



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1895**

§ 120. Fehlerkurven mit endlicher Erstreckung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

Die in der letzten Spalte stehenden Differenzen  $p'$  sind nun die theoretischen Anzahlen, welche den beobachteten  $p$  in der vorhergehenden Tabelle S. 457 entsprechen, und man hat daher folgende Vergleichung für die negativen  $\varepsilon$ :

Grenzen	Anzahl der Fehler nach der		Abweichung
	Theorie $p'$	Erfahrung $p$	
0 und 0,5	214	209	+ 5
0,5 „ 1,5	369	375	— 6
1,5 „ 2,5	237	244	— 7
2,5 „ 3,5	113	121	— 8
3,5 „ 4,5	41	14	+ 27
4,5 „ 5,5	11	24	— 13
5,5 „ $\infty$	2	0	+ 2
Summe	987	987	0

Die Übereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung ist so, dass man sagen kann, die Verteilung der Nullen folgt näherungsweise dem Gesetze von § 111. Allerdings die entsprechende Verteilung der positiven  $\varepsilon$  stimmt noch erheblich schlechter mit der Theorie, wir wollen diese Verteilung nicht auch noch vorführen, dieselbe wird namentlich durch die vereinzelt grossen  $\varepsilon$  (vgl. die Fig. auf S. 456 mit den rechts auslaufenden Werten bis 24) entstellt.

Solche Vergleichen zwischen der Fehlerverteilung nach der Erfahrung und nach der Theorie des Gauss'schen Fehlergesetzes sind zuerst angestellt worden von Bessel in „*fundamenta astronomiae*“ S. 19–20, mit drei Fehlerreihen, von denen die dritte, 470 Rectascensionsbeobachtungen umfassend, auch von Encke im „*Berl. Astr. Jahrbuch für 1834*“ S. 274–275 behandelt wird dieselbe war auch enthalten in der 2ten Auflage unseres „*Handb. d. Verm.*“, I. Band 1877, S. 101 und 104).

Die neueste und bedeutendste Untersuchung dieser Art betrifft die Schlussfehler von 2238 Dreiecken der Italienischen Triangulierung, behandelt auf Anregung von General Ferrero durch Ingenieur Guarducci, mitgeteilt in der italienischen Zeitschrift „*Rivista di topografia e catasto*“, Roma 1889, Volume II, S. 1–12. Es sind 2 Gruppen, erstens 661 Dreiecke mit dem mittleren Schlussfehler 14,08" und zweitens 1577 Dreiecke mit Schlussfehler 17,13". Ein Bericht hierüber wird auch gegeben von Czuber in „*Theorie der Beobachtungsfehler*“, Leipzig 1891, S. 193–194, und ferner eine Reihe von 40 Teilstrichbestimmungen aus A. R. Clarke's Geodesy, mitgeteilt von Faye in *Comptes rendus*, 106. Band, 1888, S. 783–786.

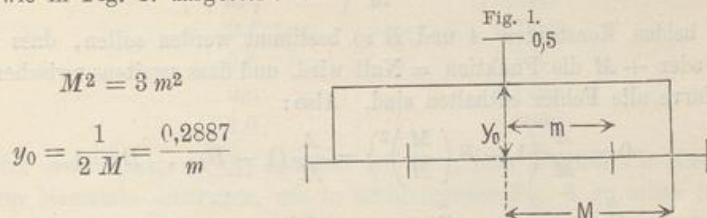
General Ferrero hat ferner in dem „*Rapport sur les triangulations, présenté à la dixième Conférence générale à Bruxelles en 1892*“ eine Tafel mit 12 graphischen Darstellungen zu 18085 Schlussfehlern gegeben, und berichtet auf S. 4 dieses Rapports, dass er auf der Pariser Versammlung 1889 eine Broschüre verteilt habe, welche an mehr als 5000 Dreiecksschlussfehlern die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung schlagend nachgewiesen habe.

## § 120. Fehler-Kurven mit endlicher Erstreckung.

Bei der Bestimmung der Fehlerfunktion in § 111. wurde die Annahme gemacht, dass die Fehlergrenzen die denkbar weitesten, nämlich  $-\infty$  und  $+\infty$  seien. Die Praxis steht dieser Annahme entgegen, und deswegen machen wir nun verschiedene Versuche mit solchen Fehlerfunktionen, deren Kurven nicht asymptotisch auslaufen, sondern die Achse berühren oder schneiden.



Wir wollen sogar im Interesse möglicher Allgemeinheit mit dem größten Falle beginnen, dass nämlich die Fehler-Kurve eine begrenzte Gerade, parallel der Achse, sei, wie in Fig. 1. dargestellt ist.



### I. Parallele Gerade (Rechteck).

Wir nehmen zuerst unbestimmt an  $\varphi(\varepsilon) = A$  und wollen die Konstante  $A$  so bestimmen, dass zwischen den Grenzen  $-M$  und  $+M$  alle Fehler enthalten sind, d. h.:

$$2 \int_0^M \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

$$2 \int_0^M A d\varepsilon = 2 A M = 1 \quad \text{also} \quad A = \frac{1}{2 M}$$

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2 M} \quad (1)$$

Das mittlere Fehlerquadrat wird:

$$m^2 = 2 \int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_0^M \frac{\varepsilon^2}{2 M} d\varepsilon = \frac{M^2}{3}$$

also

$$M^2 = 3 m^2 \quad M = 1,732 m \quad (2)$$

Zu späteren Vergleichen wollen wir auch den Mittelwert  $r^4$  der 4ten Potenzen ausrechnen:

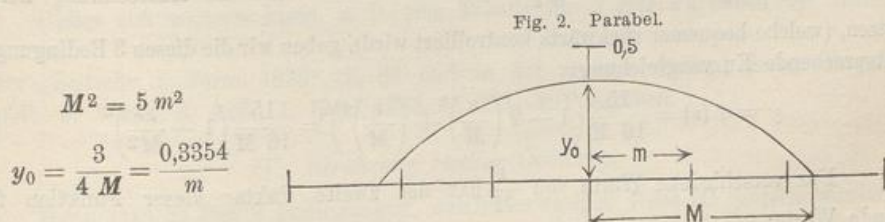
$$r^4 = 2 \int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_0^M \frac{1}{2 M} \varepsilon^4 d\varepsilon = \frac{M^5}{5}$$

und da  $M^2 = 3 m^2$  ist, hat man auch

$$r^4 = \frac{9}{5} m^4 = 1,800 m^4 \quad (3)$$

### II. Parabel.

Die Fehlerkurve soll vom Scheitel nach beiden Seiten symmetrisch abnehmen.





Die Funktion sei zunächst unbestimmt in dieser Form:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{A}{M} \left( 1 - B \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^2 \right) \quad (4)$$

wobei die beiden Konstanten  $A$  und  $B$  so bestimmt werden sollen, dass erstens für  $\varepsilon = -M$  oder  $+M$  die Funktion = Null wird, und dass zweitens zwischen der Achse und der Kurve alle Fehler enthalten sind. Also:

$$0 = \frac{A}{M} \left( 1 - B \left( \frac{M}{M} \right)^2 \right) = \frac{A}{M} (1 - B) \quad , \quad B = 1$$

$$1 = 2 \int_0^M \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_0^M \frac{A}{M} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2} \right) d\varepsilon = 2 \frac{A}{M} \left( M - \frac{M^3}{3} \right)$$

$$1 = 2 A \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \quad , \quad A = \frac{3}{4}$$

Also die Funktion:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{3}{4M} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2} \right) \quad (5)$$

Dieses ist die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter  $= \frac{2}{3} M^2$ . Damit wird:

$$m^2 = 2 \int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2M} \left( \frac{M^3}{3} - \frac{M^5}{5} \right) = \frac{M^2}{5}$$

$$M^2 = 5 m^2 \quad M = 2,236 m \quad (6)$$

$$r^4 = 2 \int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2M} \left( \frac{M^5}{5} - \frac{M^7}{7} \right) = \frac{3}{35} M^4$$

$$r^4 = \frac{15}{7} m^4 = 2,143 m^4 \quad (7)$$

### III. Berührung erster Ordnung.

Wenn man von der Fehlerkurve verlangt, dass sie zunächst im Scheitel ähnlich wie die Parabel ansetzt, dann aber links und rechts in Abständen  $M$  symmetrisch die Achse berühren soll, so kann man der Kurvengleichung 3 Coefficienten geben, und

diese bestimmen durch die 3 Bedingungen, dass erstens  $2 \int_0^M \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1$ , zweitens

$y = 0$  für  $\varepsilon = M$ , und drittens  $\frac{dy}{d\varepsilon} = 0$  für  $\varepsilon = M$ . Ohne die Ausrechnung herzusetzen, (welche bequemer rückwärts kontrolliert wird), geben wir die diesen 3 Bedingungen entsprechende Kurvengleichung:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{15}{16M} \left( 1 - 2 \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^2 + \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^4 \right) = \frac{15}{16M} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2} \right)^2 \quad (8)$$

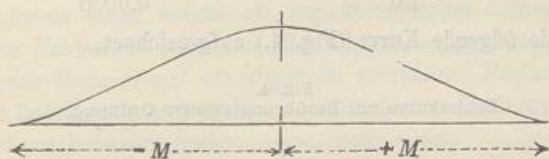
Für verschiedene Werte von  $\frac{\varepsilon}{M}$  hat der zweite Faktor dieser Funktion folgende Werte:



$\frac{\varepsilon}{M} = 0,0$	$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^2 = 1,0000$
0,2	0,9216
0,4	0,7056
0,6	0,7056
0,8	0,1296
1,0	0,0000

Da der erste Faktor in (8) konstant ist, kann man hiernach die Kurve für (8) in beliebigem Massstabe auftragen, wie in nachfolgender Fig. 3. zu sehen ist.

Fig. 3.  
Fehlerkurve mit Berührung erster Ordnung.



Das mittlere Fehlerquadrat  $m^2$  und das mittlere Biquadrat  $r^4$  werden aus (8) erhalten:

$$m^2 = 2 \int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{15}{8} M \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) M^3$$

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{7} M^2 & m &= 0,3796 M \\ M^2 &= 7 m^2 & M &= 2,64575 m \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$r^4 = 2 \int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{15}{8} M \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) M^5$$

$$\left. \begin{aligned} r^4 &= \frac{1}{21} M^4 & r^4 &= 0,04762 M^4 \\ r^4 &= \frac{1}{21} 49 m^4 = \frac{7}{3} m^4 & &= 2,3333 m^4 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

In gleicher Weise kann man auch den durchschnittlichen Fehler  $t$  und den wahrscheinlichen Fehler  $r$  berechnen:

$$t = \frac{5}{16} M = 0,3125 M = \frac{5\sqrt{7}}{16} m = 0,8268 m$$

$$r = 0,28108 M = 0,74367 m$$

Dieses und weiteres hiezu, z. B. eine Tabelle für  $\int_{-M}^{+M} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$  haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 39 und in der vorigen Auflage dieses Buches „Handb. d. Verm., 3. Aufl., I. Band 1888, S. 289–291 gegeben.

#### IV. Berührung zweiter Ordnung.

Wenn man zu den 3 Bedingungen, welche im vorigen Falle III gestellt wurden, auch noch als vierte Bedingung hinzunimmt, dass für  $\varepsilon = M$  auch die zweite Ab-



leitung  $\frac{d^2 y}{d \varepsilon^2} = 0$  werde, so kann man der Funktion  $y$  noch ein weiteres Glied geben, und man wird dadurch erhalten:

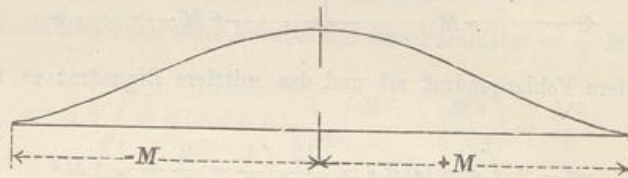
$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{35}{32 M} \left( 1 - 3 \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^2 + 3 \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^4 - \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^6 \right) = \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2} \right)^3 \quad (11)$$

Hiernach ist berechnet:

$\frac{\varepsilon}{M} = 0,0$	$\left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2} \right)^3 = 1,0000$
0,2	0,8847
0,4	0,5927
0,6	0,2621
0,8	0,0466
1,0	0,0000

Damit ist die folgende Kurve (Fig. 4.) aufgezeichnet.

Fig. 4.  
Fehlerkurve mit Berührung zweiter Ordnung.



Aus der Funktion (11) wird auch wieder  $m^2$  und  $r^4$  bestimmt:

$$m^2 = 2 \int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{35}{16 M} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) M^3$$

$$m^2 = \frac{1}{9} M^2, \quad m = \frac{1}{3} M, \quad M = 3 m \quad (12)$$

$$r^4 = 2 \int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{35}{16 M} \left( \frac{1}{5} - \frac{3}{7} + \frac{3}{9} - \frac{1}{11} \right) M^5$$

$$r^4 = \frac{1}{33} M^4 \quad r^4 = 0,03030 M^4$$

$$r^4 = \frac{1}{33} 81 m^4 = \frac{27}{11} m^4 = 2,4545 m^4 \quad (13)$$

Die Fortsetzung dieser Entwicklungen giebt für Berührung von der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n+1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{1}{M} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2} \right)^n \quad (14)$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{5+2n}, \quad \frac{r^4}{M^4} = \frac{3}{(5+2n)(7+2n)} \quad (15)$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3 m^4}{r^4} - 1 \right) \quad (16)$$

Wenn man mittelst (15)  $M^2 = (5+2n) m^2$  in (14) einsetzt, und auch  $m$  selbst durch (17) S. 432 in  $h$  ausdrückt, so wird (14):

$$y = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n+1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{h}{\sqrt{10+4n}} \left( 1 - \binom{n}{1} \varepsilon^2 \frac{2h^2}{5+2n} + \dots \right) \quad (17)$$



Mit  $n = \infty$  geht der Faktor vor der Klammer über in  $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ , wegen des Wallis'schen Ausdruckes für  $\pi$  (Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 489), und die Reihe in der Klammer wird als Exponentialreihe (S. 434) gleich  $e^{-h^2 \varepsilon^2}$  und damit geht mit  $n = \infty$  der Ausdruck (17) über in die Fehlerfunktion (13) S. 430.

## § 121. Der Maximalfehler.

Schon die allerersten Betrachtungen über das Wesen der Beobachtungsfehler (vgl. § 3. S. 11) führen darauf, dass diese Fehler zwar unvermeidlich, aber in gewisse *Grenzen* eingeschlossen sind, welche sie nur überschreiten können beim Auftreten sogenannter grober Fehler, die aber von aller Theorie ausgeschlossen sind.

Im Gegensatz hiezu nimmt die allgemein anerkannte Fehlertheorie, die wir in § 111. entwickelt haben, an, es bestehen keine endlichen Fehlergrenzen, sondern die Grenzen Unendlich nach beiden Seiten,  $-\infty$  und  $+\infty$ .

Wenn man daher das Fehlergesetz  $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$  auf gewöhnliche Beobachtungsfehler anwendet, so begeht man eine Inkonsistenz, denn z. B. die Wahrscheinlichkeit, bei der Winkelmessung mit einem guten Theodolit einen Fehler von  $1^\circ$  zu begehen, ist ohne Frage = Null und nicht ein Wert, der von der Null verschieden ist.

Dieser Inkonsistenz muss man sich klar bewusst sein, und man darf das theoretische Fehlergesetz nur als eine Annäherung an die Wirklichkeit, niemals aber als das Gesetz der wirklichen Beobachtungsfehler selbst betrachten.

Als Analogie zu der Ungültigkeit des theoretischen Fehlergesetzes ausserhalb gewisser Grenzen möchten wir ein Fortpflanzungsgesetz anderer Art betrachten, welches ebenfalls innerhalb enger Grenzen gilt, aber auf weitere Ausdehnung völlig unzutreffend wird:

Ein Mäuse-Paar oder ein Paar anderer sich rasch vermehrender Tiere, Kaninchen oder dergleichen, möge in 1 Jahr eine Nachkommenschaft von  $M$  Paaren erzeugen, welche im nächsten Jahre selbst fortpflanzungsfähig sind, und daher nach dem Schlusse des zweiten Jahres eine Anzahl von  $M^2$  neue Paare hinterlassen. Wenn das so fortgeht, so würde nach  $n$  Jahren eine Anzahl von  $M^n$  solcher Paare vorhanden sein, d. h. wenn  $n$  nur einigermaßen gross ist, würden bei Mäusen, Kaninchen u. s. w. nach diesem Gesetze bald Millionen und Milliarden von Nachkommen vorhanden sein. Wenn nicht vernichtende Kräfte einwirken, so tritt solch masslose Vermehrung in der That ein (z. B. Kaninchen-Plage in Australien), im Allgemeinen aber wird der Vermehrung der Tiere bald kräftig entgegengewirkt durch die zahlreichen Feinde jener Tiere, namentlich die Vernichtung durch den Menschen; und das Gesetz der Vermehrung  $M^n$  mag zwar durch einige Generationen wirksam sein, (mit bereits auf mittlere Vernichtung gültigem  $M$ ), aber die Millionen- und Milliarden-Vermehrung tritt thatsächlich nicht ein.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Beobachtungsfehlern: das Gesetz  $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$  gilt für kleine Werte  $\varepsilon$ , etwa innerhalb des mittleren Fehlers  $\varepsilon = M$  jedenfalls, aber darüber hinaus, schon bei  $\varepsilon = 2M$ ,  $\varepsilon = 3M$  und vollends  $\varepsilon > 3M$  sind so viele Ver-