



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 130. Die Arbeiten von Bessel und Baeyer

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

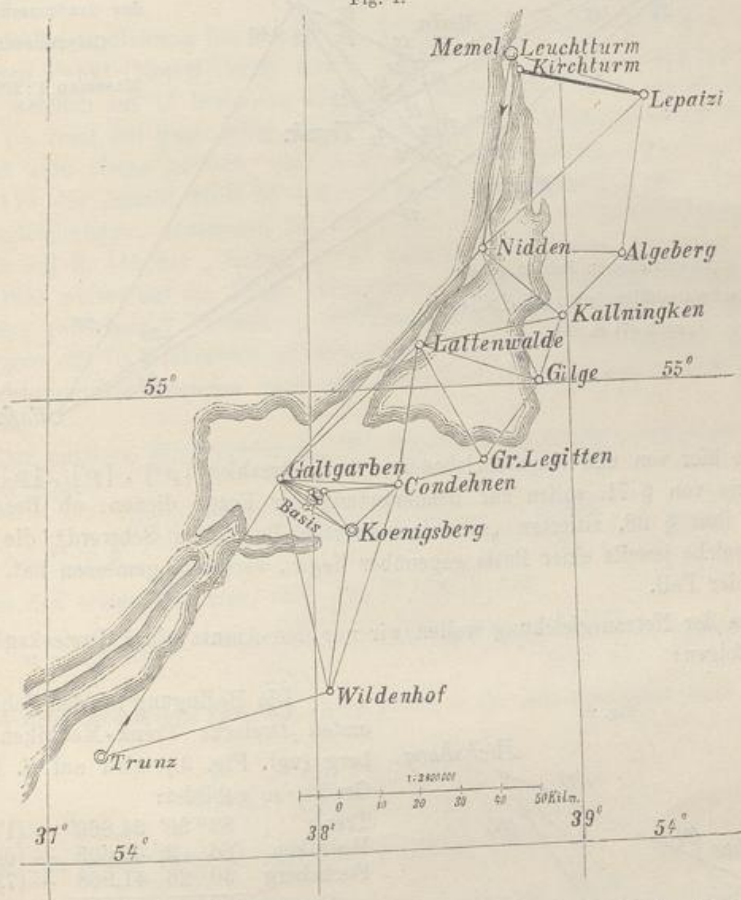
§ 130. Die Arbeiten von Bessel und Baeyer.

I. Die Gradmessung in Ostpreussen.

Das zweite klassische Erdmessungswerk in Deutschland ist veröffentlicht in dem Werke: „Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von F. W. Bessel, Direktor der Königsberger Sternwarte, Baeyer, Major im Generalstabe, Berlin 1838.“

Diese Gradmessung, deren Netz in Fig. 1. dargestellt wird, ist ebenso wie die hannoversche Gradmessung ein in der Geschichte unserer Wissenschaft höchwichtiges

Fig. 1.



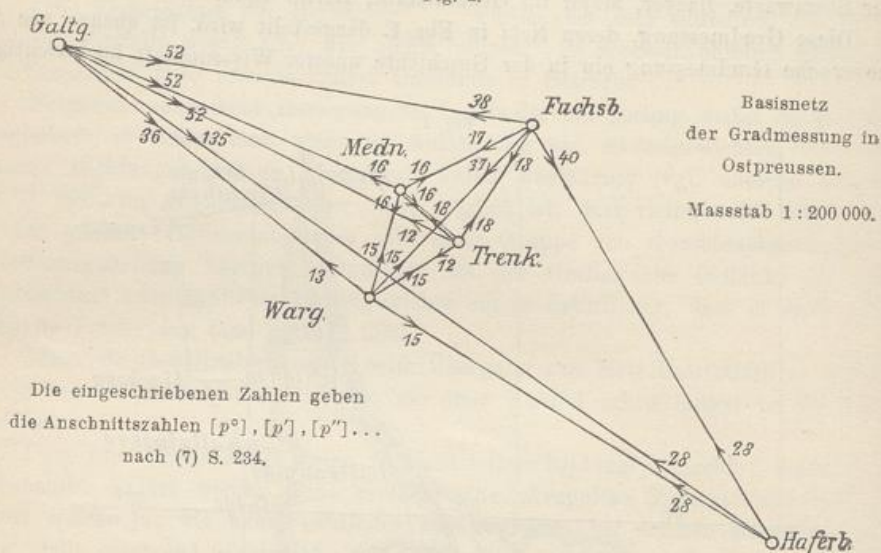
Werk, in welchem die Triangulierungs-Ausgleichung und die Erdbestimmung überhaupt in ihrer theoretischen Entwicklung wesentlich gefördert worden sind.

Auf Seite IV des Vorworts wird die neue Triangulation als Bestandteil einer ununterbrochenen trigonometrischen Verbindung von Formentera und von dem nördlichen England bis zu den russischen Gradmessungen bezeichnet, welche, an die Hauptsternwarten Europas angeschlossen, „eine Grundlage für die Bestimmung der Figur der Erde wenigstens in dem Umfange dieses Welttheils“ geben sollte.

Man erblickt hierin bereits den Grundgedanken der internationalen Vereinigung, welcher 25 Jahre später durch den Mitarbeiter Bessels, General Baeyer, in der That zur Verwirklichung geführt worden ist.

In nachfolgender Fig. 2. geben wir das Basisnetz mit der kurzen, nur 1,8^{km} langen Grundlinie Trenk-Medniken, deren Doppelmessung schon auf S. 38 und S. 40 von uns erwähnt worden ist.

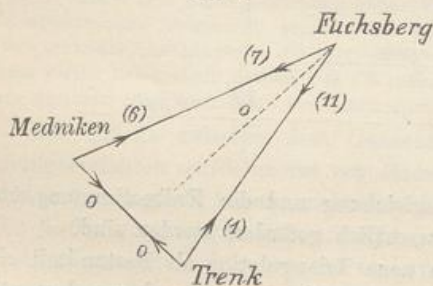
Fig. 2.



Die hier von uns eingeschriebenen Anschnittszahlen $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$... aus der Theorie von § 71. sollen zur Beantwortung der Frage dienen, ob Bessel nach dem von ihm § 38. zitierten „sehr lesenswerten Buch von Schwerd“ die spitzen Winkel, welche jeweils einer Basis gegenüber liegen, verstärkt gemessen hat. Dieses ist nicht der Fall.

Von der Netzausgleichung wollen wir nur den Ansatz einer Dreiecksgleichung näher verfolgen:

Fig. 3.



Die Bedingung für den Schluss des ersten Dreiecks Trenk-Medniken-Fuchsberg (vgl. Fig. 3.) wird auf S. 141 der Gradm. so gebildet:

Trenk	83° 30'	34,866''	+	(1)
Medniken	66 2	43,605	-	(6)
Fuchsberg	30 26	41,908	+	(7)-(11)
Summe	180° 0'	0,379''		
Soll	180 0	0,015		
Widerspruch		+ 0,364''		

Bedingungsgleichung

$$0 = + 0,364'' + (1) - (6) + (7) - (11)$$

Man sieht hieraus, dass die (1), (2), (3)... Winkelverbesserungen sind, und nicht Richtungsverbesserungen. Auf jeder Station mit s Richtungen treten solche (1) (2)... in der Anzahl $s - 1$ auf. Da alles übrige in unserem früheren § 71. bis

§ 74. zur Genüge behandelt worden ist, wollen wir nur noch einige Genauigkeitsfragen behandeln mit der Vorbemerkung, dass die Spalten 12 u. s. w. der Tabelle von S. 238 und alles was mittlere Fehler betrifft (also der ganze § 73.), *nicht* von Bessel selbst, sondern erst aus späterer Zeit stammen, indem Bessel seine Arbeit ohne alle Genauigkeitsuntersuchungen abgeschlossen hat, obgleich er schon im Jahr 1816 eine Formel zur Berechnung des mittleren Fehlers aus Stationsmessungen aufgestellt hatte (vgl. eine Notiz von Helmert nach Hagen „Vierteljahrsschr. d. Astr. Ges. 1877“ S. 192). Auch von den mit Hilfe der z berechneten Richtungskorrekturen $v_0 = z$, $v_1 = z + (1)$, $v_2 = z + (2) \dots$ hat der Verfasser der Gradm. in O. keinen weiteren Gebrauch gemacht.

Wir wollen diese Gelegenheit benützen, um einige unserer früheren Formeln anzuwenden.

Die Triangulierung der Gradm. in O. hat 17 Standpunkte und einen nur angeschnittenen Punkt (Memel-Turm), also $p = 18$ Punkte, dazu 87 eingeschnittene Richtungen, welchen auf 17 Stationen 70 Winkel entsprechen. Von den 87 Richtungen sind 76 (= 2mal 38) gegenseitig, dazu 4 einseitige Netzrichtungen und 7 Richtungen, die nicht zum Netze gehören, also $= 38 + 4 = 42$ Netzlinien. Man hat also nach (18) S. 176 die Anzahl $42 - 36 + 3 = 9$ Seitengleichungen und $38 - 17 + 1 = 22$ Dreiecksgleichungen, zusammen $84 - 4 - 54 + 1 + 4 = 31$ Bedingungsgleichungen, wie auch auf S. 140 der „Gradm. in O.“ nach anderer Abzählungsart angegeben ist.

Ohne weiter auf die Frage einzugehen, welche Bedeutung den gar nicht zu dem Netze gehörigen 7 Richtungen zuzuweisen wäre, haben wir für 31 Bedingungsgleichungen mit 70 Winkelverbesserungen (1), (2), (3) ... (70) oder 87 entsprechenden Richtungsverbesserungen nach den Formeln (7) u. ff. von § 124. Folgendes berechnet:

Der mittlere Winkelfehler aus den Quadraten der (1) (2) ... (70) wird nach (7) § 124. S. 474:

$$m = \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (70)^2}{r}} = \sqrt{\frac{17,868}{31}} = \pm 0,76''$$

oder aus den ersten Potenzen, nach (14) § 124. S. 475:

$$m = 1,2533 \frac{(1) + (2) + (3) + \dots + (70)}{\sqrt{n \cdot r}} = 1,2533 \frac{24,785}{\sqrt{70 \cdot 31}} = \pm 0,67''$$

dagegen nach Reduktion mit dem Besselschen z , aus den Quadraten nach (8) § 124. S. 474:

$$m = \sqrt{2 \frac{[v^2]}{r}} = \sqrt{2 \frac{11,90}{31}} = \pm 0,89'' \quad (1)$$

und mit den ersten Potenzen nach (15) § 124. S. 475:

$$m = 1,2533 \sqrt{2 \frac{v_0 + v_1 + v_2 \dots}{\sqrt{n \cdot r}}} = 1,2533 \sqrt{2 \frac{23,26}{87 \cdot 31}} = \pm 0,79''$$

Die 3te dieser Bestimmungen $m = \pm 0,89''$ aus den Quadraten der Richtungsverbesserungen dürfte die beste sein. (Näheres s. Jordan Steppes I. S. 34—35.)

Wenn wir endlich noch die Näherungsrechnung nach der internationalen Formel aus den Dreiecken anwenden wollen, so haben wir dazu bereits eine Vorbereitung S. 12 und die Anwendung in § 121. S. 467 mit $m = 1,177''$, allein die dort be-

nützten 22 Dreiecke sind nur diejenigen, welche als Ausgleichungsbedingungen unabhängig sind. Im ganzen sind es 29 Dreiecke, welche geben:

$$m = \sqrt{\frac{41,154}{3 \cdot 29}} = \pm 0,688'' \quad (2)$$

II. Die Küstenvermessung.

Der technisch-praktische Mitarbeiter Bessels bei der Gradmessung in Ostpreussen, Major *Baeyer*, hatte bei diesem Unternehmen auch Kenntnis der Besselschen Theorie gewonnen und verwertete dieselbe nach Bessels Tode (1846) selbständig, bei Herausgabe des Werkes:

Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Ausgeführt von der trigonometrischen Abteilung des Generalstabes. Herausgegeben von J. J. Baeyer, Oberst und Abteilungsvorsteher im Generalstabe und Dirigent der trigonometrischen Abteilung, Berlin 1849.

Man erkennt in der „Küstenvermessung“ das peinlichste Bestreben, dem Vorbilde der Gradmessung in Ostpreussen nachzukommen; bei der „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen“ auf S. 353 der Küstenvermessung wurde von Baeyer die unzutreffende Rechnungsart angewendet, welche wir schon in § 124. S. 475 im Kleingedruckten behandelt haben. Nach gleichen Prinzipien, wie im Vorstehenden, bei der Gradmessung in Ostpreussen (d. h. nach (7) u. ff. in § 124.) behandeln wir nun auch die Küstenvermessung.

Die Küstenvermessung besteht aus zwei Netzen. Das erste Netz hat 30 Stationen, 47 Bedingungsgleichungen, 113 Winkelkorrekturen und entsprechend $113 + 30 = 143$ Richtungskorrekturen, jedoch sind auf S. 290–294 145 Richtungskorrekturen angegeben, weil in Trunz eine Vermehrung um 2 eintritt.

Das zweite Netz hat 25 Stationen, 86 Bedingungsgleichungen, 141 Winkelkorrekturen und $141 + 25 = 166$ Richtungskorrekturen.

Man berechnet daraus den mittleren Winkelfehler m auf verschiedene Weise:

Für das erste Netz: a) aus den Winkelkorrekturen

$$m = \sqrt{\frac{80,15}{47}} = \pm 0,80''$$

$$m = 1,2533 \frac{45,327}{\sqrt{113 \cdot 47}} = \pm 0,78''$$

b) aus den Richtungskorrekturen

$$m = 1,2533 \sqrt{2} \frac{34,3764}{\sqrt{145 \cdot 47}} = \pm 0,74'' \quad (3)$$

Für das zweite Netz: a) aus den Winkelkorrekturen

$$m = \sqrt{\frac{43,86}{86}} = \pm 0,71''$$

$$m = 1,2533 \frac{72,63}{\sqrt{141 \cdot 86}} = \pm 0,83''$$

b) aus den Richtungskorrekturen

$$m = 1,2533 \sqrt{2} \frac{49,7174}{\sqrt{166 \cdot 86}} = \pm 0,74'' \quad (4)$$

$$\text{Durchschnittswert } m = \pm 0,77'' \quad (5)$$

Die Näherungsformel der internationalen Erdmessung giebt nach dem „Rapport“ für 1892 von Ferrero auf Seite XIII, 45 als Ergebnis von 148 Dreiecken der Küstenvermessung:

$$m = \sqrt{\frac{139,659}{3 \cdot 148}} = \pm 0,56'' \quad (6)$$

Einiges weitere zur „Küstenvermessung“ haben wir früher in „Jordan-Steppes d. Verm. I. S. 38–44“ gegeben, nebst Kommentierung eines weiteren Werkes von Baeyer: „Verbindung der preussischen und russischen Dreiecksketten.“

Nachtrag zu § 130.

Gerade während des Druckes von § 130. erscheint ein neuer, VII. Teil des Werkes „Königlich Preussische Landestriangulation“, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Berlin 1895. Dieser neue Band enthält als zweite Abteilung „die Ergebnisse älterer Messungen“ und darunter namentlich die „Gradmessung in Ostpreussen und die Küstenvermessung.“

Ohne dieses noch mit unserem Vorstehenden verschmelzen zu können, wollen wir wenigstens die Hauptangaben für mittlere Fehler ausziehen:

Bessel hat 1834 seine Dreiecke in Hinsicht des Excesses sphärisch berechnet mit einem Halbmesser $r = 3271628,89$ Toisen $= 6376523^m$ oder $\log r = 6,80458$, d. h. mit r gleich dem Aequatorhalbmesser, welcher dem metrischen System zu Grunde liegt, während nach Besselschen Erddimensionen von 1841 in der Breite von 55° zu nehmen ist $\log r = 6,80514$. Der Radius wird grösser, also die Excesse kleiner, was bei dem grössten Dreieck Galtgarben-Wildenhof-Trunz $0,019''$ ausmacht. Dadurch ändern sich auch die Dreiecksschlüsse ein wenig, und der schon oben bei (2) S. 502 angegebene Wert $m = 0,688''$ entspricht den umgerechneten Dreiecksschlüssen, welche auf S. 153 des VII. Teiles „Triangulation“ einzeln angegeben sind.

Für die Küstenvermessung giebt „Hauptdreiecke, VII. Teil“ auf S. 186 als Berechnung aus den Richtungskorrekturen:

$$1. \text{ für das erste Netz (nördlicher Teil)} \quad m^2 = 3,1416 \frac{34,3764^2}{145 \times 47} = 0,545$$

$$m = 0,738''$$

$$2. \text{ für das zweite Netz (südlicher Teil)} \quad m^2 = 3,1416 \frac{49,7174^2}{166 \times 86} = 0,544$$

$$m = 0,738''$$

Diese Werte stimmen mit den unserigen schon oben unter (3) und (4) S. 502 angegebenen überein (abgesehen von der Abrundung).

Auf S. 187 „VII. Teil, Hauptdreiecke“ sind auch die Berechnungen des mittleren Winkelfehlers nach der internationalen Formel gegeben:

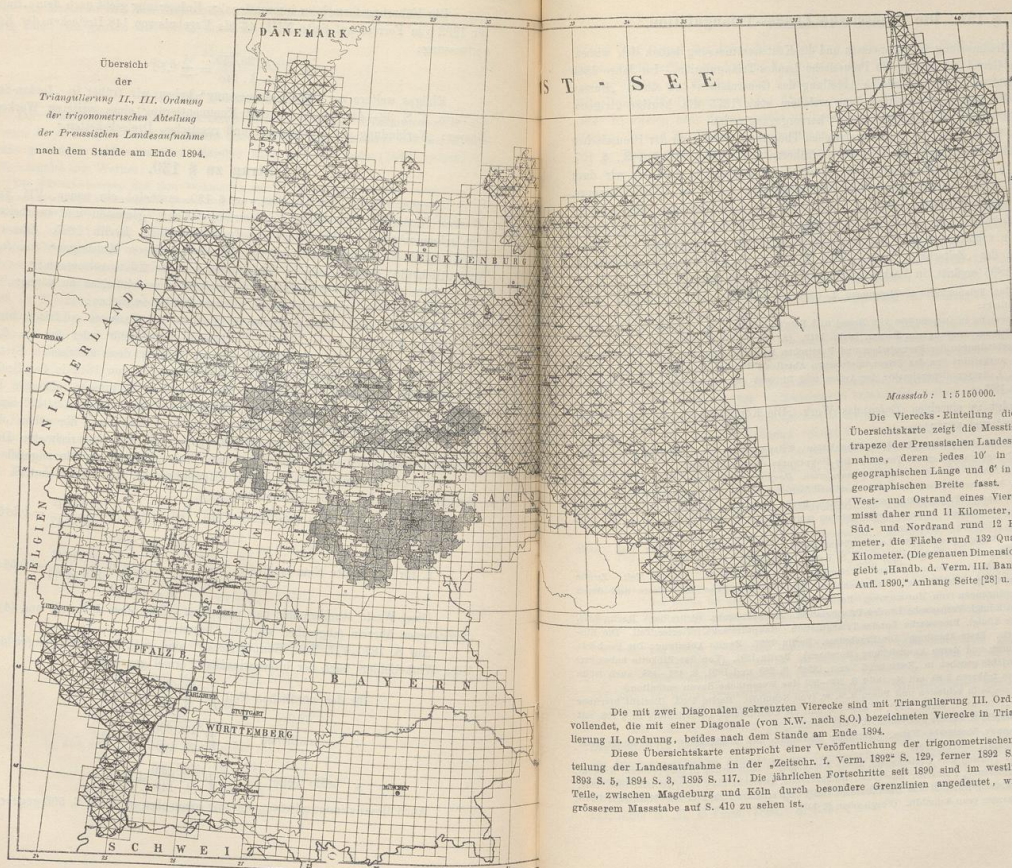
$$\text{für den nördlichen Teil} \quad \sqrt{\frac{39,021}{3 \cdot 45}} = 0,538'' \quad (7)$$

$$\text{„ „ südlichen „} \quad \sqrt{\frac{100,638}{3 \cdot 103}} = 0,571'' \quad (8)$$

$$\text{„ beide Teile} \quad \sqrt{\frac{139,659}{3 \cdot 148}} = 0,561'' \quad (9)$$

Auch dieses stimmt mit dem, was wir schon oben unter (6) S. 503 gegeben haben.

Übersicht
der
Triangulation II., III. Ordnung
der trigonometrischen Abteilung
der Preussischen Landesaufnahme
nach dem Stande am Ende 1894.



Maßstab: 1:5 150 000.

Die Vierecks-Einteilung dieser Übersichtskarte zeigt die Messtischtrapeze der Preussischen Landesaufnahme, deren jedes 10' in der geographischen Länge und 6' in der geographischen Breite faßt. Der West- und Oststrand eines Vierecks mißt daher rund 11 Kilometer, der Süd- und Nordrand rund 12 Kilometer, die Fläche rund 132 Quadratkilometer. (Die genauen Dimensionen giebt „Handb. d. Verm. III. Band, 3. Aufl. 1890.“ Anhang Seite [28] u. [29].)

Die mit zwei Diagonalen gekreuzten Vierecke sind mit Triangulation III. Ordnung vollendet, die mit einer Diagonale (von N.W. nach S.O.) bezeichneten Vierecke in Triangulation II. Ordnung, beides nach dem Stande am Ende 1894.

Diese Übersichtskarte entspricht einer Veröffentlichung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1892 S. 129, ferner 1892 S. 195, 1893 S. 5, 1894 S. 3, 1895 S. 117. Die jährlichen Fortschritte seit 1890 sind im westlichen Teile, zwischen Magdeburg und Köln durch besondere Grenzlinien angedeutet, wie in größerem Maßstabe auf S. 410 zu sehen ist.