Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 136. Hessen

mitgeteilt (dagegen fehlen sie in der Veröffentlichung des geodätischen Instituts, Rheinisches Dreiecksnetz II, 1882, wie auch die Lagepläne, die Höhen und andere Einzelheiten dort weggelassen sind —).

Mit diesen badischen Coordinaten haben wir alsbald nach dem Erscheinen des Rheinischen Dreiecksnetzes 1883, Vergleichungen berechnet, welche zuerst in der „Zeitschr. f. Verm. 1884," S. 77 mitgeteilt sind, wie auch in Nachstehendem zu sehen ist, wo mit Rh_1 und Rh_2 die zwei Ausgleichungen des Rheinischen Dreiecksnetzes unterschieden sind, welche schon in § 132 S. 517 erwähnt wurden.

Seite.	*log* $\begin{matrix} Rh_1 \\ Rh_2 \end{matrix}$	*log* Bad.	Bad.—Rhein.
			log
Mannheim-Durlach	4,736 2660	4.736 2765	+ 0.000 0105
	4.736 2651		114
Königsstuhl-Katzenbuckel . . .	4.378 5264	4.378 5363	0.000 0101
	4.378 5259		104
Königsstuhl-Durlach	4.686 1360	4.686 1437	0.000 0077
	4.686 1356		81
Katzenbuckel-Durlach	4.822 6414	4.822 6505	0.000 0091
	4.822 6409		96
Durlach-Hornisgrinde	4,683 2435	4.683 2449	0.000 0014
	4,683 2426		23
Hornisgrinde-Feldberg	4,917 6656	4.917 6674	0,000 0018
	4.917 6644		30
		Mittel	+ 0.000 0071

Die logarithmische Differenz 0,000 0071 entspricht 7,1 : 0,434 = 16 Milliontel der Länge oder 16 Millimeter auf 1 Kilometer, und nahezu ebenso gross, nämlich 0,000 0085 oder 19 Milliontel beträgt die *Änderung* des Massstabsverhältnisses innerhalb des badischen Gebietes. Beides sind sehr befriedigende Ergebnisse.

§ 136. Hessen.

Im Jahre 1808 wurde durch *Eckhardt* und *Schleiermacher* zwischen Darmstadt und Griesheim eine 7,7^{km} lange Basis mit drei Messstangen von je 4 Toisen Länge, aus Kiefernholz gemessen. Als Normalmass diente eine noch heute auf dem Darmstädter Museum befindliche Toise von Lenoir. Die definitive Annahme für die Basislänge ist 3976,087 Toisen = 7749,5379^{m} (vgl. die Dreiecksberechnung von Nell, „Zeitschr. f. Verm. 1881," S. 109, nämlich 3099,815 hess. Klafter (zu 2,5^{m}) = 7749,5375^{m}). Die Winkelmessung geschah durch Theodolite mit centesimaler Teilung, mit 20facher Repetition.

Für die Ausgleichung der Triangulierung wurde in Hessen schon sehr frühzeitig die Methode der kleinsten Quadrate angewendet, und zwar in einer Form, welche *Schleiermacher* (geb. etwa um 1780, gest. 1844) dafür fand, dieselbe besteht darin, dass man bei der Ausgleichung von Winkeln, welche in einzelnen Dreiecken mit Polygonschlussproben gruppiert sind, die einzelnen Dreiecke zuerst vorläufig auf $180° + \varepsilon$ ausgleicht, und dann die Seitengleichungen und Horizontgleichungen von den Dreiecksgleichungen trennt, indem die Correlaten der letzteren möglichst früh eliminiert werden. Es wird hiebei der Umstand, dass die Dreiecksgleichungen nur je *drei* Unbekannte enthalten, also eine ganze Menge Coefficienten = Null sind, zur bequemen Elimination benützt.

Da indessen dieser Umstand auch in anderer Art ausgenützt werden kann, und sich bei jeder Eliminationsart in irgend welcher Weise von selbst günstig bemerklich machen muss (wie an dem Netze von S. 174 und an dessen Behandlung in den früheren Auflagen unseres Buches gesehen werden kann), so ist ein besonderer Gewinn in der fraglichen Methode nicht zu sehen, dagegen ist es ein ungemein grosses Verdienst Schleiermachers, dass er schon vor 1830 *überhaupt* die M. d. kl. Q. praktisch zu verwerten verstand.

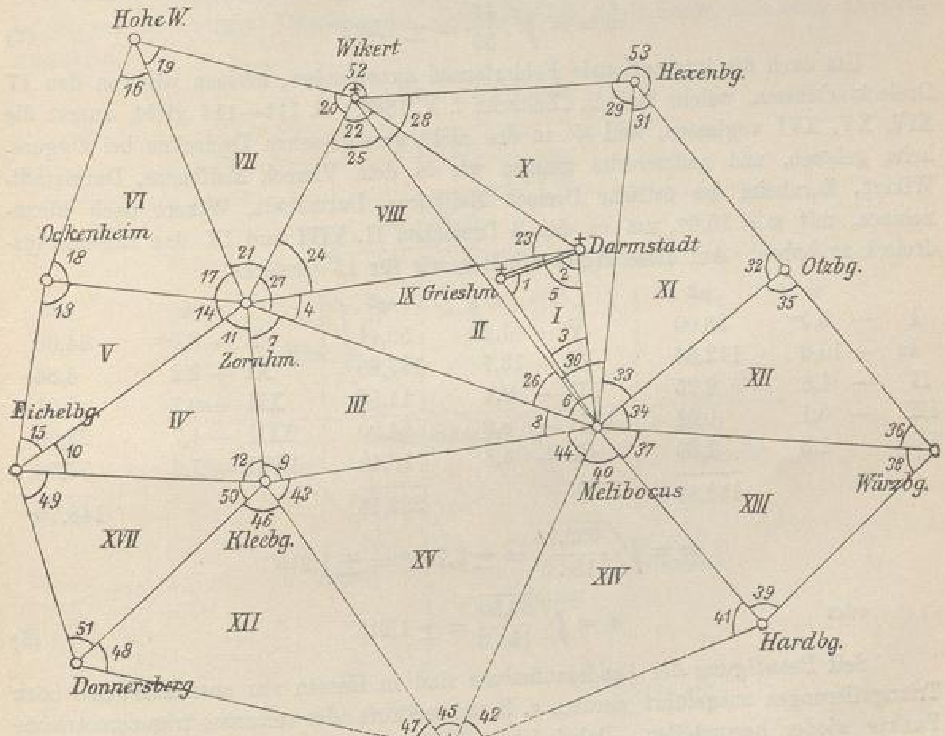
Eine kritische Beleuchtung der Schleiermacherschen Methode giebt Helmert in Schlömilchs „Zeitschr. f. M. u. Ph. 14. Jahrg. 1869," S. 201—205 mit dem Resultat, dass die Methode unter Umständen am Platz, aber z. B. nicht auf Richtungsmessungen zu übertragen sei. Die neueste Mitteilung von Nell in der „Zeitschr. f. Verm. 1881," S. 7—11 (mit Anwendung auf unser badisches Netz von S. 174) bestätigt dieses.

Amtlich veröffentlicht ist über die Triangulierung von Hessen nur eine kleine Schrift: Die Dreiecke I. und II. Ranges in der Provinz Rheinhessen für die Basis bei Darmstadt berechnet, Darmstadt gedruckt in dem lithographischen Institute 1821.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1891," S. 109—121 wurde von Prof. *Nell* eine Dreiecksausgleichung nach Schleiermachers Methode gegeben für ein Netz, das in nachstehender Fig. 1. dargestellt ist:

Fig. 1.

Hessisches Dreiecksnetz 1 : 750 000.



Das Netz hat 15 Punkte, 31 Linien und 50 gemessene Winkel. Die 3 Winkel 42, 45, 47 auf Oggersheim sind nicht gemessen, man hat also $p = 15$ Punkte im Ganzen, aber darunter einen, welcher nur vorwärts eingeschnitten ist, und $l = 31$ Linien im Ganzen, worunter $l' = 4$ einseitig gemessene.

Man hat daher nach (12) S. 174:

$$31 - 30 + 3 = 4 \text{ Seitengleichungen}$$
$$(31 - 4) - (15 - 1) + 1 = 14 \text{ Dreiecksgleichungen}$$
$$50 - 30 + 4 = 24 \text{ Gleichungen im Ganzen,}$$

und zwar ausser den 4 + 14 Netzgleichungen noch 6 Stationsgleichungen, nämlich 2 auf Zornheim und je eine auf Melibocus, Klobberg, Wikert, Hexenberg. Die von Nell gegebene Ausgleichung liefert die Quadratsumme der 50 Winkelverbesserungen in Sekunden neuer Teilung $(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots = 609{,}45$, also den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m' = \sqrt{\frac{609{,}45}{24}} = \pm 5{,}04^{cc} = \pm 1{,}633'' \qquad (1)$$

Dieses ist aber nicht der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels, wegen der 6 Stationsgleichungen.

Ohne uns auf eine genauere Berechnung nach (17)—(20) § 124. S. 476 einzulassen, wollen wir die 50 Winkel mit 6 Stationsgleichungen näherungsweise betrachten als konzentriert auf 50 — 6 = 44 Winkel ohne Stationsgleichungen, d. h. wir wollen aus (1) ableiten den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = m' \sqrt{\frac{44}{50}} = \pm 1{,}532'' \qquad (2)$$

Um auch die internationale Fehlerformel anzuwenden, müssen wir von den 17 Dreiecksschlüssen, welche Nell in „Zeitschr. f. V. 1881," S. 111—114 giebt, zuerst die XIV, XV, XVI weglassen, weil sie zu den nicht geschlossenen Dreiecken bei Oggersheim gehören, und andererseits müssen wir in dem Viereck Melibocus, Darmstadt, Wikert, Zornheim das östliche Dreieck Melibocus, Darmstadt, Wikert noch hinzunehmen, mit $w = 10{,}6^{cc}$, um zu den 3 Dreiecken II, VIII und IX das Ergänzungsdreieck zu haben. Auf diese Weise erhalten wir für 15 Dreiecke:

	w	w^2		w	w^2		w	w^2
I	$-6{,}0^{cc}$	36,00	V	$-7{,}1^{cc}$	50,41	X	$+8{,}0^{cc}$	64,00
Ia	$+10{,}6$	112,36	VI	$-13{,}7$	187,69	XI	$+2{,}2$	4,84
II	$-1{,}5$	2,25	VII	$+3{,}4$	11,56	XII	$+0{,}1$	0,01
III	$-0{,}1$	0,01	VIII	$-8{,}0$	64,00	XIII	$+4{,}7$	22,09
IV	$-1{,}3$	1,69	IX	$-4{,}3$	18,49	XVII	$-7{,}6$	57,76
		152,31			332,15			148,70

$$m = \sqrt{\frac{633{,}16}{15 \cdot 3}} = \pm 3{,}751^{cc} = \pm 1{,}215''$$

oder

$$m = \sqrt{\frac{66{,}50}{15 \cdot 3}} = \pm 1{,}215'' \qquad (3)$$

Seit Beendigung der Landesaufnahme sind in Hessen nur ausnahmsweise noch Triangulierungen ausgeführt worden, z. B. um zerstörte oder verlorene trigonometrische Punkte wieder herzustellen. Dabei ist nach den Vorschriften von 1824 verfahren worden. Neue Verordnungen sind seitdem nicht gegeben worden.