



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 121. Der Maximalfehler (mit Fortsetzung in § 146 und 147)

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](#)

Mit $n = \infty$ geht der Faktor vor der Klammer über in $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, wegen des Wallischen Ausdrückes für π (Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 489), und die Reihe in der Klammer wird als Exponentialreihe (S. 434) gleich $e^{-h^2 \varepsilon^2}$ und damit geht mit $n = \infty$ der Ausdruck (17) über in die Fehlerfunktion (13) S. 430.

§ 121. Der Maximalfehler.

Schon die allerersten Betrachtungen über das Wesen der Beobachtungsfehler (vgl. § 3. S. 11) führen darauf, dass diese Fehler zwar unvermeidlich, aber in gewisse Grenzen eingeschlossen sind, welche sie nur überschreiten können beim Auftreten sogenannter grober Fehler, die aber von aller Theorie ausgeschlossen sind.

Im Gegensatz hiezu nimmt die allgemein anerkannte Fehlertheorie, die wir in § 111. entwickelt haben, an, es bestehen keine endlichen Fehlergrenzen, sondern die Grenzen Unendlich nach beiden Seiten, $-\infty$ und $+\infty$.

Wenn man daher das Fehlergesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ auf gewöhnliche Beobachtungs-

fehler anwendet, so begeht man eine Inkonsistenz, denn z. B. die Wahrscheinlichkeit, bei der Winkelmessung mit einem guten Theodolit einen Fehler von 1° zu begehen, ist ohne Frage = Null und nicht ein Wert, der von der Null verschieden ist.

Dieser Inkonsistenz muss man sich klar bewusst sein, und man darf das theoretische Fehlergesetz nur als eine Annäherung an die Wirklichkeit, niemals aber als das Gesetz der wirklichen Beobachtungsfehler selbst betrachten.

Als Analogie zu der Ungültigkeit des theoretischen Fehlergesetzes ausserhalb gewisser Grenzen möchten wir ein Fortpflanzungsgesetz anderer Art betrachten, welches ebenfalls innerhalb enger Grenzen gilt, aber auf weitere Ausdehnung völlig unzutreffend wird:

Ein Mäuse-Paar oder ein Paar anderer sich rasch vermehrender Tiere, Kaninchen oder dergleichen, möge in 1 Jahr eine Nachkommenschaft von M Paaren erzeugen, welche im nächsten Jahre selbst fortpflanzungsfähig sind, und daher nach dem Schlusse des zweiten Jahres eine Anzahl von M^2 neue Paare hinterlassen. Wenn das so fortgeht, so würde nach n Jahren eine Anzahl von M^n solcher Paare vorhanden sein, d. h. wenn n nur einigermassen gross ist, würden bei Mäusen, Kaninchen u. s. w. nach diesem Gesetze bald Millionen und Milliarden von Nachkommen vorhanden sein. Wenn nicht vernichtende Kräfte einwirken, so tritt solch masslose Vermehrung in der That ein (z. B. Kaninchen-Plage in Australien), im Allgemeinen aber wird der Vermehrung der Tiere bald kräftig entgegengewirkt durch die zahlreichen Feinde jener Tiere, namentlich die Vernichtung durch den Menschen; und das Gesetz der Vermehrung M^n mag zwar durch einige Generationen wirksam sein, das Gesetz der Vermehrung M aber die Millionen- und Milliarden-Vermehrung tritt thatsächlich nicht ein.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Beobachtungsfehlern: das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$

gilt für kleine Werte ε , etwa innerhalb des mittleren Fehlers $\varepsilon = M$ jedenfalls, aber darüber hinaus, schon bei $\varepsilon = 2m$, $\varepsilon = 3m$ und vollends $\varepsilon > 3m$ sind so viele Ver-

nichtungskräfte für die Fehler vorhanden, dass sehr grosse Fehler überhaupt nicht mehr zu stande kommen können.

Um die Unmöglichkeit sehr grosser Fehler, etwa über dem 5—10fachen mittleren Fehler, nachzuweisen, wollen wir das dem Geodäten am nächsten liegende Beispiel der Winkelsumme eines Dreiecks ($\alpha + \beta + \gamma$, bzw. $\alpha + \beta + \gamma + \text{sph. Excess}$) betrachten.

Zuerst kommen die Teilungsfehler der Theodolitkreise in Frage, allein schon diese Kreise sind, ehe sie der Geodät in die Hand bekommt, schon so gründlich kontrolliert, dass die Fehler nur ein gewisses Durchschnittsmass, aber nicht darüber erreichen können. Jeder Mechaniker weiss schon aus dem Verlaufe der Teilungs-Arbeit, ob der Kreis für gewisse Zwecke zulässig ist oder nicht; er wird zum mindesten den Kreis, ehe er ihn abliefer, nochmals summarisch durchgehen, ob er ihm ohne Schaden für sein Geschäft abliefern kann. Sollte aber auch das nicht sein, so würde doch der ausübende Geodät, schon nach den ersten Wochen, etwaige starke Fehler selbst finden, den Kreis zurückschicken und die etwa bereits damit gemachten Messungen streichen.

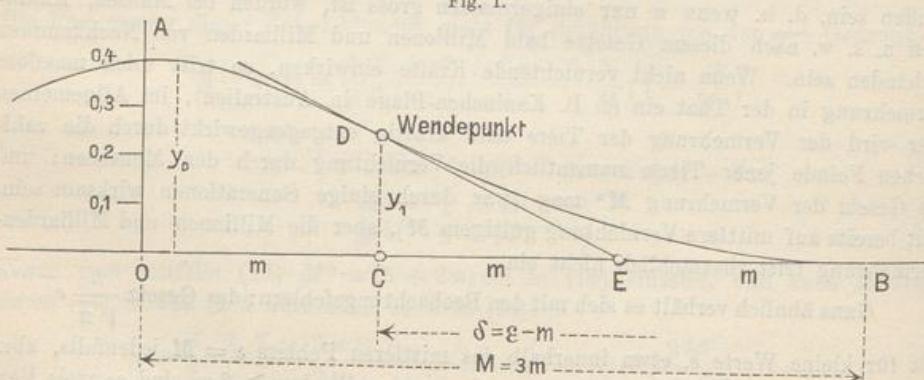
Sei nun der Kreis innerhalb gewisser Grenzen richtig, dann wird auch der Geodät schon im Felde etwaige vorstehende Abweichungen seiner Ablesungen entdecken, dann in der Berechnung seiner Satzmittel u. dergl. wird er starke Messungsfehler finden; er wird — auch bei strengster Objektivität — sehr starke Fehler unbarmherzig ausmerzen. Sollte ein solcher Fehler, etwa gleich dem 10fachen mittleren Fehler, sich bis zur Zusammenstellung der Dreieckssummen durchwinden, so wird nach dem Auftreten desselben nochmals eine Revision bis herunter zu der Aufschreibung der Ablesungen in den Feldbüchern stattfinden, und — ein Grund zum Ausscheiden wird gefunden werden, auch bei Wahrung der strengsten Unparteilichkeit. —

Wir wollen unterlassen, all diese Einzelheiten noch weiter zu verfolgen. Jeder Praktiker weiss, dass starke Fehler die zahlreichen Kontrollstationen geodätischer Messung und Berechnung einfach nicht passieren können.

Dieses eine Beispiel mag genügen zur Begründung des Satzes, dass das gewöhnliche Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ als strenges Gesetz nur gültig ist für Fehler ε kleiner als der mittlere Fehler m , oder gleich demselben und wenig darüber hinaus, dass aber für ε grösser als m ein anderes allmählich von dem ersten $\varphi(\varepsilon)$ abweichendes Gesetz zur Geltung kommt.

Dieses hat uns dazu geführt, in der nachfolgenden Fig. 1. eine Fehlerkurve

Fig. 1.



zu betrachten, welche aus zwei Teilen zusammengesetzt ist, nämlich erstens aus einem Teil AD nach der Gauss'schen Funktion von § 111, und zweitens einem Teile DB , welcher in D die erste Kurve AD und in B die Achse berührt, und zwar sollen die beiden Berührungen in D und in B nicht blos von erster, sondern von zweiter Ordnung sein.

Für den Kurventheil AD haben wir nach § 111:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} (1 - 2h^2 \varepsilon^2) \quad (3)$$

Die zweite Abteilung gleich Null gesetzt giebt die Wendepunktsabscisse, welche nach (17) § 111. S. 432 gleich dem mittleren Fehler ist, nämlich:

$$OC = m = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad \text{oder} \quad h^2 = \frac{1}{2m^2} \quad (4)$$

Die Scheitel-Ordinate wird mit $\varepsilon = 0$:

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} = \frac{0,39894}{m} \quad (5)$$

Die Wendepunkts-Ordinate mit $\varepsilon = m$ wird

$$y_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m\sqrt{2e\pi}} = \frac{0,24197}{m} \quad (6)$$

Die Wendepunkts-Tangente giebt mit $\varepsilon = m$:

$$\left. \frac{dy}{d\varepsilon} \right|_1 = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} me^{-\frac{1}{2}} = -\frac{y_1}{m} \quad (7)$$

Diesem entspricht in Fig. 1. die Tangente DE , welche den Punkt E im Abstande $CE = m$ liefert.

Nun soll eine Kurve DB so gelegt werden, dass sie in D und in B Berührung zweiter Ordnung hat. Man wird dieses durch Rechnung mit unbestimmten Coefficienten erzielen, mit dem Ergebnis:

$$y = y_1 \left(1 - \frac{\delta}{m} + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{m} \right)^3 - \frac{1}{16} \left(\frac{\delta}{m} \right)^4 \right) \quad (8)$$

dabei sind die Abscissen δ von C an gezählt, also $\delta = \varepsilon - m$. Die Gleichung (8) giebt:

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{y_1}{m} \left(-1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\delta}{m} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{m} \right)^3 \right) \quad (9)$$

$$\frac{d^2 y}{d\delta^2} = \frac{y_1}{m^2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{\delta}{m} \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{\delta}{m} \right)^2 \right) \quad (10)$$

Man überblickt alsbald, dass die Gleichung (8) mit (9) und (10) den vorher ausgesprochenen Bedingungen der Kurve DB von Fig. 1. entspricht.

Hiezu wollen wir zuerst den Maximalwert von δ bestimmen, welcher $y = 0$ macht; es ist $\delta = 2 m$, wie sich aus (8) erprobt, nämlich:

$$y = y_1 \left(1 - 2 + \frac{8}{4} - \frac{16}{16} \right) = 0$$

Es ist also:

$$\delta_{\max} = 2 m \quad \text{und } \varepsilon_{\max} = M = 3 m \quad (11)$$

Als Probe für die Berührungen in D und B hat man aus (9) mit $\delta = 0$ denselben Wert wie früher (7) und mit $\delta = 2 m$ giebt (9) den Wert Null. Ferner (10) wird Null erstens mit $\delta = 0$ und zweitens mit $\delta = 2 m$.

Als Hauptergebnis wollen wir die Beziehung (11) mit $M = 3 m$ betrachten; d. h. wenn man die Gauss'sche Funktion $\varphi(\varepsilon)$ nur bis $\varepsilon = m$ gelten lässt, und dann eine Funktion anschliesst, welche als Kurve betrachtet nicht asymptotisch ausläuft, sondern die Achse mit Berührung zweiter Ordnung erreicht, so wird der Maximalfehler M gleich dem dreifachen mittleren Fehler.

Um hieraus einen Rückschluss auf die Verhältnisse wirklicher Beobachtungsfehler zu ermöglichen, müssen wir zuerst allgemein die Kurve als *Bild* irgend einer Erscheinung auffassen, wie bei graphischen Darstellungen der Technik, der Statistik u. s. w. täglich geschieht.

Eine unbegrenzt der Null sich nährende Funktion ist unserem geistigen Vorstellungsvermögen viel schwieriger auszudenken, als eine asymptotisch auslaufende Kurve mit dem physischen Auge erfasst wird. Das geometrische Asymptotenbild erleichtert uns den vorher geschaffenen Begriff des unbegrenzten Abnehmens mit geistigem Auge zu erfassen. Umgekehrt muss für einen *neuen* Begriff, für welchen ein abstrakter Ausdruck fehlt, das Kurvenbild aushelfen.

In diesem Sinne sagen wir, die berührende Kurve DB erleichtert uns die Vorstellung eines allmählichen Abweichens von dem abstrakten Gauss'schen Fehlergesetz, und in demselben Sinne sind auch die Kurven von § 120 aufzufassen.

Nun kann aber das Verhältnis $M : m$, welches, in Fig. 1. S. 464, = 3 angenommen wurde, überhaupt nicht allgemein bestimmt werden, ebensowenig, als die Konstante h des Fehlergesetzes (1) allgemein bestimmbar ist. Wie jeder Beobachtungsart eine gewisse Genauigkeitskonstante h zukommt, ebenso hat auch jede Beobachtungsbehandlung ein gewisses Verhältnis $M : m$. Je gewissenhafter und objektiver ein Beobachter ist, desto grösser wird bei ihm $M : m$ werden, und je mehr in einer Beobachtungstabelle grosse Fehler ausgeschieden wurden, — bewusst oder unbewusst — desto kleiner wird $M : m$ sein.

Es kommt nun darauf an, dieses mathematisch zu fassen, und dazu scheinen uns die mittleren Fehlerbiquadrat $r^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n}$ geeignet zu sein.

Im Gauss'schen Fehlergesetz ist $r^4 : m^4 = 3$ (nach (15) § 116. S. 447), und dabei sind Fehler ε von Null bis Unendlich angenommen, werden aber die grossen Fehler von einer gewissen Grenze an ausgeschieden, so drückt das auf die Biquadrat ε^4 viel stärker als auf die Quadrate ε^2 , und das Verhältnis $r^4 : m^4$ wird in diesem Fall kleiner als 3 werden; oder das Verhältnis $r^4 : m^4$ im Allgemeinen wird einen Massstab für das Ausscheiden grosser Fehler abgeben.

Aus den theoretischen Fehlergesetzzannahmen von § 120. bilden wir folgende Vergleichung:

1) Rechteck S. 459	$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{3} = 0,3333$	$\frac{r^4}{m^4} = \frac{9}{5} = 1,8000$
2) Parabel S. 460	" $\frac{1}{5} = 0,2000$	" $\frac{15}{7} = 2,1429$
3) Berühring 1. Ordnung S. 461	" $\frac{1}{7} = 0,1429$	" $\frac{7}{3} = 2,3333$
4) " 2. " S. 462	" $\frac{1}{9} = 0,1111$	" $\frac{27}{11} = 2,4545$
5) Asymptote S. 447	" $\frac{1}{\infty} = 0,0000$	" $\frac{3}{1} = 3,0000$

Der Anblick dieser Zahlen, und mehr noch ihre Darstellung in einer Kurve, giebt zweifellos zu erkennen, dass das Verhältnis $\frac{m^2}{M^2}$ in einer gewissen Beziehung zu dem anderen Verhältnis $\frac{r^4}{m^4}$ steht, welche bereits in (16) § 120. S. 462 allgemein gegeben ist durch die Gleichung:

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3m^4}{r^4} - 1 \right) \text{ oder } = \frac{1}{2} \frac{m^4}{r^4} \left(3 - \frac{r^4}{m^4} \right) \quad (12)$$

Wir denken uns eine Beobachtungsart, welche in Hinsicht auf $M:m$ untersucht werden soll, irgend einer der unendlich vielen Funktionen (14) S. 462 angepasst durch Vermittlung des Verhältnisses $m^4:r^4$ nach der vorstehenden Gleichung (12).

Zu einer ersten Anwendung dieser Theorie wollen wir die 22 Dreiecksschlussfehler benützen, welche in § 3. S. 12. mitgeteilt sind. Wenn man dieselben quadriert und biquadriert, so erhält man:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{30,52}{22} = 1,387 & r^4 &= \frac{70,02}{22} = 3,183 \\ m^4 &= 1,924 & \frac{r^4}{m^4} &= 1,654 \\ m &= 1,178 & 3 - \frac{r^4}{m^4} &= 1,346 \end{aligned}$$

Damit nach (12): $\frac{m^2}{M^2} = 0,407$

$$\frac{m}{M} = 0,638 \quad \frac{M}{m} = 1,568 \quad (13)$$

Da $m = 1,178$ ist, müsste also $M = 1,568 \times 1,178 = 1,847$ werden, und in der That ist der grösste Wert auf S. 12, mit der Nummer 14, $\varepsilon_{max} = +1,86''$, also sehr nahe dem theoretischen 1,847.

Das Verhältnis $M:m = 1,568$ ist hier erheblich kleiner als das Verhältnis $M:m = 3$, welches für asymptotisches Fehlergesetz gilt, und man kann daraus auf Ausscheidungen der grossen Fehler schliessen.

Auch schon das Verhältnis des mittleren Fehlers m zum durchschnittlichen Fehler t lässt sich in solcher Weise verwerten, dieses Verhältnis ist im Falle unserer 22 Dreiecksschlüsse (vgl. S. 22) $m:t = 1,18:1,03 = 1,15$, während für das asymptotische Fehlergesetz dieses Verhältnis $= 1,25$, also grösser sein soll, woraus abermals auf Ausmerzung der grössten Fehler, welche in m stärker ins Gewicht fallen

würden, geschlossen werden kann, jedoch mit geringerer Sicherheit als bei Benützung von r^4 und m^4 . Ausser den 4ten Potenzen könnten auch noch die 6ten, 8ten u. s. w. Potenzen von ϵ zugezogen werden.

Mag unsere vorstehende Gleichung (12) so bleiben, oder noch weiter behandelt werden, jedenfalls haben wir in der Vergleichung der Werte $m^2 = \frac{[\epsilon^2]}{n}$ und $r^4 = \frac{[\epsilon^4]}{n}$ einen ersten Weg zur Auffindung des bis jetzt von aller Theorie ausgeschlossen gewesenen Maximalfehlers eröffnet.

Wenn zu den vielen Tausenden von Dreiecksschlussfehlern w , welche in dem nachfolgenden § 123. u. ff. zu berichten sein werden, nicht bloss die Mittelwerte $\frac{[w^2]}{n}$ sondern auch noch $\frac{[w^4]}{n}$ ausgerechnet würden, so könnte daran unsere Theorie der Gleichung (12) erprobt werden. —

Kapitel V.

Genauigkeit der Triangulierungen. Geschichtliche Abrisse.

§ 122. Allgemeines.

Die Frage nach der Genauigkeit der Messungen und die Beantwortung dieser Frage ist der Anfang und das Ende aller feineren geodätischen Untersuchungen, und zur Gewinnung eines Urteils über solche Fragen ist es von besonderer Wichtigkeit, die Werke der Vergangenheit in Hinsicht auf die erstrebte und die erreichte Genauigkeit zu studieren.

Wie wir schon in der Einleitung S. 8 bemerkt haben, sind die Genauigkeits-Untersuchungen in der früheren geodätischen Litteratur viel zu wenig gepflegt worden.

Vor etwa 30 Jahren, zu Beginn der Europäischen Gradmessung, diente als Anhaltspunkt zur geodätischen Genauigkeitsschätzung eine gelegentliche Bemerkung von General Baeyer in seinem „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche“ 1862, S. 79, nämlich: „den wahrscheinlichen Fehler der besten Winkelmessungen können wir nicht unter $\frac{1}{4}$ Sekunde annehmen.“ Die Gradmessung in Ostpreussen bot gar keine Genauigkeitsberechnung, und die „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen in Baeyers berühmter „Küstenvermessung“, erwies sich beim ersten Blick im Sinne der M. d. kl. Q. als unzutreffend.

Über die klassischen Messungen von Gauss in Hannover war nichts bekannt.

Ebenso war es in Süddeutschland. Über die Bayerische Triangulierung, das geodätische Hauptwerk Deutschlands im Anfang des Jahrhunderts, gab die Bayerische Litteratur, in welcher man nachzuschlagen berechtigt war, nur unbestimmte Auskunft über „befriedigende Übereinstimmung“ oder dergl. Auch das amtliche Württembergische Landesvermessungswerk ging allen Genauigkeitsfragen entweder geflissen-