

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 141. Zusammenfassung der mittleren Winkelfehler

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

$$\mu = \sqrt{\frac{9350 + 281}{9814 + 159}} = \pm 0,98'' \quad (3)$$

wie gewöhnlich ist μ_2 grösser als μ und zwar ist das Verhältnis:

$$\frac{\mu_2}{\mu} = \frac{1,33}{0,98} = 1,36 \quad (4)$$

Dieser Quotient, welcher eigentlich gleich 1 sein sollte, ist charakteristisch für etwaige verdeckte Fehler im Netz: und giebt also eine Fehlervergrösserung im Verhältnis 1,36 : 1.

Dazu wurden noch einige Funktions-Gewichte und Fehler berechnet, die wir schon in „Z. f. V., 1891,“ S. 56—57 zusammengestellt haben.

Der kleine mittlere Winkelfehler $m = \pm 0,35''$ in (1) wird, abgesehen von der Vortrefflichkeit des Beobachters, in der grossen Zahl der Messungen zu suchen sein, welche aus der Hereinziehung vieler Richtungen II. Ordnung in die Stationsausgleichungen I. Ordnung folgte, indem I. Ordnung 262 Richtungen hat, wozu noch 209 Richtungen II. Ordnung hinzukamen.

Auf der Station Porsberg (N. S. 214—227) sind 8 Richtungen I. Ordnung, welche mit 13 Richtungen II. Ordnung zusammen eine Ausgleichung von 21 Richtungen bilden, und davon haben die 8 Richtungen I. Ordnung Anschnittszahlen zwischen 33 und 36, dabei ist Einstellung mit Fernrohr links und rechts zusammen als Anschnittszahl = 1 gerechnet. Nach der Schreiberschen Methode (S. 270—271) würden die Anschnittszahlen erheblich kleiner werden, und bei dieser grossen Ungleichheit müssen auch die sächsischen Stationswinkelgewichte erheblich grösser werden als bei der preussischen Wiederholungsart, d. h. es ist die grosse Schlussgenauigkeit der sächsischen Triangulierung wesentlich auf der grossen Zahl und der Verknüpfung der Messungswiederholungen beruhend.

Jenes in Sachsen zum erstenmal unternommene Hineinziehen von Richtungen II. Ordnung in die Sätze der Stationsausgleichungen I. Ordnung hatte ausser der Genauigkeitssteigerung in I. Ordnung noch den Vorteil, dass II. Ordnung selbst mit grosser Genauigkeit sofort mit eingebunden wurde (jedoch ohne Rücksicht, ob nach Jahren Sichthindernisse für Fortsetzung II. Ordnung entstehen). Andererseits erforderte das Zusammennehmen einen bequemen von Zeit und anderen Umständen unabhängigen Geschäftsgang, welchen ein Beobachter und Leiter sich verschaffen konnte, der aber bei der sonst nötigen Arbeitsteilung zwischen I. und II. Ordnung nicht immer ausführbar sein würde.

Nach der Netzausgleichung und Berechnung wurde ein rechtwinkliges Koordinatensystem nach Soldner scher Art angelegt, dessen Nullpunkt der Basiszwischenpunkt 33 Grossenhain, und dessen x -Achse der durch diesen Punkt gehende Meridian ist.

§ 141. Zusammenfassung der mittleren Winkelfehler.

Um eine erste Übersicht über die zahlreichen in dem vorstehenden Kapitel berechneten Genauigkeitswerte zu gewinnen, wollen wir damit beginnen, eine Tabelle aller derjenigen mittleren Winkelfehler aufzustellen, welche nach der Näherungsformel (1) S. 469 von § 123 für deutsche Triangulierungen aus diesem Jahrhundert berechnet worden sind.

Folgendes ist diese Tabelle:

Triangulierung	Citat	[w^2]	n	$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}$
Hannover, Gauss	§ 129. S. 491, (5)	10,81	7	$\pm 0,72''$
Gradmessung in Ostpreussen, Bessel	§ 130. S. 502, (2)	41,15	29	0,69
Küstenvermessung, Baeyer	§ 130. S. 503.	189,66	148	0,56
Preussische Landesaufnahme	§ 131. S. 508.	636,43	690	0,55
"	§ 131. S. 510, (3)	18,93	21	0,47
Geodätisches Institut	§ 132. S. 518.	246,11	187	0,77
Bayern	§ 133. S. 521, (2)	3205,58	339	1,77
" Schwerd	§ 133. S. 522, (6)	6,58	4	0,74
Württemberg, Bohnenberger	§ 134. S. 524, (2)	18,64	6	0,87
" Schoder, Hammer	§ 134. S. 524, (3)	4,05	6	0,47
Baden	§ 135. S. 531, (6)	652,45	86	1,59
Hessen	§ 136. S. 534, (3)	66,50	15	1,22
Nassau	§ 137. S. 536, (4)	27,35	15	0,78
Mecklenburg	§ 139. S. 543, (4)	276,87	69	1,16
Sachsen	§ 140. S. 550, (1)	72,58	197	0,35
	Summe	5413,64	1769	

$$\text{Gesamtmittel } m = \sqrt{\frac{5413,64}{1769 \cdot 3}} = \pm 1,01'' \quad (1)$$

Wir haben also aus 1769 deutschen Dreiecken dieses Jahrhunderts den mittleren Fehler eines Winkels in runder Zahl $m = \pm 1''$.

Wenn man die vorstehenden Zahlen auch zu kritischen Vergleichungen benützen will, so muss man, abgesehen von allen Nebenumständen geschichtlicher und sachlicher Art, von denen jetzt nicht die Rede sein soll, in mathematischer Beziehung auch die Zahl n der Dreiecke berücksichtigen, aus welcher ein Wert m berechnet ist, und gerade mit Rücksicht hierauf haben wir in § 117. und § 118. auch noch den mittleren Fehler des mittleren Fehlers bestimmt, und da die Dreieckswidersprüche den Charakter *wahrer* Fehler ε haben, wobei aber im einzelnen Falle $w^2 = 3\varepsilon^2$ ist, haben wir aus (14) S. 450 für unseren Fall:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}} \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{n}}\right) \quad (2)$$

Dieses auf zwei Werte von der vorstehenden Tabelle, Bayern und Württemberg angewendet giebt:

$$\text{Bayern } m = 1,77'' \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{339}}\right) = 1,77'' (1 \pm 0,04)$$

$$\text{Württemberg } m = 0,47'' \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{6}}\right) = 0,47'' (1 \pm 0,29)$$

Es erscheint also der Bayerische Wert $1,77''$ viel mehr feststehend, weil aus der grossen Zahl von 339 Dreiecken ermittelt, als der nur aus 6 Dreiecken abgeleitete Württembergische Wert $0,47''$, welcher mehr nur den Charakter eines innerhalb $1''$ schwankenden Zufallswertes hat.

Eine weitere Tabelle dieser Art bietet uns der schon mehrfach zitierte „Rapport sur les triangulations présentées à la dixième conférence générale à Bruxelles, en 1892, par le Général A. Ferrero,“ welcher auf S. 5 eine solche Zusammenstellung giebt, aus welcher wir nachstehendes entlehnen:

Triangulierung.	[w^2]	n	$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}$
Oesterreich-Ungarn	1753,37	670	+ 0,93"
Belgien	523,04	219	0,89
Dänemark	198,82	87	0,87
Spanien	791,15	325	0,90
Frankreich	5467,08	914	1,41
Grossbritannien	5548,18	552	1,83
Griechenland	179,79	102	0,77
Italien	1305,24	514	0,92
Norwegen	273,13	179	0,71
Portugal	699,05	139	1,29
Rumänien	325,67	36	1,74
Russland	4181,79	998	1,18
Schweden	1088,96	304	1,09
Schweiz	88,75	40	0,86
Summe	22424,02	5079	

$$\text{Gesamtmittel } m = \sqrt{\frac{22424,02}{5079 \cdot 3}} = \pm 1,21'' \quad (3)$$

Wenn man diese Tabelle und die vorhergehende für Deutschland zusammennimmt, so bekommt man aus 6848 Dreiecken als Gesamtmittel für Europa:

$$m = \sqrt{\frac{27838,66}{6848 \cdot 3}} = \pm 1,16'' \quad (4)$$

Alle diese 6848 Dreiecksschlüsse zusammengebracht zu haben, ist das Verdienst des italienischen Generals und internationalen Erdmessungs-Kommissärs Ferrero.

Der mittlere Winkelfehler $m = \pm 1''$ für Europäische Triangulierungen I. Ordnung ist dadurch sichergestellt.

Wenn wir von diesen 6848 Dreiecken nicht bloss die Summen $[w^2]$ sondern auch noch die Summen $[w^4]$ hätten, dann könnten wir mit Hilfe unserer Gleichung (12) § 121. S. 467 noch weitere Schlüsse aus jenem kostbaren Materiale ziehen. —

Zur Zeit der ersten Triangulierungen, die wir haben, am Anfange des 17ten Jahrhunderts war der mittlere Winkelfehler, vor Erfindung des Fernrohrs, soweit wir aus den dürftigen Angaben von Snellius und Schickhart (§ 125. und § 126.) schliessen können, etwa $\pm 2'$ bis $\pm 4'$ (Schickhart $\pm 4'$ für eine Richtung, S. 481).

Im 18. Jahrhundert, bei den klassischen Gradmessungen der Franzosen, ging der mittlere Winkelfehler rasch herunter auf einige Sekunden ($\pm 3,6''$ und $\pm 1,1''$, S. 483 und S. 484).

Im 19. Jahrhundert haben wir in Europa aus den gründlichen Berechnungen von Ferrero, (s. oben (4)) einen mittleren Winkelfehler von $\pm 1''$.

Welches wird die Genauigkeitssteigerung im 20. Jahrhundert werden? —

Alles Vorstehende bezieht sich nur auf die Winkel-Genauigkeit. Wie sich die Winkelfehler in den Dreiecken fortpflanzen und zu Basisanschlussfehlern führen, ist eine Frage, welche interessante Theorien erzeugt hat und in neuerer Zeit durch die internationale Erdmessung auch praktischer Lösung näher geführt worden ist. Wir werden in unserem III. Bande „Handb. d. V.“ 4. Aufl. darauf zurückkommen. Inzwischen ist hierzu zu zitieren das Werk „Veröffentlichung des geodätischen Instituts, die Europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft. Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von Helmert, Berlin 1893.“ (Vgl. auch S. 283 und 291).

Einen Bericht über S. 241 u. ff. dieses Werkes, Basisanschlüsse betreffend, haben wir in „Z. f. V., 1894.“ S. 220—222 gegeben; auch gehört hiezu: „Verbindung und Vergleichung geodätischer Grundlinien, zusammengestellt im Centralbureau der internationalen Erdmessung, von Dr. Fr. Kühnen, Verhandl. d. X. allgem. Konferenz d. internat. Erdmessung zu Brüssel, 1892.“ S. 518—546. „Zeitschr. f. Verm., 1894.“ S. 75—79.

Nachträge.

Die Neubearbeitung dieses im Sept. 1893 unerwartet rasch im Buchhandel vergriffenen Bandes ist aus verschiedenen Gründen nicht ganz in einem Zuge möglich gewesen, und es sind am Schlusse noch einige Ergänzungen zu früheren Kapiteln angewachsen.

§ 142. Rückwärtseinschneiden mit mehreren Standpunkten.

Von der Triangulierung der Stadt Hannover, deren Netz auf S. 408—409 gegeben ist, hat sich im Jahre 1894 eine Gruppen-Ausgleichung von 5 unter sich polynomatisch verbundenen Punkten ergeben, welche als praktisches Beispiel zu Kap. III hier noch eine Stelle finden mag (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1895“, S. 273—276).

Bei Stadttriangulierungen kann es oft vorkommen, dass man von einem Platze aus zwar eine genügende Zahl von Türmen oder anderen bereits durch Coordinaten bestimmten Hochpunkten sehen, aber sie nicht auf *einen* Theodolitstandpunkt zusammenbringen kann. Wie man trotzdem alles in eine Ausgleichung zusammenfassen kann, wollen wir an dem nachfolgenden Beispiele zeigen:

Der Lageplan (Fig. 1. S. 555) zeigt den Königsworther Platz in Hannover, von welchem aus 7 trigonometrische Punkte gesehen werden können, aber nie von *einem* Punkte aus mehr als 4, weil die Gebäude, Bäume u. s. w. die Sichten stören. Nach vielem Absuchen wurden 4 Standpunkte *A*, *B*, *D*, *E* ausgewählt, welche mit einem Hilfspunkte *C* als Polygon zusammen gemessen wurden und dadurch in die nötigen Centrierungsverbindungen gebracht wurden. Zugleich wurden auch 2 Kontrollbolzen *a* und *b* gesetzt, welche zu der nachfolgenden Ausgleichung zwar in keiner Beziehung stehen, aber doch, um alles Technische zu erwähnen, auch mit aufgeführt werden sollen. (Die Festlegungen von *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sind mit Eisenbolzen nach „Handb. d. Verm. II. Band, 4. Aufl., 1893“, S. 281 und die Punkte *a* und *b* nach S. 364 ebendas. gemacht.) Die 6 Entfernungen *AB* = 22,783 m, *BE* = 60,276 m u. s. w. sind mit gewöhnlichen Messlatten auf wenige Millimeter genau erhalten. Der beste Punkt ist *A* mit 4 Sichten: Martin, Wasserturm, Hochschule S. und SO.; auch *B* hat noch 3 Sichten: Martin, Wasserturm, Solms, während *E* und *D* nur noch je 2 Sichten: Palmenhaus, Christus und Hochschule, Christus haben.

Wir wollen zuerst die Coordinaten aller gegebenen Punkte und die genähert orientierten Messungs-Abrisse geben:

festgegebene Punkte:

Martin, Turm	$y = -25273,930$ m	$x = -28710,901$ m
Wasserturm	— 25588,488	— 29071,474
Solms, Turm	— 24695,660	— 27176,634
Palmenhaus	— 25977,983	— 25706,108
Hochschule S. Turm	— 24709,769	— 26868,278
SO. "	— 24667,066	— 26851,965
Christus, Turm	— 24158,271	— 26989,625

(1)