , wie in (14) § 28. S. 86, wobei aber die Bildung der Mittelwerte nicht so einfach ist wie dort.

Die erste Quelle der Sache ist Art. 39–40 der Gauss'schen theoria combinationis (vgl. S. 4), wobei die Coefficienten $[a \alpha]$ u. s. w. unseres § 28. S. 89 unten gebraucht werden. Gauss behandelt die Aufgabe zunächst ohne eine bestimmte Annahme über das Fehlergesetz und findet alle auftretenden Mittelwerte ausdrückbar in m_0^2 und in v^4 in dem Sinne von (15) § 116. S. 447. Es wird also bei unbestimmtem Fehlergesetz zunächst nicht $v^4 = 3 m^4$ gesetzt, sondern v^4 unbestimmt gelassen. Trotzdem lässt sich das gesuchte $m (m^2)$ in gewisse Grenzen einschliessen, welche auch ohne die Kenntnis von v^4 zu einer plausiblen Schätzung von $m (m^2)$ führen, und dann mit $v^4 = 3 m^4$ zu dem Schlussergebnis führen, welches in unserer Gleichung (20) enthalten ist. Es ist auch die entsprechende Bearbeitung aus Helmert, „Ausgleichsrechnung nach d. M. d. kl. Q. 1872“, S. 111–113 zu zitieren, mit einer Unbekannten, wobei unsere Gleichung (4a) in der Form auftritt

$$\left(\frac{[\varepsilon^2] - [\alpha \varepsilon][\alpha \varepsilon]}{n-1} - m^2 \right)^2.$$

Wenn man die Gleichung (20) auf den Fall bedingter Beobachtungen mit r unabhängigen Bedingungsgleichungen anwendet, z. B. Triangulierung mit r Bedingungsgleichungen, so wird $n - u = r$ also

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2r}} \right\} \quad (21)$$

Nehmen wir hiezu beispielshalber das belgisch-deutsche Verbindungsnetz von § 83., so haben wir nach S. 298 die Summe $[v^2 p] = 4,2$, also in unserem Sinne zu (21):

$$[v^2] = 4,2 \text{ und } r = 11$$

also

$$m = \sqrt{\frac{4,2}{11}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{22}} \right)$$

$$m = \pm 0,618'' (1 \pm 0,213) = \pm (0,618'' \pm 0,132'')$$

d. h. der mittlere Fehler $0,618''$ ist aus jener Triangulierung hervorgegangen mit einer Unsicherheit von rund 21 % seines eigenen Betrags oder $0,13''$.

§ 119. Vergleichung des Fehlergesetzes mit Beobachtungsreihen.

Um das auf rein theoretischem Wege gefundene Fehlerverteilungs-Gesetz von § 111., nämlich $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ mit der Erfahrung zu vergleichen, muss man sich eine Reihe wahrer Beobachtungsfehler oder eine Reihe solcher zufälliger Ereignisse verschaffen, von denen man annehmen kann, dass sie gleichen Bedingungen unterworfen sind, wie Beobachtungsfehler.

Als solche Zufallsreihe wollen wir die Verteilung der Nullen in einer Logarithmentafel nehmen.

Wir haben nach Vega-Hülse (Leipzig 1840) gezählt, und zwar nach S. 2–185, wo die 7 stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 99999 stehen. Dieselben Logarithmen stehen natürlich auch in Vega-Bremiker, und in Schrön in gleicher Anordnung, nur mit dem kleinen Unterschied bei Vega-Bremiker, dass in jeder Kolumne nicht 50, sondern 51 Werte stehen, weil am Fusse die Zahl von der folgenden Seite wiederholt steht. Sehen wir davon ab, so haben wir in jeder Kolumne 50 Logarithmen, und die Zählung erstreckte sich auf die Zahl der Nullen in der 6ten Stelle, wie folgendes Beispiel einer Seitenabzählung zeigt:

Zählung der Nullen in der 6ten Logarithmenstelle.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	0300	0517	0734	0951	1168	1386	1603	1820	2037	2254
2001	2471	2688	2905	3122	3339	3556	3773	3990	4207	4424
2002	4641	4858	5075	5291	5508	5725	5942	6159	6376	6593
2003	6809	7026	7243	7460	7677	7893	8110	8327	8544	8760
2004	8977	9194	9411	9627	9844	0061	0277	0494	0711	0927
.
2045	6933	7145	7358	7570	7783	7995	8207	8419	8632	8844
2046	9056	9269	9481	9693	9905	0117	0330	0542	0754	0966
2047	1178	1391	1603	1815	2027	2239	2451	2663	2875	3087
2048	3300	3512	3724	3936	4148	4360	4572	4784	4996	5208
2049	5420	5632	5843	6055	6267	6479	6691	6903	7115	7327
Summe	9	1	7	6	6	4	8	5	6	3

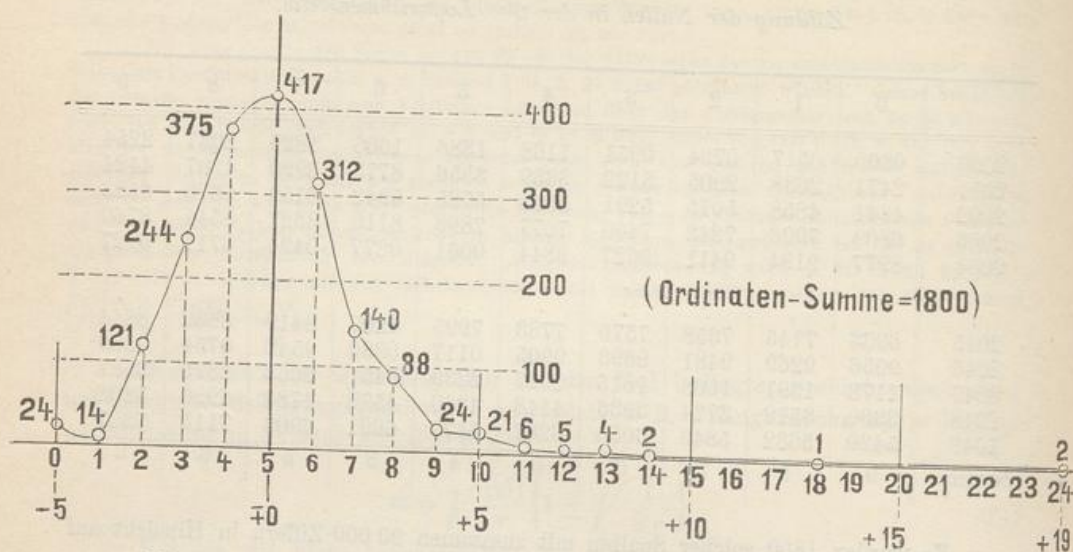
Es wurden 1800 solcher Spalten mit zusammen 90 000 Ziffern in Hinsicht auf Nullen durchgezählt.

Einiges Nähere hierüber haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1890“, S. 560–564 mitgeteilt, auch sei zu dem entsprechenden Beispiele in den früheren Auflagen dieses Buches (z. B. 3. Aufl. I. Band 1888, S. 282–285) bemerkt, dass jenes frühere Beispiel in zweifacher Beziehung ein anderes war, erstens waren nur 600 Spalten, statt jetzt 1800 Spalten behandelt, und zweitens waren die Spalten nicht einzeln, sondern je 2 zusammen behandelt.

Im Einzelnen gab die Zählung Folgendes:

Anzahl der Nullen in einer Spalte l	kommt vor p	Produkt $p l$	Fehler		
			$l-5=\epsilon$	ϵ^2	$p \epsilon^2$
0	24mal	0	— 5	25	600
1	14	14	— 4	16	224
2	121	242	— 3	9	1089
3	244	732	— 2	4	976
4	375	1500	— 1	1	375
5 (Mittelwert)	417 (Maximum)	2085	0	0	0
6	312	1872	+ 1	1	312
7	140	980	+ 2	4	560
8	88	704	+ 3	9	792
9	24	216	+ 4	16	384
10	21	210	+ 5	25	525
11	6	66	+ 6	36	216
12	5	60	+ 7	49	245
13	4	52	+ 8	64	256
14	2	28	+ 9	81	162
18	1	18	+ 13	169	169
24	2	48	+ 19	361	722
Summe 1800		8827			7607

Hiezu wurde auch folgende graphische Darstellung gemacht:



Die Abscissen 0, 1, 2... 24 beziehen sich auf die Anzahl l der Nullen, welche in je einer fünfziggliedrigen Kolumne gefunden wurden. Die Ordinaten $p = 24, p = 14 \dots p = 417 \dots p = 2$ geben die Zahl der Fälle, in welchen die Nullenzahl l gefunden wurde, z. B. wurden 4 Nullen in je einer Kolumne 375mal gefunden, oder 5 Nullen in je einer Kolumne 417mal u. s. w.

Nun rechnen wir weiter, wie wenn unsere l die Ergebnisse von unabhängigen gleichartigen Beobachtungen einer Unbekannten x wären, welche dann als arithmetisches Mittel aller l berechnet wird:

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{8827}{1800} = 4,9033$$

Dieser Wert $x = 4,9033$ ist kleiner als der Wert $x = 5$, welcher bei gleichmässiger Verteilung der Ziffern in den abgezählten Spalten zu erwarten war. Wir wollen nicht den beobachteten Mittelwert $x = 4,9033$, sondern den theoretischen Wert $x = 5$ den weiteren Berechnungen zu Grunde legen, indem wir nun die Differenzen $l - x = \varepsilon$ wie wahre Beobachtungsfehler weiter behandeln.

Jedoch betrachten wir zuvor nochmals die graphische Darstellung, wobei in die Augen fällt, dass diese Curve nicht symmetrisch gegen die Achse ist. Eine solche Unsymmetrie, oder ungleiche Wahrscheinlichkeiten für $-\varepsilon$ und für $+\varepsilon$, ist auch von vornherein zu erwarten gewesen, namentlich bei den Grenzwerten; denn der Fehler $\varepsilon = -5$, oder 0 Nullen, ist unbedingt die untere Grenze, weil $\varepsilon = -6$, oder weniger als 0 Nullen, in einer Spalte undenkbar ist, während auf der positiven Seite mit $\varepsilon = +5$ oder 10 Nullen in einer Spalte die Sache gar nicht abgeschlossen ist, und es kommen darüber hinaus 11, 12, 13, 14 Nullen noch ganz stetig vor, worauf zwei Lücken folgen, und die Reihe mit zweimal 24 Nullen in einer Spalte abschliesst.

Trotz dieser Unsymmetrie im Ganzen können wir einen mittleren Fehler berechnen, wozu die Quadrate ε^2 schon oben in der Hauptzusammenstellung von S. 455 enthalten sind, nämlich $[\varepsilon^2] = 7607$, also mittlerer Fehler $m = \sqrt{\frac{7607}{1800}} = \pm 2,056$.

Ausserdem wollen wir noch die beiden Teile, $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, getrennt behandeln, und zwar soll der wichtige Fall $\varepsilon = 0$ mit $n = 417$ dabei hälftig nach der negativen Seite und hälftig nach der positiven Seite hin gezählt werden, so dass wir erhalten:

negative Fehler:				positive Fehler:			
ε	ε^2	p	$p \varepsilon^2$	ε	ε^2	p	$p \varepsilon^2$
0	0	208,5	0	0	0	208,5	0
-1	1	375	375	+1	1	312	312
-2	4	244	976	+2	4	140	560
-3	9	121	1089	+3	9	88	792
-4	16	14	224	+4	16	24	384
-5	25	24	600	+5	25	21	525
		986,5	3264	+6	36	6	216
				+7	49	5	245
				+8	64	4	256
				+9	81	2	162
				+13	169	1	169
				+16	361	2	722
						813,5	4343
$m^2 = \frac{3264}{986,5} = 3,3087$				$m^2 = \frac{4343}{813,5} = 5,3387$			
$m = \pm 1,8190$				$m = \pm 2,3106$			

Die nächste Betrachtung soll sich auf die negativen Fehler allein erstrecken, und wir wollen die Verteilung mit dem theoretischen Fehlergesetze von § 111. vergleichen, wozu es zuerst nötig ist, das Intervall $d\varepsilon = 1$ in Teilen des mittleren Fehlers m auszudrücken. Aus $m = 1,8190$ folgt:

$$d\varepsilon = 1 = 0,54976 m$$

$$\text{und} \quad \frac{d\varepsilon}{2} = 0,5 = 0,27488 m$$

Nun bestimmt man nach der Tabelle S. [21] des Anhangs die Wahrscheinlichkeiten W für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den n -fachen mittleren Fehler und rechnet zugleich weiter, wie nachstehende Tabelle zeigt:

Grenzen			W nach Seite [21]	986,5 W	Differ- enzen p'
0 und ε		0 und n			
0	0,5	0 0,27488	0,2166	213,7	213,7
0	1,5	0 0,82464	0,5904	582,4	368,7
0	2,5	0 1,37440	0,8307	819,5	237,1
0	3,5	0 1,92416	0,9456	932,8	113,3
0	4,5	0 2,47392	0,9867	973,4	40,6
0	5,5	0 3,02368	0,9975	984,0	10,6
0	∞	0 ∞	1,0000	986,5	2,5
					986,5

Die in der letzten Spalte stehenden Differenzen p' sind nun die theoretischen Anzahlen, welche den beobachteten p in der vorhergehenden Tabelle S. 457 entsprechen, und man hat daher folgende Vergleichung für die negativen ε :

Grenzen	Anzahl der Fehler nach der		Abweichung
	Theorie p'	Erfahrung p	
0 und 0,5	214	209	+ 5
0,5 " 1,5	369	375	— 6
1,5 " 2,5	237	244	— 7
2,5 " 3,5	113	121	— 8
3,5 " 4,5	41	14	+ 27
4,5 " 5,5	11	24	— 13
5,5 " ∞	2	0	+ 2
Summe	987	987	0

Die Übereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung ist so, dass man sagen kann, die Verteilung der Nullen folgt näherungsweise dem Gesetze von § 111. Allerdings die entsprechende Verteilung der positiven ε stimmt noch erheblich schlechter mit der Theorie, wir wollen diese Verteilung nicht auch noch vorführen, dieselbe wird namentlich durch die vereinzelt grossen ε (vgl. die Fig. auf S. 456 mit den rechts auslaufenden Werten bis 24) entstellt.

Solche Vergleichen zwischen der Fehlerverteilung nach der Erfahrung und nach der Theorie des Gauss'schen Fehlergesetzes sind zuerst angestellt worden von Bessel in „*fundamenta astronomiae*“ S. 19–20, mit drei Fehlerreihen, von denen die dritte, 470 Rectascensionsbeobachtungen umfassend, auch von Encke im „*Berl. Astr. Jahrbuch für 1834*“ S. 274–275 behandelt wird dieselbe war auch enthalten in der 2ten Auflage unseres „*Handb. d. Verm.*“, I. Band 1877, S. 101 und 104).

Die neueste und bedeutendste Untersuchung dieser Art betrifft die Schlussfehler von 2238 Dreiecken der Italienischen Triangulierung, behandelt auf Anregung von General Ferrero durch Ingenieur Guarducci, mitgeteilt in der italienischen Zeitschrift „*Rivista di topografia e catasto*“, Roma 1889, Volume II, S. 1–12. Es sind 2 Gruppen, erstens 661 Dreiecke mit dem mittleren Schlussfehler 14,08" und zweitens 1577 Dreiecke mit Schlussfehler 17,13". Ein Bericht hierüber wird auch gegeben von Czuber in „*Theorie der Beobachtungsfehler*“, Leipzig 1891, S. 193–194, und ferner eine Reihe von 40 Teilstrichbestimmungen aus A. R. Clarke's Geodesy, mitgeteilt von Faye in *Comptes rendus*, 106. Band, 1888, S. 783–786.

General Ferrero hat ferner in dem „*Rapport sur les triangulations, présenté à la dixième Conférence générale à Bruxelles en 1892*“ eine Tafel mit 12 graphischen Darstellungen zu 18085 Schlussfehlern gegeben, und berichtet auf S. 4 dieses Rapports, dass er auf der Pariser Versammlung 1889 eine Broschüre verteilt habe, welche an mehr als 5000 Dreiecksschlussfehlern die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung schlagend nachgewiesen habe.

§ 120. Fehler-Kurven mit endlicher Erstreckung.

Bei der Bestimmung der Fehlerfunktion in § 111. wurde die Annahme gemacht, dass die Fehlergrenzen die denkbar weitesten, nämlich $-\infty$ und $+\infty$ seien. Die Praxis steht dieser Annahme entgegen, und deswegen machen wir nun verschiedene Versuche mit solchen Fehlerfunktionen, deren Kurven nicht asymptotisch auslaufen, sondern die Achse berühren oder schneiden.