Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 128. England, Russland, Dänemark

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Nachr." 9. Band, S. 216 angiebt, unter 24 Bedingungs-Gleichungen 6 hatte, welche bereits in den übrigen enthalten waren.

Nach einer Notiz von Nagel im „Civilingenieur 1890", S. 412 findet man aus 16 Dreiecken nach der internationalen Formel:

$$m = \sqrt{\frac{8744}{16 \,.\, 3}} = \pm 13{,}50'' \qquad (2)$$

Die französische Gradmessung von Méchain und Delambre zwischen Dünkirchen und Barcelona von 1792 wurde in 3 Bänden 1806—1810 veröffentlicht in dem berühmten Werke: „Base du système métrique etc." III. Band, S. 605 sagt über die Genauigkeit:

bei 36	Dreiecken	ist der	Dreiecks-Widerspruch	w	zwischen	0″	und 1″
„ 27	„	„ „	„	„	„	1″	„ 2″
„ 18	„	„ „	„	„	„	2″	„ 3″
„ 4	„	„ „	„	„	„	3″	„ 4″
„ 3	„	„ „	„	„	„	4″	„ 5″

Indem man nun auch für die einzelnen w jeweils den Durchschnitts-Wert der betreffenden Gruppe nimmt, z. B. 0,5″ für die ersten 36 Dreiecke, 1,5″ für die folgenden 27 Dreiecke u. s. w., berechnet man den mittleren Winkelfehler näherungsweise $m = \pm 1{,}05''$.

(Dieses sind 88 Dreiecke, während auf S. 605 die Zahl 90 Dreiecke genannt ist.)

Nagel berechnet im Civilingenieur 1890 S. 412 nach der internationalen Formel aus 98 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{367{,}48}{98 \,.\, 3}} = \pm 1{,}12'' \qquad (3)$$

§ 128. England, Russland, Dänemark.

I. Die britische Landes-Vermessung.

Die schon 1783 unter General Roy begonnene Triangulierung gelangte 1858 zum Abschluss unter James und Clarke.

Es wurde hierüber ein grosses Werk herausgegeben:

„Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived from, etc., by Captain Alexander Ross Clarke under the direction of Colonel H. James, Superintendent of the Ordnance survey. London 1858."

Die Ausgleichung der Triangulierung ist in 21 Partial-Netze, mit zusammen 202 Punkten, zerlegt worden.

Die Ausgleichung erfolgte nach Richtungen („ord. trig. surv." S. 273—277). Der Netz-Ausgleichung ging eine genäherte Stations-Ausgleichung voran, welche wir schon in § 69, Tabelle S. 228 beschrieben haben. An diese Stations-Ausgleichungen schlossen sich genäherte Gewichts-Bestimmungen an („ord. trig. surv." S. 66), wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungs-Beobachtungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen, als Genauigkeitsmass dienten. Die Resultate der Stations-Ausgleichungen gingen mit diesen Gewichten wie unmittelbar beobachtete Richtungen in die Netz-Ausgleichungen ein.

Es findet also in jedem einzelnen der 21 Partialnetze Richtungs-Ausgleichung mit ungleichen Gewichten statt, worüber schon in § 82. S. 283 einiges bemerkt wurde.

Die Anzahl aller Richtungen ist 1554, es kommen also durchschnittlich 74 Richtungen auf ein Partialnetz.

Als ganzes behandelt hätte die Ausgleichung 920 Gleichungen gegeben, während in den Gruppen die Gleichungs-Anzahl zwischen 12 und 64 sich bewegt („ord. trig. survey“ S. 277). In Bezug auf die gegenseitigen Gruppen-Anschlüsse wird auf S. 272—273 Folgendes berichtet: Nachdem eine Gruppe unabhängig von allen anderen ausgeglichen war, wurden die daraus erhaltenen Korrektionen in den Bedingungs-Gleichungen der nächsten Gruppe substituiert und die Quadratsumme der Fehler in dieser zweiten Gruppe zum Minimum gemacht, in gleicher Weise schloss sich eine zweite Gruppe an, und so fort. Vier der Triangulierungs-Gruppen haben unabhängigen Anfang (oder fünf nach S. 276 und 277, nämlich 1. 6. 7. 12. 14.), ohne fremde Bedingungen, vielmehr wurden Bedingungen aus diesen Anfangs-Gruppen in die anstossenden Gruppen übertragen. Für die Anschlüsse der gemessenen Grundlinien wurden keine Zwangs-Bedingungen eingeführt, denn es kamen niemals 2 Grundlinien in einer Gruppe zusammen. Zwar könnte man durch Basis-Anschlussbedingungen die Fehler-Anhäufung vermindern, allein andernfalls bekommt man in den ungezwungenen Basis-Anschlüssen eine gute Probe für die Theodolit-Arbeit.

Über die Winkel-Genauigkeit sind keine Berechnungen angestellt, doch sind die Dreiecks-Schlüsse sämtlich angegeben; wir haben aus diesen 464 Dreiecks-Schlüssen („ord. trig. surv.“ S. 426—495) folgende Tabelle gebildet, wobei mit n die Anzahl der Dreiecke in jeder Gruppe, mit $[\pm w]$ die absolute Summe der Dreiecks-Widersprüche und mit $\frac{[\pm w]}{n}$ deren Durchschnittswerte bezeichnet sind.

Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$	Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$
1.	21	34,65″	1,6″	11.	35	116,67″	3,3″
2.	24	94,58	3,9	12.	16	32,49	2,0
3.	14	66,31	4,7	13.	16	69,23	4,3
4.	19	65,68	3,5	14.	22	43,03	2,0
5.	40	104,31	2,6	15.	45	202,14	4,5
6.	14	78,69	5,6	16.	29	63,72	2,2
7.	18	42,70	2,4	17.	19	57,17	3,0
8.	20	39,54	2,0	18.	12	33,35	2,8
9.	21	27,08	1,3	19.	19	45,42	2,4
10.	14	38,77	2,8	20.	19	53,25	2,8
				21.	27	105,79	3,9
				Summe von 1. bis 21.	464	1414,57	

Aus allen 464 Dreiecken hat man also nach der Bequemlichkeitsformel (13) § 124. S. 475:

$$m = 1,2533 \frac{1414,57}{464 \sqrt{3}} = \pm 2,21''$$

In dem Rapport sur les triangulations, Brüssel 1892, von Ferrero, Grande Bretagne S. 4 wird nach der internationalen Formel berechnet aus 476 Dreiecken:

$$m = \pm 1{,}79''$$

ausserdem auf S. 30 aus 552 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{5548}{552\,.\,3}} = \pm 1{,}83'' \tag{1}$$

Wir wollen auch noch die Basisanschlüsse mitteilen:

Von den 6 gemessenen Grundlinien wurden zwei ausgewählt, nämlich die von Lough Foyle und Salisbury Plain, welche mit Colby s Kompensations-Stangen gemessen sind. Die trigonometrische Verbindung zwischen den zwei ausgewählten Grundlinien gab einen Widerspruch von 0,418 Fuss dessen Verteilung auf *eine* Masseinheit für die ganze Vermessung führte. Die Differenzen zwischen den wirklich gemessenen Linien und den hiefür trigonometrisch aus jener festgesetzten Einheit abgeleiteten Werten zeigt folgende Tafel („ord. trig. surv." S. XIV und S. 422):

Jahr	Basis	Basismess-Apparat	Basislänge	trigon. Resultat	Differenz	für 1km
			engl. Fuss	engl. Fuss	engl. Fuss	*mm*
1791	Hounslow Heath	Stahlkette	27 406,190	27 406,363	+ 0,173	+ 6,3
1794	Salisbury Plain I	Stahlkette	36 576,830	36 577,656	+ 0,826	+ 22,6
1801	Misterton Carr	Stahlkette	26 344,060	26 343,869	— 0,191	— 7,2
1806	Rhuddlan Marsh	Stahlkette	24 516,000	24 517,596	+ 1,596	+ 65,1
1817	Belhelvie	Stahlkette	26 517,530	26 517,770	+ 0,240	+ 9,1
1827	Lough Foyle	Kompens.-Stangen	41 640,887	41 641,103	+ 0,216	+ 5,2
1849	Salisbury Plain II	Kompens.-Stangen	36 577,858	36 577,656	— 0,202	— 5,5
			219 579,355	219 582,013	+ 2,658	

Die Entfernungen der Grundlinien von einander betragen zwischen 62 und 371 englischen Meilen („ord. trig. survey" S. 424) oder etwa zwischen 100 und 600 Kilometern.

Die Gesamtlänge dieser 7 Grundlinien ist rund 66,9km, also eine Grundlinie im Mittel 9,6km.

II. Russland.

Die erste Russische Gradmessung ist behandelt in dem Werke:

„Beschreibung der unter allerhöchstem Kaiserlichen Schutze von der Universität veranstalteten Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet 1821—1831 mit Beihilfe von B. W. v. Wrangel und Anderen, von *F. G. W. Struve*, Direktor der Dorpater Sternwarte. Erster und zweiter Teil, Dorpat 1831. (S. 137—138 und S. 148—149.)

Der mittlere Fehler eines Dreiecks-Winkels nach den Wiederholungen und Vergleichungen auf den Stationen fand sich:

$$m = \pm 0{,}60''$$

Für 31 geschlossene Dreiecke ist die Quadratsumme der Widersprüche = 30,60, also der mittlere Fehler eines Winkels hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{30{,}60}{31\,.\,3}} = + 0{,}57'' \tag{2}$$

Aus der Vereinigung der beiden von Struve und Tenner geleiteten Gradmessungen wurden 2 Dreiecke doppelt erhalten, deren Proben im 10. Band (1833) der „Astr. Nachr." S. 323—328 mitgeteilt sind, (auch abgedruckt in unserer vorigen Auflage, III. Band, 2. Aufl. 1890, S. 178—179).

III. Dänemark.

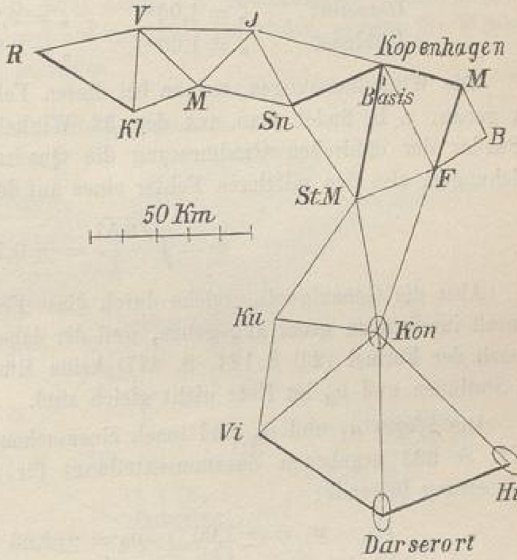
Die dänische Gradmessung wurde im Jahr 1816 unter Leitung von Schumacher begonnen, und bis 1823 von Altona bis Lysabbel auf Alsen fortgesetzt, dann 1837 bis 1848 weiter ausgedehnt, 1850 unter Leitung von Andrae vollendet und veröffentlicht in dem Werke:

„Den Danske Gradmaaling, udgived af C. G. Andrae, Geheime Etatsraad og Directeur for Gradmaalingen Kjobenhavn, I.—IV. Band, 1867—1884". Hiezu gehört auch:

„Problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage danois: „den danske gradmaaling", 1er cahier: Formation et calcul des triangulations géodésiques, Copenhague 1881; 2er cahier: calcul des latitudes, des longitudes et des azimuts sur le sphéroïde terrestre etc. 1883."

Ein interessanter Litteratur-Bericht über das Werk: „Den Danske Gradmaaling" ist von Helmert gegeben in der „Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft", 1877, S. 184—239 und 1878, S. 57—80.

Fig. 1.
Dänisches Haupttriangulierungs-Netz.
(Massstab 1 : 2 500 000.)



Die dänische Triangulierungs-Berechnung zeichnet sich durch feine Theorieen und durch scharfe Genauigkeits-Untersuchungen aus. Unsere Fig. 1. zeigt einen Teil der dänischen Dreiecke, welche auf Grund der Kopenhagener Basis berechnet sind. Die Verbindung der 2701 Meter langen Grundlinie bei Kopenhagen mit der ersten Hauptseite Kopenhagen—Snoldelev wird durch ein Basisnetz von 5 Dreiecken erzielt (welches in Fig. 1. wegen Kleinheit des Massstabes nicht mit aufgenommen ist). Für die 7 Dreiecks-Seiten, welche in Fig. 1. stark gezogen sind, sind die mittleren Fehler berechnet worden, und zwar mit Trennung des Einflusses der Winkelmessungs-Fehler von dem Einfluss des Basisfehlers. Folgende Tabelle giebt hiefür die Fehlerquotienten, ausgedrückt in Millionteilen der Seiten selbst, oder in Millimetern für 1 Kilometer.

Dreiecks-Seiten s	Anzahl der Dreiecke	Fehler, herrührend von Winkel-messung	Basis-messung	Mittlerer Gesamt-fehler
Grundlinie	. .	0,0	1,7	1,7 Milliontel
Kopenhagen-Snoldelev	5	4,4	1,7	4,7
Kopenhagen-St. Möllehöi	6	4,5	1,7	4,8
Kopenhagen-Malmö	8	4,9	1,7	5,2
Malmö-Falsterbo	8	5,0	1,7	5,3
Refsnaes-Klöveshöi	11	6,8	1,7	6,9
Vigerlöse-Darserort	11	7,1	1,7	7,3
Darserort-Hiddensö	12	7,3	1,7	7,5

Man bemerkt, dass der Einfluss des Basisfehlers neben dem Einfluss der Winkelfehler schon im 5ten Dreieck fast verschwindet.

Für die Punkte Kongsbjerg, Darserort und Hiddensö wurden auch die Fehlerellipsen berechnet.

Indem die Kopenhagener Basis als fehlerfrei angenommen wird, und alle Winkelfehler von der Basis an berücksichtigt werden (Andrae Fall II.), hat man die grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b und das Azimut z der grossen Halbaxe für die erwähnten drei Fehler-Ellipsen:

Kongsberg	$a = 0{,}56^m$	$b = 0{,}12^m$	$z = 1°$
Darserort	„ $= 1{,}06^m$	„ $= 0{,}29^m$	„ $= 178°$
Hiddensö	„ $= 1{,}00^m$	„ $= 0{,}34^m$	„ $= 156°$

Die Winkelmessungen, welche bei diesen Fehler-Ellipsen benützt wurden, sind sehr genau, z. B. findet man aus den 32 Winkel-Verbesserungen von S. 296 des 1. Bandes der dänischen Gradmessung die Quadratsumme 3,57 mit 7 Bedingungs-Gleichungen, also den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{3{,}57}{7}} = \pm 0{,}71''$$

Aber die Genauigkeit, welche durch diese Fehler-Ellipsen veranschaulicht wird, ist noch insofern zu gross angegeben, weil der dabei benützte Gewichtseinheits-Fehler (μ nach der Formel (23) § 124. S. 477) keine Rücksicht darauf nimmt, dass μ_1 in den Stationen und μ_2 im Netz nicht gleich sind.

Die Werte μ_1 und μ_2 sind (nach einer schon früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 393 gegebenen Zusammenstellung) für 5 Ausgleichungen der dänischen Gradmessung folgende:

1)	$\mu_1 = \pm 1{,}00$	$\mu_2 = \pm 1{,}63$	$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}63$
2)	1,00	1,65	1,65
3)	1,00	3,08	3,08
4)	1,64	2,99	1,82
5)	0,96	1,75	1,82

Der Wert 3) $\mu_2 : \mu_1 = 3{,}08$ ist durch besondere Umstände bedingt, im übrigen ist im Mittel rund:

$$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}7$$

d. h. nahezu derselbe Wert wie bei der preussischen Landes-Triangulierung.

Nach dem „Rapport sur les triangulations“ von Ferrero, Brüssel 1892, Seite 5 und Seite IV, 5 hat Dänemaek nach der internationalen Formel:

1817—1824	$[w^2] = 37{,}25$	$n = 20$	$m = \pm 0{,}79''$
1837—1847	„ $= 152{,}19$	„ $= 51$	„ $= \pm 1{,}00''$
1867—1870	„ $= 9{,}39$	„ $= 16$	„ $= \pm 0{,}44''$
	$[w^2] = 198{,}83$	$n = 87$	

also aus allen 87 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{198{,}83}{87\,.\,3}} = \pm 0{,}87'' \qquad (3)$$