Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 147. Ausrechnung des Maximalfehlers

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{28}$$

oder nach der Exponentialreihe S. 434:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{h^2 \varepsilon^2}{1} + \frac{h^4 \varepsilon^4}{2} - \frac{h^6 \varepsilon^6}{6} + \ldots \right) \tag{29}$$

Wir wollen noch zeigen, wie schon auf S. 462 unten bis 463 angedeutet ist, dass unsere Funktion (1) S. 566 für $n = \infty$ in diese Reihe (29) übergeht. Wenn man M aus (22) in m ausdrückt, so giebt (1):

$$y_n = \frac{1}{2} \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2n+1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots \quad 2n} \frac{(2n+3)}{(2n+2)} \frac{1}{m\sqrt{2n+5}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{(2n+5)\, m^2}\right)^{n+1} \tag{30}$$

Dazu wegen (17) S. 432, $h^2 = \dfrac{1}{2\, m^2}$ giebt:

$$y_n = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2n+1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots \quad 2n} \frac{(2n+3)}{(2n+2)} \frac{h}{\sqrt{4n+10}} \left(1 - \frac{2h^2}{2n+5} \varepsilon^2\right)^{n+1} \tag{31}$$

Die Exponentialfunktion von (31) giebt:

$$1 - \frac{n+1}{2n+5} 2\, h^2 \varepsilon^2 + \frac{(n+1)\, n}{1 \,.\, 2} \frac{4}{(2n+5)^2} h^4 \varepsilon^4 - \ldots$$

für $n = \infty$ geht dieses in die Klammer von (29) über, und dass auch der Faktor, vor der Klammer in (30) mit $\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$ in (29) übereinstimmend wird, haben wir auch schon auf S. 463 oben durch Citat des Wallisschen Ausdrucks für π gezeigt.

§ 147. Ausrechnung des Maximalfehlers.

Wie man aus einer Reihe wahrer Beobachtungsfehler ε den zugehörigen theoretischen Maximalfehler berechnen kann, haben wir bereits in § 121. an einem kleinen Beispiele (13)—(14) S. 467 gezeigt, und wir wollen noch den innern Sinn einer solchen Rechnung dahin zusammenfassen, dass wir von den unendlich vielen Fehlerfunktionen, welche in der Form (1) § 146. S. 566 enthalten sind, diejenige auswählen, welche einer Fehlerreihe ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$ sich am besten anschmiegt, nach Massgabe der zwei Mittelwerte m^2 und r^4; und den zugehörigen Wert M betrachten wir als den theoretischen Maximalfehler jener Fehlergruppe ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$, der aber nicht notwendig mit demjenigen Wert ε_m zusammenfallen muss, welcher unter allen ε der grösste ist, ebenso wenig, als der theoretische wahrscheinliche Fehler, den man aus (9) §. 113. S. 440 berechnet, mit dem durch Abzählen (nach S. 440 unten) erhaltenen Wert zusammenfallen muss.

Alles dieses bezieht sich aber auf *wahre* Fehler ε, welche im Allgemeinen nicht bekannt und durch die scheinbaren Fehler v der Ausgleichungen zu ersetzen sind, was wir hier nur wenigstens für *eine* Unbekannte, d. h. für das arithmetische Mittel, durchführen wollen. Es wird sich um eine Formel für das mittlere Fehlerbiquadrat r^4 handeln, welche der längst bekannten Formel für das mittlere Fehlerquadrat m^2 nach (10) S. 21 mit dem Nenner $n-1$ entspricht.

Dabei wollen wir wieder wie früher S. 21 mit n die Anzahl der Beobachtungen bezeichnen, was keine Verwechslung geben wird mit dem Zeichen n, welches im vorigen § 146. die *Grad*zahl der Kurvenberührung bedeutet hat.

Wenn eine Anzahl n von gleichartigen Beobachtungen l vorliegt mit dem wahren Wert X der Unbekannten und dem arithmetischen Mittel x, so sind die wahren Fehler ε und die scheinbaren Fehler v, nach (7) § 7. S. 21 ausgedrückt durch:

$$\varepsilon = X - l \qquad v = x - l \qquad \varepsilon = v + (X - x) \tag{1}$$

also auch

$$v = \varepsilon - (X - x) \tag{2}$$

und die Summe

$$[v] = [\varepsilon] - n\,(X - x) \tag{3}$$

Da aber beim arithmetischen Mittel $[v] = 0$ ist (nach (3) S. 20), so hat man aus vorstehendem (3):

$$0 = [\varepsilon] - n\,(X - x) \quad \text{oder} \quad X - x = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

oder wegen (2):

$$v = \varepsilon - \frac{[\varepsilon]}{n} \tag{5}$$

$$v^2 = \varepsilon^2 - 2\,\varepsilon\,\frac{[\varepsilon]}{n} + \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} \tag{6}$$

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - 2\,\frac{[\varepsilon]\,[\varepsilon]}{n} + \frac{n\,[\varepsilon]^2}{n^2}$$

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} \tag{7}$$

Nebenbei bemerken wir, dass diese Gleichung (7) auch schon in (12) S. 86 enthalten ist, wenn man dort alle $a = 1$ und alle $b = 0$, $c = 0 \ldots$ setzt, (wie auch schon bei (3) § 118. S. 451 benützt worden ist).

Nach dieser Zwischenbemerkung zu unserer eigentlichen Aufgabe zurückkehrend, bilden wir durch Quadrieren von (6) ein einzelnes v^4:

$$\begin{aligned} v^4 = \varepsilon^4 - 4\,\varepsilon^3\,\frac{[\varepsilon]}{n} &+ 2\,\frac{\varepsilon^2\,[\varepsilon]^2}{n} \\ + 4\,\varepsilon^2\,\frac{[\varepsilon]^2}{n^2} &- 4\,\frac{\varepsilon\,[\varepsilon]^3}{n^3} \\ &+ \frac{[\varepsilon]^4}{n^4} \end{aligned}$$

und die Summe aller v^4:

$$\left.\begin{aligned} [v^4] = [\varepsilon^4] - 4\,[\varepsilon^3]\,\frac{[\varepsilon]}{n} &+ \frac{2\,[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2}{n^2} \\ + 4\,[\varepsilon^2]\,\frac{[\varepsilon]^2}{n^2} &- \frac{4\,[\varepsilon]\,[\varepsilon]^3}{n^3} \\ &+ \frac{n\,[\varepsilon]^4}{n^4} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hier sind von allen Gliedern die Mittelwerte zu bestimmen, und zuerst brauchen wir den Mittelwert von $[\varepsilon^3]\,[\varepsilon]$, welcher sich also giebt:

$$\begin{aligned} [\varepsilon^3]\,[\varepsilon] &= (\varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3 + \ldots)\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots) \\ &= \varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4 + \varepsilon_3^4 + \ldots + \varepsilon_1^3\,\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_1\,\varepsilon_2^3 + \ldots \end{aligned}$$

Die Mittelwerte der ungeraden Potenzen werden Null, und deshalb darf man schreiben $[\varepsilon^3][\varepsilon] = [\varepsilon^4]$, und damit wird (8):

$$[v^4] = [\varepsilon^4] - \frac{4\,[\varepsilon^4]}{n} + \frac{6\,[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2}{n^2} - \frac{3\,[\varepsilon]^4}{n^3} \qquad (9)$$

Die noch fehlenden Mittelwerte der beiden letzten Glieder haben wir schon früher in (10) und (11) § 118. S. 452 bestimmt, nämlich:

$$[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2 = (n^2 + 2n)\,m^4 \text{ und } [\varepsilon^4] = 3\,n^2\,m^4$$

und damit wird (9):

$$[v^4] = [\varepsilon^4] - \frac{4\,[\varepsilon^4]}{n} + \frac{6}{n^2}\,(n^2 + 2\,n)\,m^4 - \frac{9}{n}\,m^4 \qquad (10)$$

Um m^4 auf r^4 zu reduzieren, müssen wir nach (15) § 117. S. 447 annehmen $3\,m^4 = r^4$, was allerdings die Geltung des asymptotischen Fehlergesetzes von § 111. voraussetzt, welches wir gerade für die vorliegende Ausrechnung von r^4 *nicht* gelten lassen wollen; indessen als Näherung für eine Verbesserung zweiter Ordnung ist jenes $r^4 = 3\,m^4$ hier doch nicht zu entbehren, und damit giebt (10):

$$[v^4] = [\varepsilon^4] - \frac{4\,[\varepsilon^4]}{n} + 2\,r^4\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{3\,r^4}{n}$$

der strenge Wert von r^4 ist $= \dfrac{[\varepsilon^4]}{n}$ und damit giebt vorstehende Gleichung nach r^4 aufgelöst:

$$r^4 = [v^4]\,\frac{n}{(n-1)^2} \quad \text{oder} \quad r^4 = \frac{[v^4]}{n-1}\,\frac{n}{n-1} \qquad (11)$$

Dieses ist eine Formel von demselben Charakter wie die früheren (10) §. 7. S. 21 und (9) § 115. S. 444.

Zu einer Anwendung wollen wir die 18 Bessel schen Winkelmessungen nehmen, welche wir schon früher in § 7. S. 23 benützt haben. Wenn man dort ausser den v^2 auch die v^4 ausrechnet, so bekommt man:

$$n = 18 \qquad [v^2] = 46{,}97 \qquad\qquad [v^4] = 549{,}93$$

$$m^2 = \frac{46{,}97}{17} = 2{,}763 \qquad r^4 = \frac{549{,}93}{17}\,\frac{18}{17} = 34{,}25$$

$$m = 1{,}662\ ,\ m^4 = 7{,}634 \qquad 3\,m^4 = 22{,}90 \qquad (12)$$

Hier wird $3\,m^4 - r^4 = -11{,}35$, d. h. *negativ*, und das Verhältnis $m : M$ in (25) § 146. S. 568 würde *imaginär*.

Dieses führt auf eine neue Anwendung unserer Theorie. Wenn nämlich $3\,m^4 - r^4$ negativ, also nach unseren Formeln M unmöglich wird, so deutet das darauf hin, dass in der Reihe der v ein *grober Fehler* enthalten ist, und in der That zeigt der Anblick der Tabelle von S. 23, dass die 6te Beobachtung 0,25″ mit $v = +4{,}62$ und $v^2 = 21{,}34$ von allen anderen absticht, und noch viel mehr ist das zugehörige $v_6^4 = 455{,}40$ abnorm, nämlich fast 10mal so gross als das nächst kleinere $v_2^4 = 47{,}89$. Jenes v_6^4 beherrscht die ganze Reihe der v^4, alle anderen v^4 geben zusammen nur etwa $\frac{1}{4}$ jenes einzelnen v_6^4 und kommen dagegen fast gar nicht in Betracht.

Wir wollen deshalb einen Versuch machen mit Ausscheidung der 6ten Beobachtung und erhalten dann statt S. 23 das Folgende:

Num.	l	v		v^2	v^4
1	6,25″		−1,11″	1,232	1,518
2	7,50		−2,36	5,570	31,025
3	6,00		−0,86	0,740	0,548
4	4,77	+0,37		0,137	0,019
5	3,75	+1,39		1,932	3,733
6	3,70	+1,44		2,074	4,302
7	6,14		−1,00	1,000	1,000
8	4,04	+1,10		1,210	1,464
9	6,96		−1,82	3,312	10,969
10	3,16	+1,98		3,920	15,366
11	4,57	+0,57		0,325	0,106
12	4,75	+0,39		0,152	0,023
13	6,50		−1,36	1,850	3,422
14	5,00	+0,14		0,020	0,000
15	4,75	+0,39		0,152	0,023
16	4,25	+0,89		0,792	0,627
17	5,25		−0,11	0,012	0,000
	87,34	+8,66	−8,62	24,430	74,145
$x = 5{,}14$		+0,04			

$$m^2 = \frac{24{,}430}{16} = 1{,}527$$

$$m = 1{,}236 \qquad m^4 = 2{,}331 \qquad 3\,m^4 = 6{,}993$$

$$\nu^4 = \frac{74{,}145}{16}\,\frac{17}{16} = 4{,}924$$

$$3\,m^4 - \nu^4 = 2{,}069$$

$$\frac{3\,m^4 - \nu^4}{2\,\nu^4} = 0{,}2101$$

Nach der Formel (25) § 146. S. 568 haben wir also:

$$\frac{m^2}{M^2} = 0{,}2101 \qquad \frac{m}{M} = 0{,}458 \qquad \frac{M}{m} = 2{,}182 \tag{13}$$

Da $m = 1{,}236$ bekannt ist, hat man auch $M = 2{,}182\, m = 2{,}70$, d. h. der theoretische Maximalfehler ist 2,70″, was mit dem grössten v, nämlich $v_2 = -2{,}36''$ immerhin genügend stimmt.

Da wir unsere Theorie in diesem Falle dazu benützt haben, eine Beobachtung auszuscheiden, wollen wir auch noch zusehen, was das für einen Einfluss ausgeübt hat auf das Dreieck Fig. 3. § 130. S. 500. in welchem der fragliche Winkel Trenk von S. 23 vorkommt. Durch die Ausscheidung der 6ten Beobachtung von S. 23 ist das Mittel von 83° 30′ 34,87″ auf 83° 30′ 35,14″ gewachsen, also um 0,27″ grösser geworden, und das Dreieck (Fig. 3. S. 500) wird dadurch in seinem Schlussfehler um ebensoviel 0,27″ schlechter. Dieses ist als Zufall zu betrachten. —

Wir wollen hiezu auch noch das Ergebnis einer weitläufigen Rechnung mit Differenzen vorführen, welche wir früher 1869 als Studien-Arbeit gemacht haben, wie am Schluss von § 11. S. 39—40 angegeben ist.

Wenn nämlich n gleichartige Beobachtungen vorliegen, so kann man daraus $n\frac{n-1}{2}$ Differenzen d bilden, welche den Charakter von wahren Fehlern haben. Diese Differenzen haben wir für die auf S. 23 stehenden 18 Bessel schen Winkelmessungen in der Zahl von 153 wirklich ausgerechnet, und dieselben quadriert und biquadriert, woraus sich folgendes ergab:

$$[d^2] = 845{,}83 \qquad [d^4] = 16506$$

$$m'^2 = \frac{845{,}83}{153} = 5{,}528 \qquad \nu'^4 = \frac{16506}{153} = 107{,}88$$

$$m' = 2{,}351 \qquad 3\,m'^4 = 91{,}68$$

$$m'^4 = 30{,}56 \qquad 3\,m'^4 - \nu'^4 = -\;16{,}20 \tag{14}$$

Die Differenz $3\,m'^4 - \nu'^4$ wird hier abermals negativ, d. h. wir haben ein zweites sehr deutliches Anzeichen für das Vorhandensein eines groben Fehlers. (Der hier entstehende Wert $m' = 2{,}351$ giebt $m = m' : \sqrt{2} = 1{,}663$, was mit $m = 1{,}66$ auf S. 23 oder mit $m = 1{,}662$ in (12) S. 571 stimmen muss.)

Indem wir hier die Theorie der Ausscheidung verdächtiger Beobachtungen mitbehandelt haben, wollen wir das Ergebnis zusammenfassen:

Wenn in einer Fehlerreihe stark abweichende Elemente mit dem Verdacht grober Fehler vorkommen, so rechne man aus allen zusammen die Mittelwerte m^2 und ν^4 und dann $3\,m^4 - \nu^4$. Wird diese Differenz *negativ*, so hat man ein mathematisches Anzeichen für das Vorhandensein grober Fehler.

Zu einem zweiten Zahlenbeispiele wollen wir noch die Benzenberg schen Fall-Versuche nehmen, welche in der bekannten Abhandlung von Encke „über die Methode der kleinsten Quadrate" in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1834, S. 285 bis 287 mitgeteilt und als Zahlenbeispiel benützt sind. Es sind 29 Versuche, deren Abweichungen v vom arithmetischen Mittel, nach ihrer absoluten Grösse geordnet folgende Werte (in Pariser Linien) haben:

$$\left.\begin{array}{cccccccccc}
-0{,}414 & -0{,}914 & -1{,}914 & -1{,}914 & +2{,}086 & -2{,}414 & -2{,}914 & +3{,}086 & +3{,}086 & -3{,}414 \\
-3{,}914 & -4{,}914 & -4{,}914 & -5{,}914 & -5{,}914 & -6{,}414 & -6{,}914 & -6{,}914 & +7{,}086 & +7{,}086 \\
-7{,}914 & +8{,}086 & -8{,}414 & +9{,}086 & +9{,}086 & +13{,}086 & +14{,}086 & -14{,}914 & +15{,}086 &
\end{array}\right\} \quad (15)$$

Diese 29 Werte v geben:

$$[v^2] = 1612 \qquad\qquad [v^4] = 212526$$

$$m^2 = \frac{1612}{28} = 57{,}57 \qquad\qquad \nu^4 = \frac{212526}{28}\,\frac{29}{28}$$

$$m = 7{,}588 \qquad\qquad \nu^4 = 7861 \qquad (16)$$

$$m^4 = 3314{,}5$$

$$3\,m^4 = 9943{,}5 \qquad\qquad 3\,m^4 - \nu^4 = 2083$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{3\,m^4 - \nu^4}{2\,\nu^4} = 0{,}1325 \quad , \quad \frac{M^2}{m^2} = 7{,}548$$

$$\frac{m}{M} = 0{,}364 \quad , \quad \frac{M}{m} = 2{,}747 \qquad\qquad M = 2{,}747\,m = 20{,}84 \qquad (17)$$

Der theoretische Maximalfehler ist rund $= 21$, während das grösste v nur 15 beträgt, was immerhin noch genügend stimmt, da Benzenbergs Fallversuchs-Angaben vom Jahre 1804 wohl kaum reine Originalmessungen sind.

Auch für diese 29 Benzenberg schen Fallversuche können wir noch die Rechnung mit den $\frac{29\,.\,28}{2} = 406$ Differenzen d vorführen, es ist nämlich:

$$[d^2] = 46749 \qquad\qquad [d^4] = 13934400$$

$$m'^2 = \frac{46749}{406} = 115{,}14 \qquad\qquad \nu'^4 = \frac{13934400}{406} = 34321$$

$$m' = 10{,}730$$

$$m'^4 = 13257 \qquad\qquad 3\,m'^4 = 39771$$

$$3\,m'^4 - \nu'^4 = 5450$$

$$\frac{m'^2}{M'^2} = \frac{1}{2}\,\frac{5450}{34321} = 0{,}0794 \quad , \quad \frac{M'}{m'} = 3{,}55 \qquad (18)$$

$$M' = 3{,}55\,m' = 38$$

Der wirkliche grösste Wert aller Differenzen d ist die Differenz der beiden letzten oben bei (15) aufgeführten scheinbaren v, nämlich $+ 15{,}086 - (- 14{,}914) = 30$, was mit dem theoretischen $M = 38$ wieder hinreichend stimmt. Der Wert $m' = 10{,}730$ giebt mit $\sqrt{2}$ dividiert wieder den Wert $m = 7{,}588''$ von (16), wie es als Rechenprobe sein muss.

Wenn eine grosse Zahl von Messungen der Praxis (Hunderte und Tausende) nach der vorstehenden Theorie der m^2 und v^4 behandelt würden, so könnte man daraus auch Mittelwerte $M:m$ für gewisse Beobachtungsklassen (Höhere Geodäsie, einfaches Feldmessen, Aichwesen u. s. w.) bilden, und bei Festsetzung amtlicher Fehlergrenzen benützen.

Unsere wenigen Versuche dieser Art deuten darauf hin, dass das Verhältnis $M:m$ sogar für gute Messungen kaum den Wert 3 erreicht (Berührung 2ter Ordnung S. 462) und meist zwischen 2 und 3 sich bewegen wird, (Berührung 1ter Ordnung S. 461), wie wir schon in der „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 40 angenommen hatten aus Veranlassung einer ersten geometrischen Betrachtung, deren Weiterentwicklung die im Vorstehenden vorgetragene Theorie des Verhältnisses $3\,m^4 : v^4$ ist.