Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 124. Verschiedene Berechnungen des mittleren Winkelfehlers

Wenn man kurzer Hand nach der Formel (1) oder (9) rechnet, so hat man:

$$m = \sqrt{\frac{43,52}{3 \, . \, 7}} = \pm 1,44'' \tag{10}$$

dagegen nach der etwas strengeren Formel (8):

$$m = \sqrt{\frac{11,54 + 23,99}{3 \, . \, 6}} = \pm 1,40'' \tag{11}$$

Diese beiden Werte differieren nicht viel, man sieht also, dass in diesem Falle die glatte internationale Formel ziemlich dasselbe giebt, wie die kleine Verfeinerung mit der Vierecksbehandlung.

Streng sind die beiden Werte (10) und (11) nicht, denn die strenge Rechnung mit allen Proben gab nach S. 195 den mittleren Fehler einer *Richtung* (dort ebenfalls mit m bezeichnet) $= \pm 1,04''$, es ist also der mittlere Winkelfehler entsprechend zu nehmen:

$$m = 1,04 \sqrt{2} = \pm 1,47'' \tag{12}$$

dass dieses etwas besser mit (10) als mit (11) stimmt, ist Zufall. —

Einen Zusatz zu der internationalen Fehlerformel wollen wir noch in dem Sinne machen, dass wir die Zuverlässigkeit eines darnach berechneten m schätzen. Da man die w als wahre unabhängige Fehler behandelt, muss man weiter die Formel (14) § 117. S. 450 anwenden, welche auf den fraglichen Fall übertragen giebt:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3\,n}} \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{n}}\right)$$

also nach (10):

$$m = 1,44'' \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{7}}\right) = 1,44'' \left(1 \pm 0,267\right)$$

oder $\quad m = \pm 1,44'' \pm 0,38''$

d. h. die Angabe, der mittlere Fehler sei $= 1,44''$, ist selbst mit einer Unsicherheit von 27 % ihres eigenen Wertes oder $\pm 0,38''$ behaftet.

§ 124. Verschiedene Berechnungen des mittleren Winkelfehlers.

Die internationale Fehlerformel ist streng richtig nur in dem seltenen Falle, dass Dreiecke unabhängig von einander, z. B. in einer Kette ohne Seitengleichungen, gemessen vorliegen. Schon bei Messung in vollen Richtungssätzen, wo ein Satz sich auf mehr als ein Dreieck erstreckt, ist die Formel nicht mehr streng.

Im Allgemeinen haben wir bei Winkelausgleichung mit r Bedingungsgleichungen den mittleren Winkelfehler

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \quad \text{bzw.} \quad = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{r}} \tag{1}$$

Als Beispiel hiezu können wir das Schwerd sche Basisnetz von § 65. nehmen, welches hiernach den mittleren Fehler eines Winkels vom Gewichte 1, auf S. 211 gegeben hat $m = \pm 4,77''$. Wir haben aber auch sofort dabei gesehen (S. 212—213), dass dieser Gewichts-*Einheits*-Fehler nicht das ist, was man als Charakteristikum einer Triangulierung haben will, weshalb auf S. 213 auch noch der mittlere Fehler für mittleres Gewicht g berechnet wurde, den wir nun mit m' bezeichnen wollen:

$$m' = \pm 0,99'' \tag{2}$$

Aber auch das ist noch nicht ein mit anderen Netzergebnissen vergleichbarer Wert, weil auf einer der Stationen des Netzes auf S. 208 ein für die Station selbst überschüssiger Winkel gemessen ist. (Station Mannheim mit 3 Winkeln (7), (8), (9) zwischen 3 Strahlen.) Wir wollen daher die weitere Aufgabe stellen, den mittleren Fehler zu berechnen für das mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels. Indem wir die Formeln (6) S. 255 auf die letzten 3 Werte unten auf S. 208 anwenden, bekommen wir:

$$\frac{1}{P_7} = 0{,}1000 - \frac{0{,}1000^2}{0{,}1690} = 0{,}0408$$

$$\frac{1}{P_8} = 0{,}0357 - \frac{0{,}0357^2}{0{,}1690} = 0{,}0282$$

$$\frac{1}{P_9} = 0{,}0333 - \frac{0{,}0333^2}{0{,}1690} = 0{,}0267$$

Hiezu noch die Summe der 6 ersten $\frac{1}{p}$ von S. 208: 0,2177

Gesamtsumme 0,3134

Mittel für 9 Werte 0,0348

Dieses ist die mittlere Gewichts-Reciproke für einen auf der Station ausgeglichenen Winkel, man berechnet also den mittleren Fehler m eines auf der Station ausgeglichenen Winkels von mittlerem Gewichte, unter Zuziehung der Zahl 4,77″ von (15) S. 211:

$$m = 4{,}77 \sqrt{0{,}0348} = \pm 0{,}89'' \tag{3}$$

Dieses ist etwas kleiner als das obige 0,99″ bei (2), wie es auch sein muss, weil das Gewicht des auf der Station ausgeglichenen Winkels im Allgemeinen grösser sein muss als das Gewicht des nicht ausgeglichenen Winkels.

Dieses kleine Beispiel hat uns dazu gedient, den scharfen Begriff zu bilden für das, was wir künftig stets berechnen wollen, nämlich den *mittleren Fehler m von mittlerem Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.*

In dem einfachen Falle des Schwerd schen Netzes S. 208 konnte dieses m leicht streng berechnet werden. Die allgemeinere strenge Theorie hiezu auf später (Gleichungen (17)—(20) verschiebend, haben wir inzwischen noch einiges andere zu behandeln.

Hat man eine Triangulierung nach *Richtungen* ausgeglichen, wie z. B. das Hannover sche Stadt-Netz in § 61. mit Fig. 1. S. 189, so giebt die Ausgleichung einen mittleren *Richtungs*-Fehler, welchen wir nun mit μ bezeichnen wollen, also bei r Bedingungsgleichungen:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \tag{4}$$

Diesem entspricht ein mittlerer Winkelfehler:

$$m = \mu \sqrt{2} \tag{5}$$

wie als Beispiel schon in (12) § 123. S. 472 angegeben wurde.

Hat man dabei ungleiche Richtungs-Messungs-Gewichte p in der Zahl n, so ist das mittlere Gewicht g zu berechnen aus den Reciproken, d. h.:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right] \tag{5}$$

Z. B. in dem belgisch-deutschen Verbindungs-Netze von S. 292—293 hat man $\left[\frac{1}{p}\right] = 57,8$ und mit $n = 34$ (ohne Rücksicht auf die Anschluss-Besonderheiten):

$$\frac{1}{g} = \frac{57,8}{34} = 1,70$$

der mittlere Richtungsfehler für die Gewichtseinheit ist nach S. 293 (dort mit m bezeichnet):

$$\mu_1 = \pm 0,62''$$

also der mittlere Richtungsfehler für mittleres Stationsrichtungsgewicht:

$$\mu = \mu_1 \sqrt{\frac{1}{g}} = 0,62 \sqrt{1,7} = \pm 0,81'' \qquad (6)$$

Wir gehen über zu dem sehr häufigen Falle der Ausgleichung nach Bessels Methode (§ 72—74.). Die hier auftretenden Verbesserungen, welche man gewöhnlich mit (1) (2) (3) ... bezeichnet, sind *Winkel*-Verbesserungen im Netz, und wenn man von Gewichts-Unterscheidungen absieht, so bekommt man bei r Bedingungsgleichen den mittleren Winkelfehler geradezu:

$$m = \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots (n)^2}{r}} \qquad (7)$$

Wenn die Besselschen Nullpunkts-Korrektionen z nach § 74. berechnet sind, so kann man daraus zuerst einen mittleren Richtungs-Fehler und dann wieder durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ einen mittleren Winkelfehler berechnen in dieser Weise:

$$m = \sqrt{2 \frac{v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots}{r}} \qquad (8)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= z \\ v_1 &= z + (1) \\ v_2 &= z + (2) \text{ u. s. w.} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Für die einzelne Station ist hiebei:

$$-z = \frac{[p'](1) + p''(2) + p'''(3)}{[p^\circ] + [p'] + [p''] + [p''']} \qquad (10)$$

wo $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$, $[p''']$ nach S. 234 die Anschnitts-Zahlen der einzelnen Strahlen sind, so dass die Beziehung besteht:

$$[p^\circ] v_0 + [p'] v_1 + [p''] v_2 + \ldots = 0 \qquad (11)$$

Da diese ganze Berechnung mit z eine willkürliche Verteilungsart ist, kann man statt (10) auch kürzer so rechnen:

$$-z = \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (s-1)}{s} \qquad (12)$$

wo s die Zahl der Strahlen für die fragliche Station ist, d. h. man stimmt nach (12) und (9) die $s - 1$ Winkel-Korrektionen auf s Richtungs-Korrektionen mit der Summe Null ab, indem dann statt (11) einfach $[v] = 0$ entsteht.

Dieses Verfahren ist angewendet in dem „Schweizerischen Dreiecksnetz, II. Band, Zürich 1885", S. 39, und auch bei der Neubearbeitung der Mecklenburgischen Triangulierung wurde in den Abrissen nicht mehr wie früher nach Bessel mit $[[p]v] = 0$, sondern einfach mit $[v] = 0$ orientiert (vgl. den späteren § 138.).

Wenn man die Wahl hat, entweder nach der Winkelformel (7) oder nach der Richtungsformel (8) zu rechnen, wobei aber m selbst beidemal ein Winkelfehler ist, so ist die Richtungsform (8) vorzuziehen, weil dabei keine Richtung im Vergleich mit einer anderen bevorzugt oder benachteiligt ist.

Die ganze Rechnung (7) oder (8) wird wohl nur noch auf ältere Triangulierungen, etwa bis 1880 anzuwenden sein, und zwar mit der Form (8) im Geodätischen Institut, (7) bei der Landesaufnahme.

Bequemlichkeits-Berechnungen mit dem durchschnittlichen Fehler.

In allen bisherigen Formeln treten Quadratsummen auf, welche für den vorliegenden Zweck auszurechnen sind. Obgleich dieses keine ins Gewicht fallende Arbeit ist, fühlt man doch manchmal bei überschläglichen Berechnungen, kritischen Vergleichungen u. s. w. das Bedürfnis, rasch einen mittleren Fehler zu bilden, indem man nur die absolute Summe $[\pm\,\delta]$ irgend welcher Fehler-Elemente δ benützt. Da wir die hiezu nötigen Theorieen bereits früher in § 114. und § 115. behandelt haben, bilden wir hier sofort die Anwendungen:

Wenn n einzelne Dreiecke vorliegen und die Summe $[\pm\,w]$ ihrer ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zusammengenommenen Widersprüche, so hat man den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1{,}2533\,\frac{[\pm\,w]}{n\sqrt{3}} \tag{13}$$

Für Bessel sche Ausgleichung und Winkel-Verbesserungen (1) (2) ... hat man mit absoluter Summierung (1) + (2) + (3) + ... nach (12) § 115. S. 444:

$$m = 1{,}2533\,\frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (n)}{\sqrt{n\,r}} \tag{14}$$

Wenn man die Bessel schen Winkel-Korrektionen (1) (2) (3) ... mittelst der Nullpunkts-Korrektionen z auf Richtungen reduziert hat, so dass die Richtungsverbesserungen v_0, v_1, v_2 ... nach (9) vorliegen, wobei die Anzahl aller dieser v gleich n' sei, so wird der mittlere Winkelfehler:

$$\left.\begin{aligned} m &= 1{,}2533\,\sqrt{2}\,\frac{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots}{\sqrt{n'\,r}} \\ m &= 1{,}7715\,\frac{[\pm\,v]}{\sqrt{n'\,r}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

In geschichtlicher Beziehung ist hiezu zu berichten, dass in dem Werke von General Baeyer „die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie", Berlin 1849, in § 97. S. 353 eine „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen" angegeben wird nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{s}{m}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{1 \pm \frac{\varrho\sqrt{\pi - 2}}{\sqrt{m}}\right\} \tag{16}$$

wo s die Summe $[\pm\,v]$ unserer Formel (15) und m die Anzahl der v bedeutet, also mit umgesetzten Bezeichnungen entsprechend unserer Formel (15):

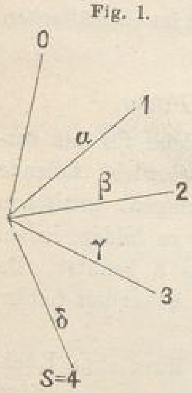
$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{[\pm\,v]}{n'}\left\{1 \pm \frac{0{,}5096}{\sqrt{n'}}\right\} \tag{16a}$$

$$m = 1{,}2533\,\frac{[\pm\,v]}{n'}\left\{1 \pm \frac{0{,}5096}{\sqrt{n'}}\right\} \tag{16b}$$

Dieses ist die erste Formel der Gruppe (15) in unserem § 117. S. 540, wenn daselbst im ersten Gliede der mittlere Fehler, im zweiten Gliede der wahrscheinliche Fehler gewonnen wird.

Die ganze Rechnungsart (16) gehört aber offenbar gar nicht hierher, da die v nicht wahre Fehler, sondern scheinbare Fehler für n' Elemente mit r Bedingungsgleichungen sind. Auch würde m Sinne der heutigen Terminologie (§ 70. S. 230) die Formel (16) nicht einen mittleren Winkelfehler, sondern einen Richtungsfehler geben. Wir haben all dieses hier nur mitgeteilt zur Aufklärung für die geodätische Litteratur, etwa 1850—1875, wo die falsche Formel (16) lange eine Rolle spielte.

Fig. 1.



Mittleres Gewicht eines Winkels auf der Station.

In dem einfachen Falle, den wir oben bei (2)—(3) behandelt haben, konnte das mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels leicht angegeben werden. Folgendes ist die weitere Theorie hiezu nach dem Vorgang des „Schweizerischen Dreiecksnetzes, II. Band, Zürich 1885“, S. 38 und des „Märkisch-Thüringischen Netzes des geodätischen Instituts, Berlin 1889“, S. 63—64.

Bezeichnet Fig. 1. eine Station, deren Nullstrahl nicht zum Netze gehört, dann haben die Winkel zwischen den übrigen Strahlen folgende Gewichts-Reciproken:

$$\begin{aligned}
(1,2) &= [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\beta] + [\beta\,\beta] & (2,3) &= [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\gamma] + [\gamma\,\gamma] \\
(1,3) &= [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\gamma] + [\gamma\,\gamma] & (2,4) &= [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\delta] + [\delta\,\delta] \\
(1,4) &= [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\delta] + [\delta\,\delta] & (2,1) &= [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\alpha] + [\alpha\,\alpha] \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Denkt man sich alle diese Werte angeschrieben und addiert, so findet man mit Rücksicht darauf, dass $[\alpha\,\beta] = [\beta\,\alpha]$ u. s. w. ist, allgemein für s Strahlen 1. 2. 3. 4. die Summe:

$$(2\,s - 2)\,([\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] + [\gamma\,\gamma]) - 4\,([\alpha\,\beta] + [\alpha\,\gamma] + [\alpha\,\delta] + [\beta\,\gamma] + [\beta\,\delta] + [\gamma\,\delta]) \quad (17)$$

kürzer bezeichnet $= \quad 2\,(s-1)\,[A\,A] - 4\,[A\,B] \quad (18)$

Da $s\,\dfrac{s-1}{2}$ Winkel zwischen s Strahlen möglich sind, und hiebei jeder Winkel zweimal auftritt, bekommt man den Mittelwert für einen Winkel dieser Station:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{s}\left(2\,[A\,A] - 4\,\frac{[A\,B]}{s-1}\right) \quad (19)$$

Dabei ist die Bedeutung der Zeichen $[A\,A]$ und $[A\,B]$ durch Vergleichung von (17) und (18) bestimmt, und in (19) ist μ der Gewichtseinheits-Fehler. Denkt man sich diesen Ausdruck (19) auch für die übrigen Stationen berechnet, so bekommt man daraus nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels der Fehlerquadrate, den Gesamt-Mittelwert:

$$\frac{m^2}{\mu^2} = 2\,\frac{\left([A_1\,A_1] - \dfrac{2}{s_1 - 1}\,[A\,B]\right) + \left([A_2\,A_2] - \dfrac{2}{s_2 - 1}\,[A_2\,B_2]\right) + \ldots}{s_1 \qquad + \qquad s_2 \qquad + \ldots} = \frac{1}{P} \quad (20)$$

Diese Formel gilt zunächst für den Fall von Fig. 1., wo der Nullstrahl nicht zum Netz gehört. Wenn der Nullstrahl selbst zum Netz gehört, so gilt die Formel (20) immer noch, jedoch muss dann der Nullstrahl in der Zahl s mitgezählt werden. Man findet dieses, wenn man die ganze Betrachtung für diesen Fall wiederholt.

Der durch (20) bestimmte Wert P ist das gesuchte mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.

Um die Bedeutung dieser Formeln deutlich zu machen, nehmen wir von § 72.

die Virecks-Ausgleichung der Gradmessung in Ostpreussen, und haben von S. 240 oder aus der Tabelle von S. 244:

	$[\alpha\,\alpha]$, $[\beta\,\beta]$ u. s. w.	$[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]$ u. s. w.	
Nidden	+ 0,0611	0,0175	$s_1 = 3$
„	+ 0,0764		
Lattenwalde	+ 0,1431	0,0745	$s_2 = 3$
„	+ 0,0805		
Kalleninken	+ 0,1667	0,0833	$s_3 = 3$
„	+ 0,1667	0,1753	
Gilge	+ 0,3333	0.	$s_4 = 1$
	1,0278		10

$$\frac{1}{P} = 2\,\frac{1{,}0278 - 0{,}1753}{10} = 0{,}17050$$

Als mittleren Gewichtseinheits-Fehler nehmen wir nach (6) S. 247 den Wert m_2 aus der Netz-Ausgleichung, nämlich $\pm 4{,}88''$, es ist also nun der mittlere Winkel-Fehler für mittleres Stationsgewicht:

$$m = 4{,}88\,\sqrt{0{,}1705} = \pm 2{,}02''.$$

Bei einer grossen Zahl von Stationen und Richtungen wird diese Rechnung wohl meist nahe dasselbe geben, wie eine der früher bei (7) und (8) S. 474 erwähnten genäherten Mittelbildungen.

Es sind hier auch die drei Formeln für den Gewichtseinheits-Fehler vorzuführen, welche wir früher auf S. 152 und S. 157—160 kennen gelernt haben, nämlich mit kurzen Bezeichnungen zusammengefasst:

Stationen $$\mu_1 = \sqrt{\frac{[v'\,v']}{n'}} \tag{21}$$

Netz $$\mu_2 = \sqrt{\frac{[v''\,v'']}{r}} \tag{22}$$

Gesamt-Ausgleichung $$\mu = \sqrt{\frac{[v'\,v'] + [v''\,v'']}{n' + r}} \tag{23}$$

Das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ giebt für eine Triangulierung Aufschluss darüber, ob, und in welchem Mass, die Netz-Ausgleichung Fehler-Einflüsse zu Tage gefördert hat, welche auf den Stationen verborgen blieben.

Die Netz-Ausgleichung ist für die Genauigkeitsbeurteilung im Ganzen massgebend, und unser im bisherigen behandelter mittlerer Winkelfehler m bezieht sich nur auf Netz-Ausgleichung. Hat man Genauigkeits-Berechnungen, welche sich bei einer Triangulierung auf μ_1 oder μ beziehen, so kann man sie, wenn alle drei Werte μ_1, μ_2 μ bekannt sind, dadurch verhältnismässig auf μ_2 reduzieren.

§ 125. Triangulierung der Niederlande von Snellius 1610.

Die erste Triangulierung im heutigen Sinne, mit Winkelmessung in Gradmass, und trigonometrischer Berechnung verdanken wir dem Niederländer *Willebrord Snel van Roien* (latinisiert *Snellius*) geb. 1580 in Leiden, gest. 1626.