# Handbuch der Vermessungskunde

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1895**

§ 129. Die klassischen Arbeiten von Gauss

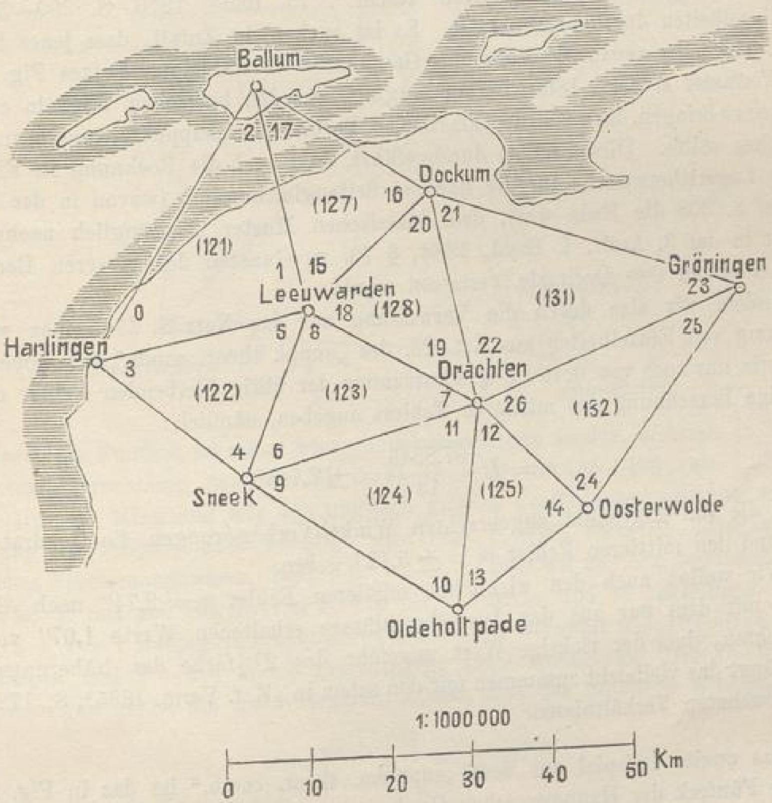
urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

## § 129. Die klassischen Arbeiten von Gauss.

Die Theorie der Triangulierungs-Ausgleichung ganzer Netze nach bedingten Beobachtungen (mit Correlaten) ist zuerst veröffentlicht 1826 von Gauss in dem „supplementum theoriae combinationis" (vgl. S. 4 oben oder Gauss' Werke, IV. Band, S. 82—93).

Allerdings die erste trigonometrische Ausgleichung überhaupt ist etwas früher, nämlich 1821, eine Rückwärtseinschneidung für einen Stationspunkt mit 6 Richtungsbeobachtungen (vgl. S. 5 und S. 230) allein die Dreiecks*netze* treten 1826 in dem „supplementum . . ." zum erstenmal auf mit zwei Beispielen, erstens für Winkelmessungen, zweitens für Richtungsmessungen.

Fig. 1. Niederländisches Dreiecksnetz.




Das erste Beispiel von art. 23. des suppl. ist in Fig. 1. gezeichnet, die Messungen sind genommen aus „Krayenhof, précis historique des operations trigonométriques en Hollande" (vgl. auch allgemeine geographische Ephemeriden, 4. Band, 1799, S. 80 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 172—173). Die 27 Dreieckswinkel, welche in Fig. 1. mit 0, 1 . . . 26 numeriert sind, gelten als einzeln unabhängig gemessen (ob sie das wirklich sind, kam bei einem Rechenbeispiele jener Abhandlung wohl nicht sehr in Frage). Es bestehen 9 Dreiecke mit folgenden Schlussfehlern:

| | | $w$ | $w^2$ |
|---|---|---|---|
| 121. | $c$ | $-3,958''$ | 15,6658 |
| 122. | $d$ | $+0,722$ | 0,5213 |
| 123. | $e$ | $-0,753$ | 0,5670 |
| 124. | $f$ | $+2,355$ | 5,5460 |
| 125. | $g$ | $-1,201$ | 1,4424 |
| | | | 23,7425 |

| | | $w$ | $w^2$ |
|---|---|---|---|
| 127. | $h$ | $-0,461''$ | 0,2125 |
| 128. | $i$ | $+2,596$ | 6,7392 |
| 131. | $k$ | $+0,043$ | 0,0018 |
| 132. | $l$ | $-0,616$ | 0,3795 |
| | | | 23,7425 |
| | | | 31,0755 |

Nach der heutigen internationalen Formel würde man also rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{31,0755}{9 \,.\, 3}} = \pm 1,073'' \qquad (1)$$

Indessen ist davon jetzt nicht die Rede. Wir wollen vielmehr die Gauss sche Ausgleichung verfolgen, und können uns insofern kurz fassen, als ein ganz ähnliches Beispiel, ebenfalls mit 9 Dreiecken und 27 Winkeln mit 2 Horizontproben und 2 Seitengleichungen, dessen Netz auf S. 174 gezeichnet ist, seit Jahren in unseren früheren Auflagen (erstmals in „Astr. Nachr.", 75. Band, 1870, S. 299—302) mit allen Einzelheiten durchgerechnet ist. Es ist auch nicht Zufall, dass jenes badische Netz S. 174 ganz genau die Form des Gauss schen vorstehenden Netzes Fig. 1. hat, indem Verfasser s. Zeit, 1869, darauf ausging, aus den badischen Winkeln ein Netz zusammen zu bringen, das genau dem klassischen Vorbilde des „supplementum theor. comb." entsprechen sollte. Dieses ist so durchgeführt, dass auch die Rechnung in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle für die linearen Seitengleichungen, (wovon in der Controverse auf S. 308 die Rede war), dem klassischen Muster ursprünglich nachgeahmt, und erst in der 3. Aufl., I. Band, 1888, § 70. zu Gunsten der besseren Rechnung, in Einheiten der 6ten Decimale, verlassen wurde.

Indem wir also durch die Verweisung auf das Netz S. 174 einer weiteren Vorführung von Einzelheiten aus Art. 23. des „suppl. theor. comb." überhoben sind, wollen wir nur noch von dort die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler und die zugehörige Berechnung des mittleren Fehlers angeben, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{97,8845}{13}} = \pm 2,7440'' \qquad (2)$$

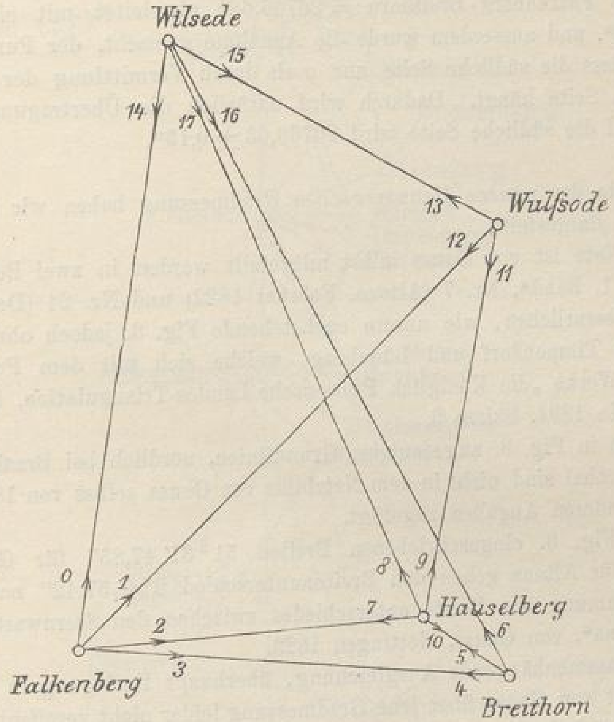
während die von Krayenhof angebrachten Winkel-Verbesserungen die Quadratsumme 341,42 und den mittleren Fehler $m = \pm 5,12''$ geben.

Wir wollen auch den wirklichen mittleren Fehler $m = 2,74''$ nach (2) vergleichen mit dem nur aus den Dreiecksschlüssen erhaltenen Werte 1,07″ von (1), und beachten, dass der richtige Wert ungefähr das $2^1/_2$fache des Näherungswertes ist; es hängt das vielleicht zusammen mit den schon in „Z. f. Verm. 1885", S. 172—173 unten, erwähnten Verhältnissen.

Das zweite Beispiel aus dem „supplem. theor. comb." ist das in Fig. 2. gezeichnete Fünfeck der Hannover schen Gradmessung, deren Netz von Gauss als Beilage der „Astr. Nachr.", 1. Band, Nr. 24 mitgeteilt worden ist, wie wir in unserer nachfolgenden Fig. 3. S. 493 sehen werden.

Bleiben wir bei diesem als Beispiel herausgeschnittenen Fünfeck stehen, so können wir über dasselbe in Kürze sagen, dass es eine Ausgleichung nach gleichgewichtigen *Richtungen* enthält, ähnlich wie unsere zwei Beispiele von § 59. S. 178 und § 61. S. 189; und es sind unsere dort gegebenen Rechnungen in der That nichts anderes als Nachahmungen des nun schon 70 Jahre alten Beispiels aus der Lüneburger Haide, nur mit dem formellen Unterschiede, dass nicht mehr in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle in den linearen Seitengleichungen gerechnet wurde (vgl. 308).

Fig. 2. (1 : 500 000.)




Das klassische Fünfeck ist schon wiederholt kommentiert worden, erstmals in Helmerts Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q. 1872, S. 185—195, wo auch bereits auf S. 189 der Missstand mit den ungleich grossen Coefficienten erkannt und durch Änderung der Masseinheiten beseitigt wird (vgl. S. 308), ferner in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen, 1882“, S. 1—10, so dass wir uns hier begnügen können, nach Fig. 1. mit den Regeln von S. 176 für 5 Punkte und 18 Richtungen die Zahl $18 - 15 + 4 = 7$ Bedingungsgleichungen abzuzählen, worunter $9 - 10 + 3 = 2$ Seitengleichungen und $9 - 5 + 1 = 5$ unabhängige Dreiecksschlüsse. Die 18 Richtungsverbesserungen geben die Quadratsumme 1,2288, also den mittleren Richtungsfehler:

$$\mu = \sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = \pm\, 0{,}419'' \tag{3}$$

oder den mittleren Winkelfehler:

$$m = \mu \sqrt{2} = \pm\, 0{,}593'' \tag{4}$$

Es ist vielleicht auch hier gut, die Anwendung der internationalen Fehlerformel von § 123. zu machen; es sind 7 Dreiecke möglich, welche geben:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $-1{,}368''$, | $-1{,}139''$, | $+1{,}773''$, | $+1{,}042''$, | $-1{,}481''$, | $-0{,}813''$, | $-0{,}750''$ |
| $w^2$ | 1,8714, | 1,2973, | 3,1435, | 1,0858, | 2,1934, | 0,6610, | 0,5625 |

$$m = \sqrt{\frac{10{,}8149}{7 \cdot 3}} = \pm\, 0{,}718'' \tag{5}$$

Es wird dann noch von Gauss in Art. 25. des „suppl." das Funktionsgewicht einer Seite berechnet (also ähnlich wie wir zu unserem Hannoverschen Fünfeck in § 62. die Genauigkeit einer Netzdiagonale berechnet haben). Es wurde die nördliche Seite Wilsede-Wulfsode = 22877,94$^m$ als fehlerfreie Basis angenommen und daraus die südliche Seite Falkenberg-Breithorn = 26766,68$^m$ abgeleitet mit einem mittleren Fehler $\pm$ 0,12$^m$, und ausserdem wurde die Annahme gemacht, der Punkt Hauselberg falle fort, so dass die südliche Seite nur noch durch Vermittlung der westlichen an der nördlichen Seite hängt. Dadurch wird natürlich die Übertragungs-Genauigkeit vermindert und die südliche Seite wird 26766,63 $\pm$ 0,15$^m$.

Das Netz der *ganzen* Hannoverschen Gradmessung haben wir in Fig. 3. auf folgender Seite dargestellt.

Dieses Netz ist von Gauss selbst mitgeteilt worden in zwei Beilagen zu den „Astr. Nachr., 1. Band", Nr. 7 (Altona, Februar 1822) und Nr. 24 (Dezember 1822), letzteres im Wesentlichen, wie unsere nachstehende Fig. 3. jedoch ohne die Verbindung zwischen Timpendorf und Lüneburg, welche sich mit dem Punkte Nindorf findet in dem Werke „die Königlich Preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, VI. Teil", Berlin 1894, Skizze 3.

Auch die in Fig. 3. angedeuteten Grundlinien, nördlich bei Braak und südlich bei Seeberg (Gotha) sind nicht in dem Netzbilde von Gauss selbst von 1822 enthalten, sondern nach anderen Angaben zugefügt.

Die in Fig. 3. eingeschriebenen Breiten 51° 31′ 47,85″ für Göttingen und 53° 32′ 45,27″ für Altona geben den Breitenunterschied 2° 0′ 57,42″ nach S. 64 des Werkes „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona", von Gauss, Göttingen 1823.

Eine zusammenhängende Ausgleichung, überhaupt Darlegung in einem öffentlichen Werke ist von Gauss über jene Gradmessung leider nicht veröffentlicht worden. Die Originalakten befanden sich bis nach 1866 in dem Königlichen Archive zu Hannover, wurden dann aber auf Requisition des Generalfeldmarschalls v. Moltke an den Preussischen Generalstab nach Berlin abgegeben, wo sie sich im Besitze der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme noch befinden.

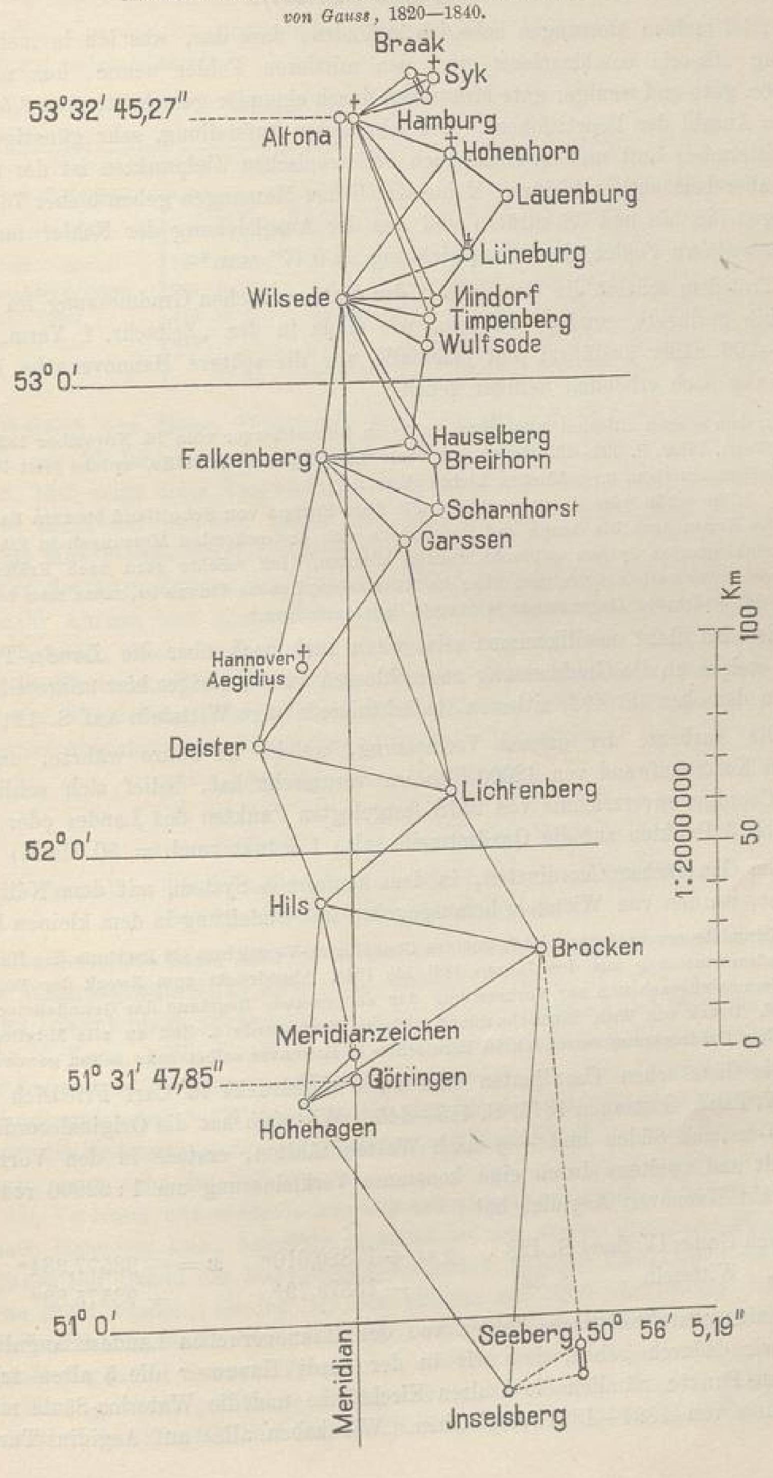
Auf diesem Wege ist über die Geschichte der Gaussschen Vermessungen in Hannover erst in neuester Zeit Aufklärung gegeben worden durch eine Arbeit: „Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch geodätischen Arbeiten, nach Original-Materialien bearbeitet von *Gaede*, Hauptmann, bei der trig. Abteilung der Landesaufnahme." („Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 113, 145, 161, 177, 193, 225.) Ferner ist hier zu erwähnen: „Gedächtnisrede auf Carl Friedrich Gauss, zur Feier des 30. April 1877", von Theodor Wittstein, Dr. phil. und Professor. Hannover Hahnsche Buchhandlung 1877.

Wir wollen nur einige charakteristische Stellen zitieren:

An Bessel schrieb Gauss am 5. November 1823 („Briefwechsel mit Bessel", S. 423 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205): „Ich habe das System meiner Hauptdreiecke in diesen Tagen sorgfältig ausgeglichen .... Es sind zusammen 26 Dreiecke, worin alle Winkel von mir selbst beobachtet sind. Die grösste Summe der Fehler ist 2,2″, wo bei einer Seite das Pointieren sehr schwierig war; die nächstgrösste ist 1,8″. Keine der 76 vorkommenden Richtungen ist bei der Ausgleichung um eine ganze Sekunde geändert, die grösste Änderung beträgt 0,813″."

Fig. 3.

*Hannover'sche Gradmessung zwischen Göttingen und Altona von Gauss, 1820—1840.*



Ferner Gauss an Bohnenberger am 16. November 1823 („Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 431 und „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 205):

„Bei meinen Messungen habe ich gefunden, dass das, was ich in meiner Abhandlung „theoria combinationis etc.“ den mittleren Fehler nenne, aus mehreren Stationen, gute und weniger gute Messungen durch einander gerechnet, etwa $3{,}5'' : \sqrt{n}$ ist ($n$ = Anzahl der Repetitionen). Bei sehr fester Aufstellung, sehr günstiger (d. i. nicht zitternder) Luft und ausschliesslich heliotropischen Zielpunkten ist der mittlere Fehler aber beträchtlich kleiner. Meine sämtlichen Messungen geben bisher 76 Hauptrichtungen (38 hin und 38 zurück) und aus der Ausgleichung der Fehler fand sich, dass der *mittlere* Fehler einer Hauptrichtung $= 0{,}47''$ war.“

Trotzdem scheint die Genauigkeit der Hannoverschen Gradmessung im ganzen doch eine geringere gewesen zu sein, wie Gäde in der „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 205—206 näher ausführt; und jedenfalls war die spätere Hannoversche *Landes*-Vermessung noch erheblich weniger genau.

In dem soeben zitierten Briefe von Gauss an Bohnenberger vom 16. November 1823 („Zeitschrift f. Verm. 1882“, S. 430—431) findet sich auch eine prophetische Stelle, welche jetzt 70 Jahre, nachdem sie geschrieben, im schönsten Lichte glänzt:

„Wie schön wäre es, wenn einmal alle über Europa von Schottland bis zum Banat und von Kopenhagen bis Genua und Formentera sich erstreckenden Messungen in Ein zusammenhängendes System gebracht werden könnten. Ich möchte gern nach Kräften dazu vorbereiten, allein wenn man über die Mitte seines Lebens hinaus ist, muss man bei einem so ausgedehnten Gegenstande je eher je lieber anfangen.“

Es wird nicht unwillkommen sein, wenn auch noch über die *Landes*-Triangulierung, welche an die Gradmessung angeschlossen wurde, einiges hier mitgeteilt wird:

In der oben (S. 492) zitierten Gedächtnisrede sagt Wittstein auf S. 12:

Die Ausbeute der ganzen Vermessung, welche 24 Jahre währte, und den mässigen Kostenaufwand von 42000 Thalern verursacht hat, belief sich schliesslich auf ein Coordinatenverzeichnis von 2578 festgelegten Punkten des Landes oder durchschnittlich 3 Punkten auf die Quadratmeile (also 1 Punkt rund = 50 Mark.)

Die Gauss schen Coordinaten, in dem konformen System, mit dem Nullpunkte Göttingen, wurden von Wittstein herausgegeben mit Einleitung in dem kleinen Bande:

„Grundsteuerveranlagung. Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der Hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821 bis 1844. Abgedruckt zum Zweck der Benützung bei den Vermessungsarbeiten zur Vorbereitung der anderweiten Regelung der Grundsteuer. Hannover 1868. Druck von Wilh. Riemschneider.“ (Dieses Werk wurde s. Zeit an alle Mitglieder der Europäischen Gradmessung versendet, ist inzwischen in Hannover selbst sehr selten geworden. —)

Die Gauss schen Coordinaten sind auch abgedruckt in Carl Friedrich Gauss Werke IV. Band, Göttingen 1873, S. 415—445. Wittstein hat die Originalcoordinaten, welche $+x$ nach Süden und $-y$ nach Westen zählten, erstens in den Vorzeichen umgestellt und zweitens durch eine konstante Verkleinerung um 1 : 62900 reduziert, z. B. Punkt Hannover, Aegidius hat

| | | | |
|---|---|---|---|
| nach Gauss IV Band | S. 428 | $y = +13880{,}010^m$ | $x = -93577{,}384^m$ |
| „ Wittstein | S. 36 | $-13879{,}79^m$ | $+93575{,}89^m$ |

Einige charakteristische Zahlen von der Hannoverschen Landestriangulierung können wir dadurch geben, dass wir in der Stadt Hannover die 5 alten trigonometrischen Punkte, nämlich die 4 alten Kirchtürme und die Waterloo-Säule mit der Neumessung von 1891—1892 vergleichen. Wir haben alles auf Aegidius-Turm als

Centralpunkt bezogen, die Richtungswinkel nach den 4 anderen Punkten aus den Coordinaten berechnet, durch die Meridiankonvergenzen auf Nord reduziert, und auch die aus den Coordinaten berechneten Entfernungen beigesetzt, wodurch folgende Vergleichung entstanden ist:

*Abrisse der Station Aegidius.*

| Richtung nach | 1840 | | 1892 | | Differenzen | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Azimut | Entfernung | Azimut | Entfernung | | |
| Waterloo-Säule | 247° 23′ 15″ | 841,78m | 247° 22′ 40″ | 841,26m | — 35″ | — 0,52m |
| Neustädter Turm | 284 29 22 | 761,64 | 284 29 24 | 761,98 | + 2 | + 0,34 |
| Markt-Turm | 313 25 10 | 378,56 | 313 24 54 | 378,58 | — 16 | + 0,02 |
| Kreuz-Turm | 314 8 0 | 631,85 | 314 9 11 | 631,64 | + 71 | — 0,21 |
| | 85′ 47″ | 2613,83m | 86′ 09″ | 2613,46m | + 22″ | — 0,37m |

Obgleich von diesen Differenzen vielleicht ein Teil auf Punktverschiebungen im Laufe von 50 Jahren zu rechnen sein wird („Zeitschr. d. Hann. Arch. u. Ing.-Ver. 1889“, S. 156) zeigt diese Vergleichung doch auf einen Blick, dass jene Messungen von 1840 nicht das geliefert haben und offenbar auch nicht liefern wollten, was man heute eine genaue Stadt-Triangulierung nennt.

Von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Berlin haben wir eine Anzahl Abrisse und Abschriften „aus dem Gradmessungs-Journal 1823 von C. F. Gauss“, unter welchen sich findet: „Hannover Aegidius, Juli 19. Vormittags, Aufstellung im Zentrum, Repsolds Ocular, Einfache Winkel, Kreis rechts (der Erfolg zeigt starke Verrückung des Bocks)“. Hier sind über 100 Sichten gegeben, welche eine Gesamt-Absuchung des Horizontes vorstellen. Darunter:

133° 35′ 26″ Hannover Marktturm
133 33 24 „ „
104 38 40 „ Neustädter Turm.

An demselben Platz Nachmittags (— 93577,384 + 13880,010)
104° 38′ 55″ Hannover Neustädter Turm.

Wir bemerken dazu, dass der Kreuzturm von Aegidius aus nicht zu sehen ist und die Waterloo-Säule 1823 noch nicht vorhanden war.

Es scheint nicht unpassend, hier auch einen Ausspruch von Gauss zu citieren, (Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 185): „Vor Gott ist's am Ende wohl auch einerlei, ob wir die Lage eines Kirchturms auf einen Fuss oder die eines Sternes auf eine Sekunde bestimmt haben.“ Hiernach wurde also bei dem Einschneiden auf weite Entfernungen die Bestimmung eines Kirchturms „auf einen Fuss“ als eine gute angesehen, was heute nicht mehr der Fall ist.

Als Verfasser mit süddeutschen trigonometrischen Begriffen und Anschauungen 1882 nach Hannover kam, bemerkte er sofort bei den ersten Rückwärts-Einschneide-Rechnungen auf Grund der klassischen Coordinaten, dass die Missstimmigkeiten 5 bis 10mal so gross wurden, als bei den aus gleicher und noch viel früherer Zeit stammenden Coordinaten der Türme von Stuttgart oder Karlsruhe; und die trigonometrischen Übungsmessungen bei Springe, Nenndorf u. s. w. bis 1890 bestätigten dieses in vollem Masse. Eine grössere praktische Triangulierung zur Leine-Aufnahme („Zeitschr. f. Verm. 1891“, S. 426—427 und Handb. II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 302—303) gab endlich unzweideutig zu erkennen, dass die Landes-Triangulierung 1820—1840 nicht die Absicht gehabt haben kann, eine Grundlage für Kataster-Aufnahmen wie in gleicher Zeit z. B. in Württemberg zu liefern, sondern dass es sich nur um Grundlage für topographische Karten gehandelt haben kann. Die Feldmarks-Vermessungen sind in Hannover ebenso wie überall in Norddeutschland in jener Zeit ohne Anschluss an die Landes-Triangulierungen ausgeführt. Und als man später, wie aus dem Titel des Gauss-Wittstein schen Coordinaten-Verzeichnisses von 1868 zu ersehen ist, anfing, die Gauss schen Coordinaten auch zur „Regelung der Grundsteuer" heranzuziehen, galt das Bestimmen eines trigonometrischen Punktes im Anschluss an die alten Punkte jedesmal als eine Art Haupt- und Staats-Aktion, welche nicht immer zum gewünschten Ziele führte.

Bei alledem ist auch hier wieder zu erinnern: Wenn heute ein Trigonometer in Schwaben oder Preussen — seine $[a\,a]$ , $[b\,b.1]$ u. s. w. ausrechnet, und seine $z$ durch Mittelbildung eliminiert u. s. w., so thut er nichts anderes als was Gauss 1820 in Hannover ausgedacht und eigenhändig in Tausenden von Fällen ausgerechnet hat. —

Dieselbe Anerkennung ist allerdings dem anderen Produkte von Gauss' Ingenium, dem conformen Coordinaten-System, bis jetzt noch nicht widerfahren, das schwächere System des Bayern Soldner hat fast ganz Deutschland erobert. —

In Hannover wurde das alte klassische Gauss sche System mit dem Nullpunkt Göttingen, nach 1866 in 31 Partialsysteme zerschlagen, welche zwar selbst noch conform waren, dann aber 1881 den Soldner schen nicht conformen Systemen von Celle u. s. w. weichen mussten.

Der scharfsinnige Hannover sche Mathematiker *Wittstein*, welcher zur Zeit des Hannover schen Königreiches sein Land bei der Europäischen Gradmessung vertreten hatte, hat es tief beklagt, dass die Gauss schen geodätischen Werke anderwärts nicht gewürdigt worden seien, darunter die „conforme Abbildung." Wittstein schrieb in der oben S. 492 von uns zitierten Gedächtnisrede auf Gauss, S. 13: „So bleibt denn nur übrig, von der *künftigen Generation* zu hoffen, dass dieselbe eines Tages erkennen wird, welche Schätze hier noch zu heben sind, und dass sie dasjenige, was jetzt im Gebrauche ist, dahin verweisen wird, wohin es längst gehört." — (Vgl. hiezu auch „Zeitschr. f. Verm. 1895," S. 340).

Nach diesen, teilweise abschweifenden, aber für die Geschichte unserer Wissenschaft nicht unwichtigen Bemerkungen haben wir noch als Appendix zu den Gauss-schen Arbeiten die Triangulierung von Kurhessen durch *Gerling* zu behandeln.

Gerling war ein Schüler von Gauss, hat sich mühsam in seines Lehrers Theorie der Fehlerausgleichung eingearbeitet, und dieselbe auf die schöne Aufgabe, welche sein Kurhessisches Land ihm bot, angewendet.

Gerling hat hierüber in seinen „Beiträgen zur Geographie Kurhessens", Kassel 1839, ausführliche Mitteilungen gemacht; er giebt daselbst auf S. 182 den mittleren Fehler einer Richtung (im Gauss schen Sinn) $= \pm\,0{,}88''$.

Ferner wurden im „General-Bericht der Europ. Gradm. für 1865", S. 47 von Börsch und Kaupert Angaben für den mittleren Richtungs-Fehler der kurhessischen Triangulierung gemacht, nämlich für die erste Abteilung $0{,}95''$ und $0{,}99''$, im Mittel $0{,}97''$ und für die zweite Abteilung $1{,}37''$. Unter Voraussetzung, dass die Messungen, für welche Gerling im Jahr 1839 den Wert $0{,}88''$ gab, in den Angaben vom Jahr 1865 mit inbegriffen sind, nehmen wir als Gesamtresultat das Mittel aus den Angaben $0{,}97''$

und 1,37″ für die erste und zweite Abteilung, d. h. 1,17″ und damit wird der mittlere Winkelfehler für Kurhessen:

$$m = 1{,}17\sqrt{2} = \pm 1{,}65''$$

Weiteres über Gerlings Ausgleichung wollen wir im Anschluss an eine Stelle aus Art. 22. des „supplementum theor. comb.“ behandeln. Gauss sagt nämlich in jenem Art. 22. (wie es scheint, absichtlich unbestimmt ausgedrückt):

„Wir können die Bemerkung nicht übergehen, dass unsere Theorie, wenn deren reine und strenge Anwendung beabsichtigt ist, voraussetzt, dass die mit $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. bezeichneten Grössen entweder thatsächlich unmittelbar beobachtet sind, oder aus Beobachtungen so abgeleitet sind, dass sie unter sich unabhängig bleiben oder wenigstens als unabhängig betrachtet werden können.

In der gewöhnlichen Praxis werden die Dreieckswinkel selbst beobachtet, welche daher als $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. genommen werden können, aber wir müssen eingedenk sein, dass, wenn ein System solche Dreiecke enthält, deren Winkel nicht unmittelbar beobachtet wurden, sondern als Summen oder Differenzen direkt beobachteter Winkel erhalten werden —, dass dann jene Winkel nicht als Beobachtungen zu nehmen, sondern in der Form ihrer Zusammensetzung in die Rechnung aufzunehmen sind.

Anders verhält sich die Sache bei einer Beobachtungsart, ähnlich derjenigen, welche Struve befolgt hat („Astr. Nachr. 2. Band, 1824“, S. 431), wobei die Richtungen der einzelnen, von demselben Scheitelpunkt ausgehenden Seiten erhalten werden durch Vergleichung mit einer und derselben willkürlichen Richtung. Dann nämlich sind eben diese Winkel als $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. zu nehmen, wodurch alle Dreieckswinkel in Gestalt von Differenzen sich darbieten, und die Bedingungsgleichungen der ersten Art (Stationsbedingungen), die durch die Natur der Sache von selbst erfüllt sind, als überflüssig wegfallen.

Die Art der Beobachtung, die ich selbst bei der in den letzten Jahren ausgeführten Dreiecksmessung angewendet habe, ist zwar sowohl von der ersten als der zweiten Art verschieden, jedoch kann sie mit Rücksicht auf den Erfolg der zweiten gleich geachtet werden, so dass auf den einzelnen Stationen die Richtungen der von ihnen ausgehenden Seiten, von einem willkürlichen Anfangspunkt an gezählt, als die Grössen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. genommen werden mussten.“

Diese in praktisch-geodätischer Beziehung nicht erschöpfende Darstellung, welche Gauss selbst von seinem Messungsverfahren hinterlassen hat, hat früher manche Zweifel hervorgerufen, zu deren Beseitigung die Mitteilungen, welche durch Gerling auf uns gekommen sind, zuerst den Weg gezeigt haben.

Gerling hat in seinen „Beiträgen zur Geographie Kurhessens“ (Kassel 1839) und in seinen „Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie“ (Hamburg und Gotha 1843) eine Triangulierungs-Ausgleichungsmethode angewendet und gelehrt, welche vollständig durchsichtig und anschaulich ist. Er hat nämlich die in grosser überschüssiger Zahl vorhandenen *Winkel*messungen jeder Station durch den „Horizont-Abschluss“ auf jeder Station für sich ausgeglichen, und dann die dadurch erhaltenen Resultate in Gestalt von unabhängigen Richtungen mit gleichen Gewichten in die Netzausgleichung eingeführt, genau so, wie es Gauss in Art. 24 des „suppl. theor. comb.“ gethan hat. Die Winkelmessungen auf der einzelnen Station waren nicht gleichartig verteilt, es wurden nicht alle Kombinationen gemessen.

Das von Gauss selbst in dem Briefwechsel mit Schumacher (2. Band S. 142) gegebene Horizontabschlussbeispiel enthält nicht alle Kombinationen und auch nicht gleiche Gewichte der Winkelmessungen, überhaupt keine symmetrische Gesamtanordnung.

Was sodann die Einführung der Horizontabschlussresultate in die Netzausgleichung betrifft, wobei diese Resultate als unabhängige, gleichgewichtige Richtungen behandelt wurden, so ist zunächst ein theoretischer Irrtum zu erwähnen, in welchem Gerling befangen war. Er schreibt nämlich auf S. 168 u. 169 seiner „Ausgleichungsrechnungen“:

„Man kann *offenbar* (?) die aus den Horizontabschlüssen gefundenen mittleren Fehler der gemessenen Winkel auf die Richtungen selbst übertragen, indem man jeden Winkel als die Differenz zweier Richtungen betrachtet. Demgemäss wäre der mittlere Fehler einer einmal angeschnittenen Richtung $= \frac{m}{\sqrt{2}}$ und die *Anschnittszahl* diente als Gewicht, wenn man bei weiterer Benützung dieser Richtungen ihnen verschiedene Genauigkeit beizulegen die Absicht hätte.“

„Die Vermehrung der Rechnung . . . würde aber sehr *bedeutend* (?) werden und doch jedenfalls wenig oder gar nichts nützen. Es kommen nämlich ausser den Repetitionszahlen noch manche andere Umstände in Betracht . . .“

Betrachtet man diese Darlegung im Lichte der seit Gerling weiter entwickelten Wissenschaft, so findet man, dass die Aufstellung von *Einzel*gewichten der ausgeglichenen Richtungen nur in besonderen Fällen ausführbar (vgl. unseren früheren § 82. S. 282), im Allgemeinen aber nicht möglich ist, dass vielmehr im allgemeinen Fall der gesamte Horizontabschluss mit einer Gruppe von Gewichts*gleichungen* in die Netzausgleichung übergeht. Indessen ist der Gerlingsche Gedanke der „Anschnittszahlen“ oder ähnlicher Einzelgewichte ein so natürlicher, dass er auch schon praktische Verwertung fand (vgl. S. 283).

Wäre die Gewichtsbemessung beim Übergang zum Netz theoretisch so einfach, wie Gerling sie sich dachte, so wäre sie ohne Zweifel schon längst in die Praxis eingeführt.

Dass nun Gauss selbst keine Gewichtsunterscheidungen machte, muss durch die Annahme erklärt werden, dass derselbe eine skrupulöse Gewichtsunterscheidung a priori, welche ja, wie heute zweifellos nachgewiesen, bei solchen Messungen dem Erfolg nicht genügend entspricht, schon damals in praktischer Beziehung für illusorisch hielt. Diese Ansicht wurde von General Schreiber dargelegt durch folgende Worte („Zeitschr. f. Verm. 1879“, S. 141):

„Nach meinem Dafürhalten könnte man sich, wenn nun einmal nach Richtungen beobachtet werden soll, die Gewichtsgleichungen füglich schenken. Wenn nur der Beobachter dafür sorgt, dass auf jeder Station ein gewisses Normalgewicht für jeden Winkel ungefähr erreicht wird, so wird man sämtliche Richtungen als gleichgewichtig und von einander unabhängig in die Systemausgleichung einführen dürfen, ohne an wirklicher Strenge etwas zu opfern. Ähnlich hat es auch Gauss gemacht, der bekanntlich repetierend, und folglich nach Winkeln, keineswegs aber, wie mehrfach behauptet worden ist, alle Kombinationen beobachtet hat. Aus seinen mir vorliegenden Protokollen geht vielmehr hervor, dass er auf jeder Station so lange gemessen hat, bis er meinte, dass jeder Winkel sein Recht bekommen habe. Er hat dann die Station ausgeglichen, aber keine Gewichtsgleichungen aufgestellt, sondern die hervorgehenden Richtungswerte als gleichgewichtig und von einander unabhängig in die Systemausgleichung eingeführt. Dass Gauss so verfahren ist mit dem vollen Bewusstsein dessen, was die theoretische Strenge erforderte und was an wirklicher Strenge verloren ging, wird kaum bezweifelt werden.“

Die Brücke zwischen dem Gaussschen Verfahren und dem „strengen“ Ausgleichungsverfahren wurde zuerst von Hansen gefunden, wie wir auf S. 275 (im Kleingedruckten) angegeben haben; und heute ist durch all das, was wir an Theorieen in § 70., § 82. vorgetragen haben, wohl jeder Zweifel über die Ausgleichung nach Winkeln oder nach Richtungen, sei es formell streng oder nur genähert, beseitigt.