



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

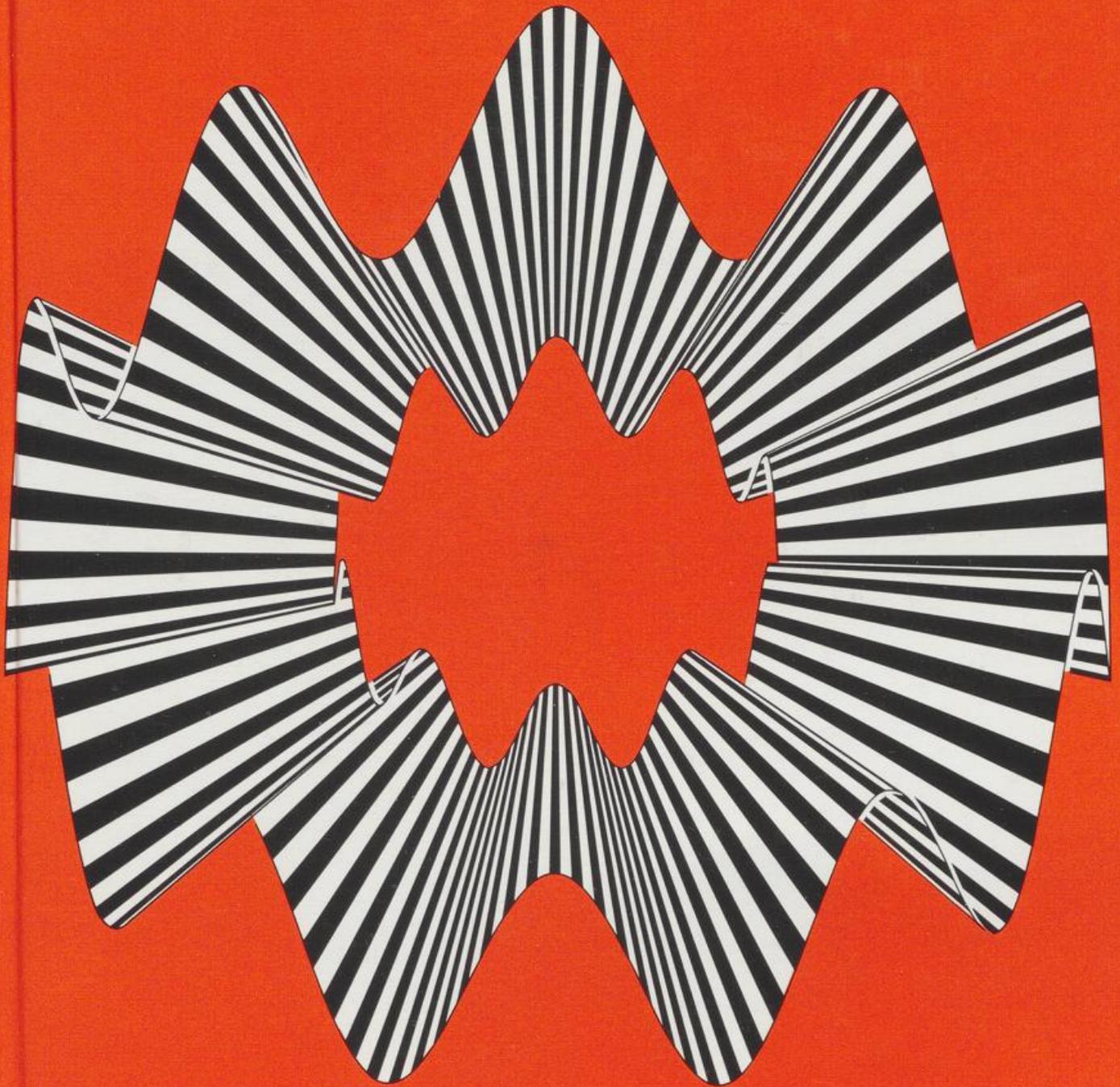
Barth, Friedrich

München, 1997

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83463](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83463)

Barth · Krumbacher · Ossiander · Barth

Anschauliche Geometrie 10

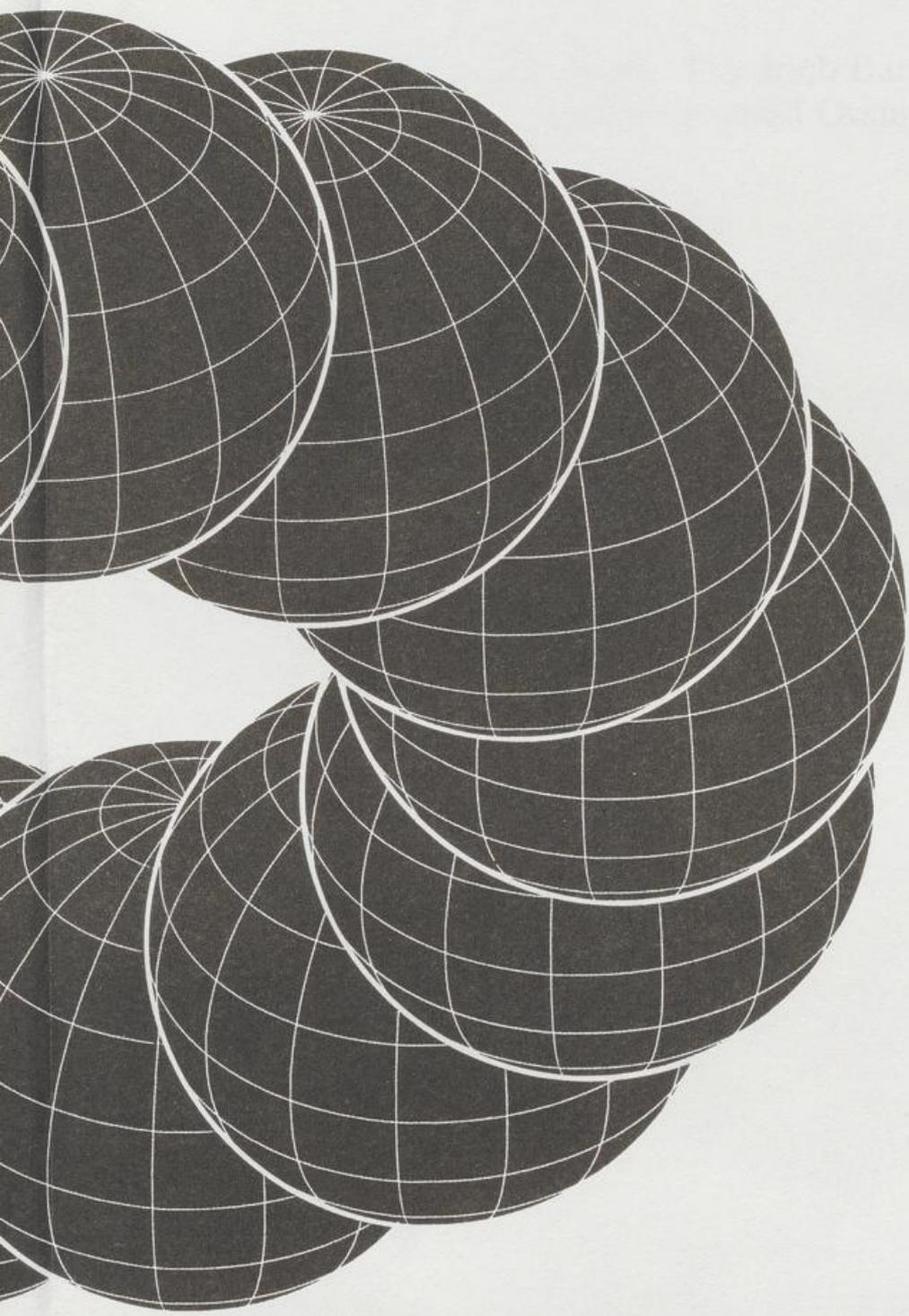


Oldenbourg

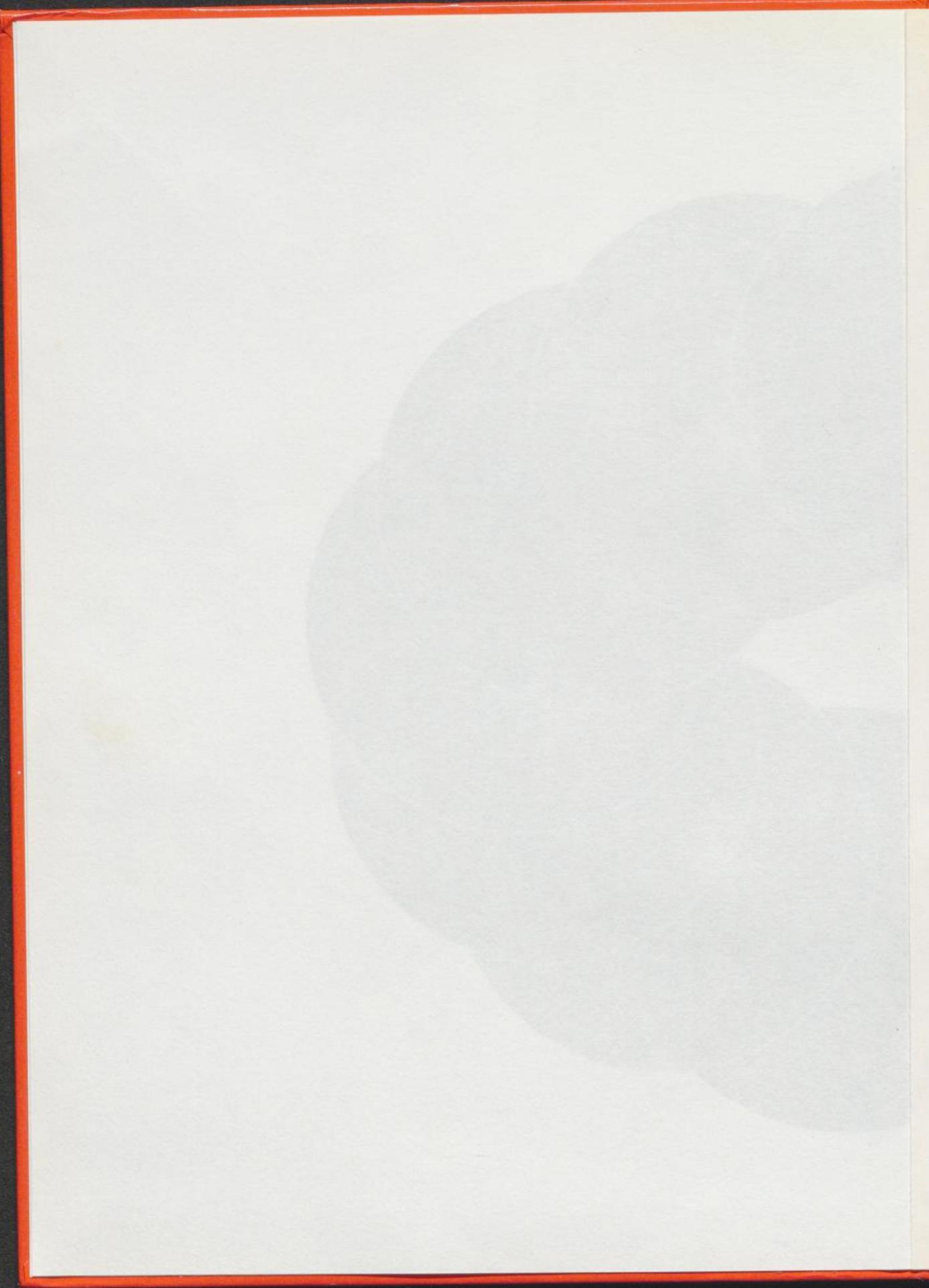


Geometrie 10

von
Prof. Dr. habil.
Hans Gassner



Lehrbuch



Anschauliche Geometrie 10

Elisabeth Barth · Friedrich Barth
Gert Krumbacher · Konrad Ossiander

06
09
12

37

42
47

55
74

84
98

104
106

106
114

Oldenbourg

121

Anschauen allein genügt nicht in der Mathematik – man muss auch etwas tun.
Dafür sind die Aufgaben da:
Rote Zahlen bezeichnen Aufgaben, die auf alle Fälle bearbeitet werden sollen.
Die Punkte (● bzw. ●) bezeichnen Aufgaben, die etwas mehr Ausdauer erfordern,
weil sie entweder schwieriger oder zeitraubender oder beides sind.
Je mehr Punkte, desto schwieriger.
Eine Wortkunde: Griechisch und Latein findet man am Schluss des Buches.
Gesternte Kapitel gehören nicht zum Pflichtstoff, sie dienen der Bereicherung.

Bildnachweis:

Bavaria-Verlag, Gauting 96; Bayerisches Landesvermessungsamt, München 136, 164;
Deutsches Museum 59, 72; Gert Krumbacher, München 51; Mauritius, Mittenwald 20,
68, 183; Süddeutscher Verlag Bilderdienst, München 39.

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff
hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

© 1997 R. Oldenbourg Verlag GmbH, München
www.oldenbourg-bsv.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen
Fällen bedarf deshalb der vorherigen schriftlichen Einwilli-
gung des Verlages.

2., korrigierte Auflage 1997 R
Unveränderter Nachdruck 06 05 04 03 02
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert
und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Zeichnungen: Gert Krumbacher
Satz, Druck, Bindung: Offizin Andersen Nexö, Leipzig

ISBN 3-486-03268-2

Inhalt

1. Kapitel		5.3 Kosinus	106
Regelmäßige Vielecke		5.4 Das trigonometrische Sextett	109
1.1 Grundlagen	6	Aufgaben	112
*1.2 Konstruktionen	8		
*1.3 Berechnungen	11		
Aufgaben	14		
2. Kapitel		6. Kapitel	
Kreismessung		Trigonometrie für beliebige Winkel	
2.1 Umfang	21	6.1 Trigonometrie am Einheits-	
2.2 Bogen und Bogenmaß	28	kreis	137
2.3 Fläche	29	6.2 Berechnungen am allgemeinen	
2.4 π -Berechnung –		Dreieck – Sinussatz –	
Treppenverfahren –		Sehnenformel – Kosinussatz –	
Gitterpunktverfahren –		Projektionssatz	142
Zufallsregen	32	Aufgaben	147
Aufgaben	36		
3. Kapitel		7. Kapitel	
Zylinder und Kegel		Summenformeln	
3.1 Der Zylinder	52	Additionstheoreme für sin, cos und	
3.2 Der Kegel	56	tan – Doppelwinkelformeln –	
Aufgaben	59	* Halbwinkelformeln –	
		* Produkt-Summen-Formeln	
		* Summen-Produkt-Formeln –	
		* Goniometrische Gleichungen	165
		Aufgaben	174
4. Kapitel		8. Kapitel	
Kugel		Die Graphen der trigonometrischen	
4.1 Volumen – Scheibenmethode –		Funktionen	
Körpervergleich nach Segner –		Sinuskurve – Kosinuskurve –	
Zufallspunkte – Methode von		Tangenskurve – Abwandlungen der	
Archimedes	69	Sinuskurve	184
4.2 Oberfläche – Pyramiden-		Aufgaben	198
methode – Seifen-			
blasenmethode	77		
*4.3 Kugelteile – Kugelzweieck –		9. Kapitel	
Kugelkeil – Kugeldreieck –		Kegelschnitte	
Kugeldreikant – Kalotte und		Vorbemerkung	204
Kugelsegment – Kugelzone und		I. Die Ellipse	206
Kugelschicht	79	1. Die Ellipse als Zylinderschnitt	
Aufgaben	87	Kreisstauchung – Hauptkreis-	
		Konstruktion – Papierstreifen-	
		Konstruktion	206
		Aufgaben	214
5. Kapitel		2. Die Mittelpunkt-Gleichung	
Trigonometrie am rechtwinkligen		einer Ellipse	
Dreieck		Fläche und Umfang – Ellipsen-	
5.1 Tangens	97	zirkel – * Scheitel-Krümmungs-	
5.2 Sinus	104	kreise	221

Aufgaben	221	3. Die Parabel	
3. Die Brennpunkte der Ellipse		Brennpunkte und Leitgerade –	
Dandelin-Kugeln –		Scheitel-Gleichung –	
Astronomie – Gärtner-		Tangenten	247
Konstruktion – Brennpunkt		Aufgaben	252
und Tangente	223	*4. Die Leitgerade	254
Aufgaben	230	5. Anwendungen	
		Bahnkurven – Reflexionen –	
II. Kegelschnitte	233	Kegel-Schnitte – Navigation	257
1. Überblick		6. Geschichtliches	261
Ellipse als Kegel-Schnitt	233	Aufgaben aus der Besonderen	
2. Die Hyperbel		Prüfung	263
Dandelin-Kugeln – Brenn-		Wortkunde: Griechisch	266
punkte – Mittelpunkt-		Wortkunde: Latein	268
Gleichung – Asymptoten –		Griechisches und deutsches Alphabet	271
*Scheitel-Krümmungskreise	236	Register	272
Aufgaben	243		

HENRI POINCARÉ

Der Mathematiker studiert die reine Mathematik nicht, weil sie nützlich ist; er studiert sie, weil er sich an ihr erfreut, und er erfreut sich an ihr, weil sie schön ist.

PLATON

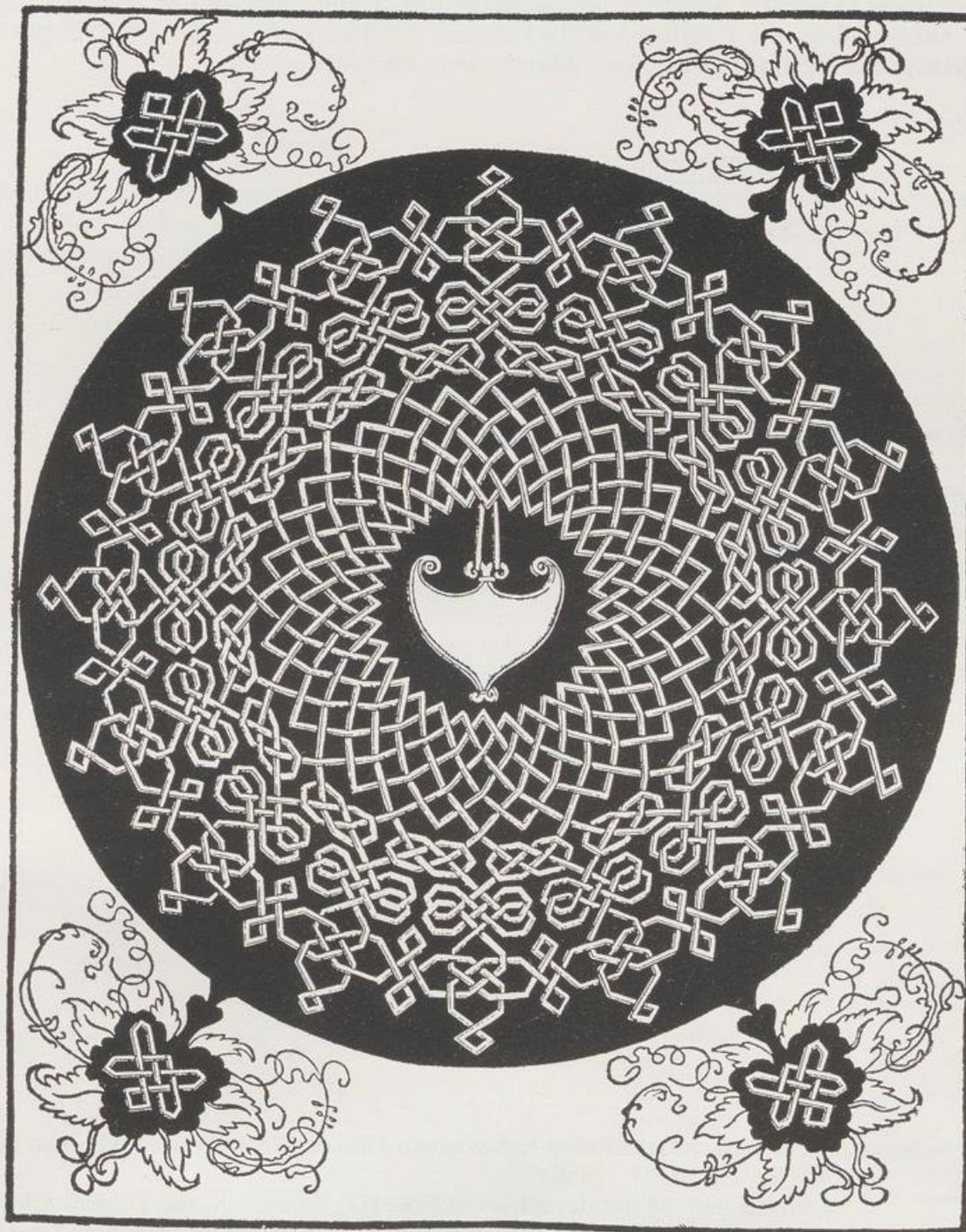
Die Bedeutung der Geometrie beruht nicht auf ihrem praktischen Nutzen, sondern darauf, daß sie ewige und unwandelbare Gegenstände untersucht und danach strebt, die Seele zur Wahrheit zu erheben.

FRIEDRICH DER GROSSE

Mathematik ist ein geistreicher Luxus.

1. Kapitel

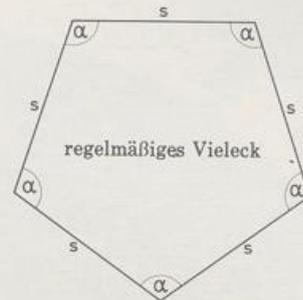
Regelmäßige Vielecke



DÜRER: Knoten mit herzförmigem Schild. Holzschnitt 1507

1.1 Grundlagen

Wegen ihres ästhetischen Reizes haben die einfach konstruierbaren regelmäßigen Vielecke schon immer als Zierfiguren in Ornamenten gedient. Die ältesten Darstellungen verwendeten vor allem Quadrate, Achtecke, Sechzehnecke usw. Dann tauchten das Sechseck und seine Abkömmlinge wie Zwölfeck und 24-Eck usw. auf, bis es schließlich den Pythagoräern gelang, das regelmäßige Fünfeck, Zehneck usw. zu konstruieren.



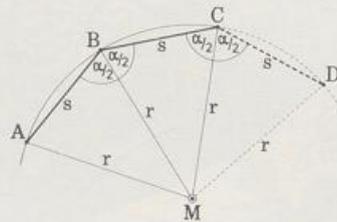
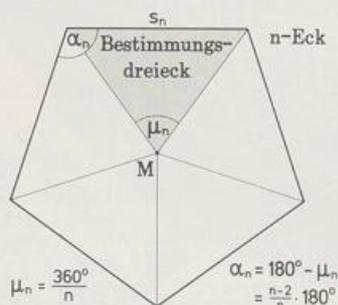
Mathematisch beschreiben wir ein regelmäßiges n-Eck mit der

Definition

Ein n-Eck heißt **regelmäßig**, wenn alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.

Ab $n = 4$ genügt eine Bedingung allein nicht: Eine Raute muss nicht lauter gleich große Winkel haben, und ein Rechteck muss nicht lauter gleich lange Seiten haben.

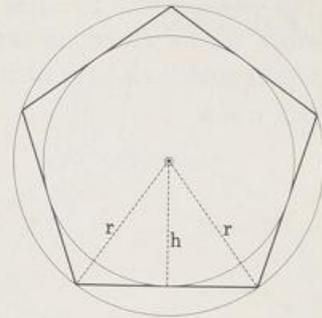
Jedes regelmäßige n-Eck besteht aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck nennen wir **Bestimmungsdreieck**.



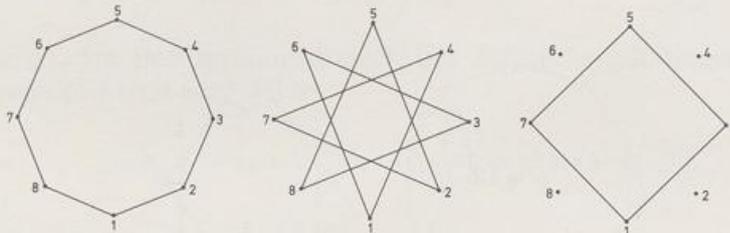
Begründung: Je drei benachbarte Ecken haben einen Umkreis (Mittelpunkt M), also gilt $\triangle AMB \cong \triangle BMC$ (SSS)
 Verbindet man M mit der nächsten Ecke (D), so entsteht das Dreieck CMD , es ist wegen SWS kongruent zu den andern beiden Dreiecken. Diese Überlegung lässt sich auf die andern Ecken fortsetzen.

Damit ist auch gezeigt, dass jedes regelmäßige Vieleck einen Umkreis und einen Inkreis hat (Inkreisradius = Höhe auf der Basis des Bestimmungsdreiecks). Wegen der kongruenten Bestimmungsdreiecke gilt

$$\mu_n = \frac{360^\circ}{n}, \quad \alpha_n = 180^\circ - \mu_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

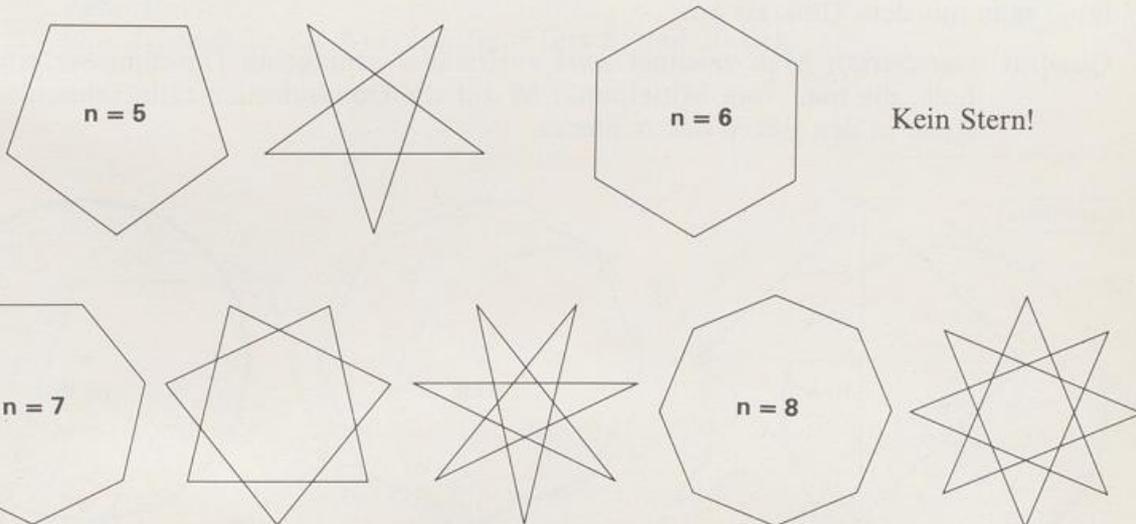


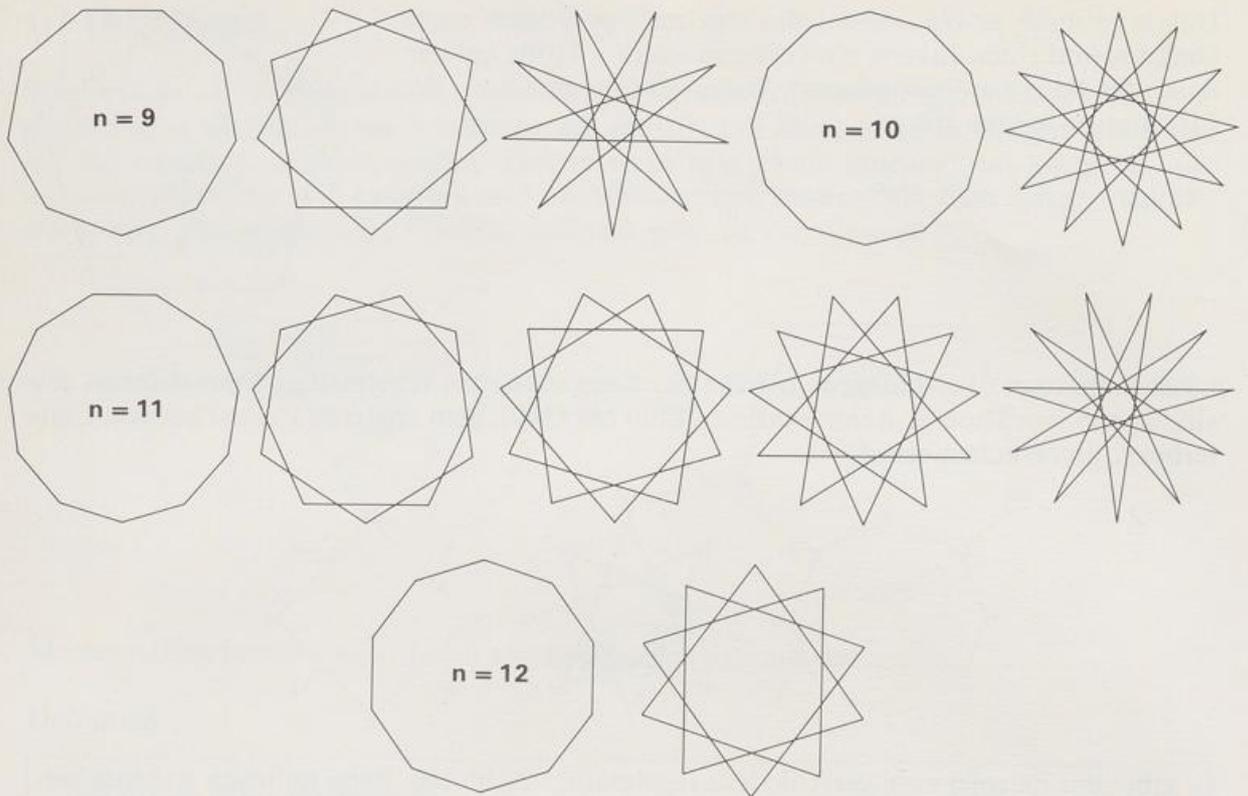
Lässt man auch überschlagene n-Ecke zu, dann entstehen regelmäßige **Sternvielecke**. Sie sind schon von Thomas BRADWARDINE (1290 bis 1349), dem späteren Erzbischof von Canterbury, untersucht worden.



Es gibt zum Beispiel zwei verschiedene regelmäßige Achtecke. Beim üblichen Achteck verbindet man jede Ecke mit der nächsten, beim Sternachteck mit der überübernächsten Ecke. Verbindet man dagegen jede Ecke mit der übernächsten Ecke, so ergibt sich ein Quadrat.

Allgemein gilt: Ein n-Eck ergibt sich genau dann, wenn man jede Ecke mit der k-ten darauf folgenden Ecke verbindet und n und k teilerfremd sind. Die Verbindung der Ecken n und k liefert dasselbe n-Eck wie die Verbindung der Ecken n und n - k.



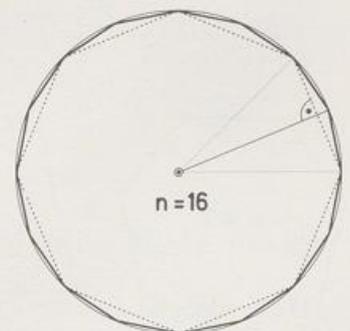
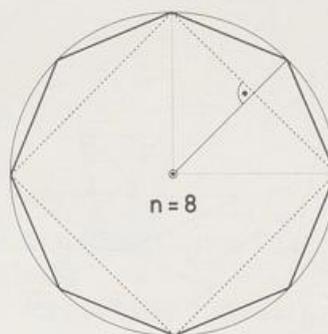
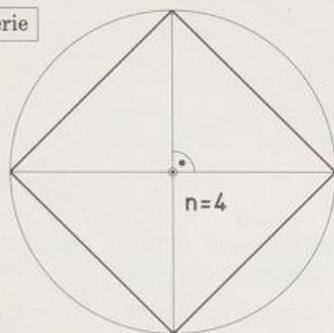


* 1.2 Konstruktionen

Ein regelmäßiges Vieleck ist genau dann konstruierbar, wenn der Mittelpunktswinkel μ_n konstruierbar ist. Kann man ein n -Eck konstruieren, dann klappt es auch bei einem mit der doppelten Eckenzahl (Winkel lassen sich ja verdoppeln und halbieren). Am besten fängt man mit dem Umkreis an.

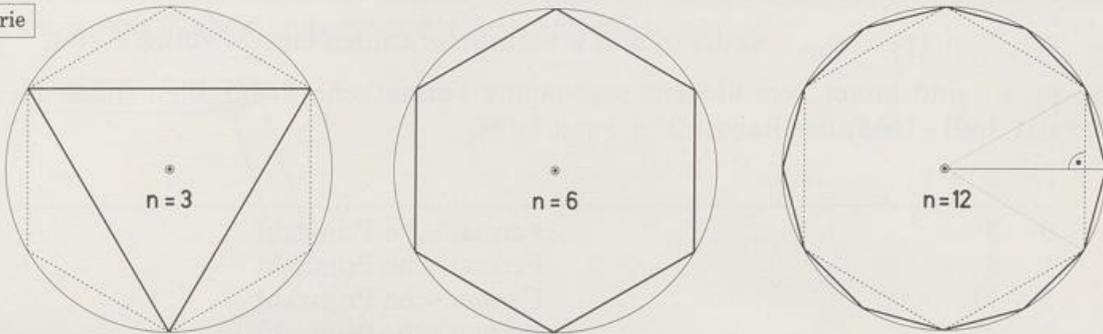
Quadrat (4er Serie): Man zeichnet zwei zueinander senkrechte Durchmesser ein. Die Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseiten fällt, schneiden den Kreis in den Ecken des Achtecks.

4er-Serie



Sechseck (3er Serie): Die Konstruktion ist noch einfacher. Eine Seite ist so lang wie der Radius, weil das Bestimmungsdreieck gleichseitig ist. Das Sechseck ist die Ausgangsfigur fürs Dreieck (übernächste Ecken verbinden) und fürs Zwölfeck (Lote fällen).

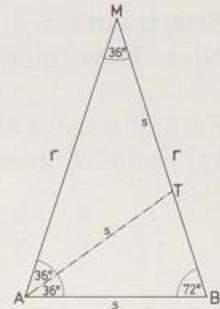
3er-Serie



Zehneck (5er Serie): Im Bestimmungsdreieck des Zehnecks gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MAB und ABT

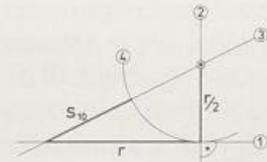
$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}, \text{ also } r^2 - rs = s^2, \quad r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = s^2 + rs + \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$\text{also } r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(s + \frac{r}{2}\right)^2$$

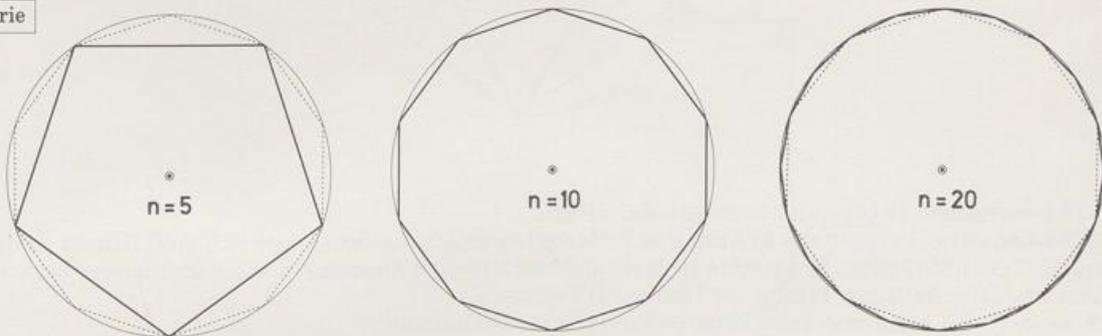


Nach Pythagoras lassen sich r , $\frac{r}{2}$ und $s + \frac{r}{2}$ deuten als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Ist der Umkreisradius r bekannt, so findet man die Seite s des Zehnecks so:

Das Zehneck ist die Ausgangsfigur fürs 5- und 20-Eck.



5er-Serie



Lange Zeit hat man geglaubt, dass nur Vieleckserien mit $n = 4 \cdot 2^k$, $n = 3 \cdot 2^k$ und $n = 5 \cdot 2^k$ konstruierbar seien, bis schließlich der deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUSS (Braunschweig 30.4.1777 bis 23.2.1855 Göttingen) im Jahr 1801 in seinen »Disquisitiones arithmeticae« bewies, dass auch noch andere regelmäßige n-Ecke konstruierbar sind. Für die Eckenzahl n muss gelten

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_m, \quad \text{wobei } m \text{ und } k \text{ natürliche Zahlen einschließlich } 0 \text{ sind}$$

p_1, p_2, \dots sind lauter verschiedene sogenannte Fermat'sche Primzahlen (nach Pierre de FERMAT 1601–1665) der Bauart $2^{2^i} + 1$ mit $i \in \mathbb{N}_0$

i	$2^{2^i} + 1$	
0	3	Fermat'sche Primzahl
1	5	Fermat'sche Primzahl
2	17	Fermat'sche Primzahl
3	257	Fermat'sche Primzahl
4	65 537	Fermat'sche Primzahl
5	4 294 967 297 = 641 · 6 700 417	keine Primzahl

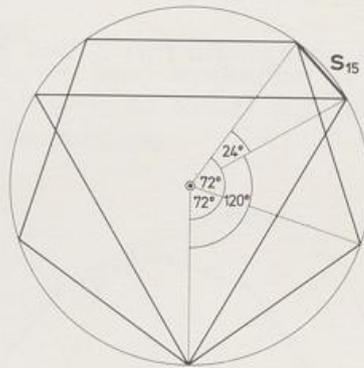
Konstruierbar sind demnach die n-Ecke mit $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$
Nicht konstruierbar sind die n-Ecke mit $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \dots$

Enthält n mehr als eine Fermat'sche Primzahl, dann kombiniert man die Mittelpunktswinkel geeignet, zum Beispiel mit $n = 15$

$$\frac{1}{15} = \frac{a}{5} + \frac{b}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{15} = \frac{3a + 5b}{15} \Leftrightarrow 1 = 3a + 5b$$

wir wählen $a = 2$ und $b = -1$

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{3} \parallel \cdot 360^\circ, \quad \text{also} \quad 24^\circ = 2 \cdot 72^\circ - 120^\circ$$



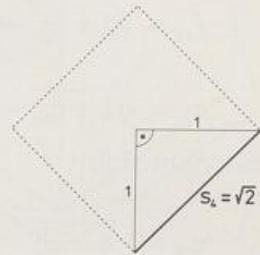
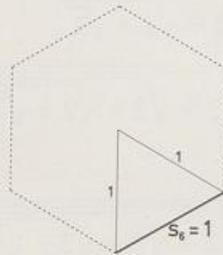
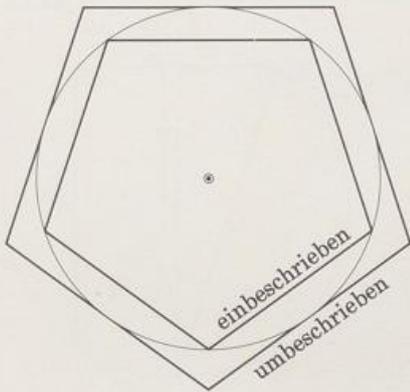
1825 konstruierten PAUKER und ERDINGER das 17-Eck.

1832 konstruierte RICHELLOT das 257-Eck und Ende des letzten Jahrhunderts wagte sich Prof. HERMES an die Konstruktion des 65 537-Ecks. Er brauchte 10 Jahre und beschrieb 250 Riesenseiten, diese schlummern heute in einer Kiste im Mathematischen Institut der Universität Göttingen.

Bis heute (1995) kennt man keine weiteren Fermat'schen Primzahlen.

* 1.3 Berechnungen

Mit dem Satz von PYTHAGORAS können wir die Seiten der konstruierbaren regelmäßigen n-Ecke auch berechnen. Weil je zwei regelmäßige n-Ecke mit gleicher Eckenzahl ähnlich sind, brauchen wir die folgenden Rechnungen bloß am Einheitskreis durchzuführen. Das n-Eck kann dem Einheitskreis ein- oder umbeschrieben sein.



Einbeschriebene n-Ecke

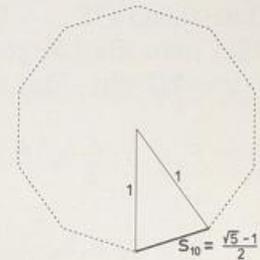
Die Seiten der drei Ausgangsfiguren sind schnell gefunden

Sechseck $s_6 = 1$

Viereck $s_4 = \sqrt{2}$

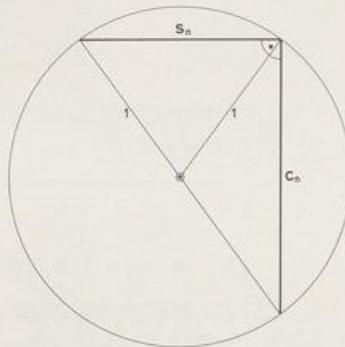
Zehneck nach Seite 8 gilt $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(s_{10} + \frac{1}{2}\right)^2$

also $s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$



Hat man ein n-Eck, dann ist das 2n-Eck leicht konstruierbar. Entsprechend einfach lässt sich die Seite eines 2n-Ecks aus der eines n-Ecks berechnen. Dazu verwenden wir das Verfahren von Ludolph von CEULEN (Hildesheim 18. 1. 1540 bis 31. 12. 1610 Leiden). Seine Idee war es, das der Seite s_n zugehörige Komplement c_n einzuführen. c_n ist die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit s_n als einer Kathete und der Hypotenuse 2. Es gilt

$$s_n^2 + c_n^2 = 4, \quad \text{also} \quad s_n = \sqrt{4 - c_n^2}.$$



Nach dem Kathetensatz ist $c_{2n}^2 = 2 \left(1 + \frac{c_n}{2} \right)$, es gilt somit die Verdopplungsformel

$$c_{2n} = \sqrt{2 + c_n}$$

Als Beispiel berechnen wir die Seite des regelmäßigen 96-Ecks. Wegen $96 = 2^4 \cdot 6$ ist die Ausgangsfigur das Sechseck, wir starten also mit $s_6 = 1$

$$c_6 = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}, \quad \text{wir wenden die Verdopplungsformel viermal an}$$

$$c_{12} = \sqrt{2 + c_6} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$c_{24} = \sqrt{2 + c_{12}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$c_{48} = \sqrt{2 + c_{24}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$c_{96} = \sqrt{2 + c_{48}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

es ergibt sich

$$c_{96} = \sqrt{4 - c_{96}^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 0,065\,438\,165\,622\dots$$

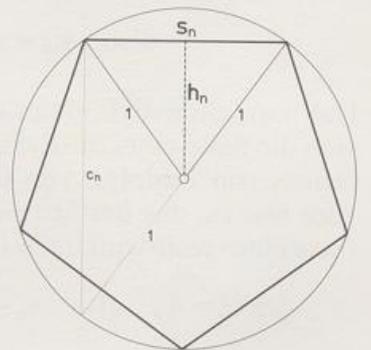
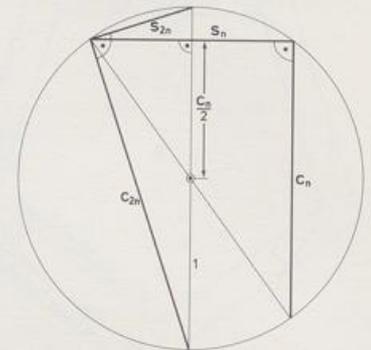
Hat ein Kreis den Radius r , dann muss man noch mit r multiplizieren. In einem Kreis von 3 m Radius ist die Seite eines einbeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks $3 \text{ m} \cdot 0,065\,438\dots \approx 196,3 \text{ mm}$ lang.

Hat man die Länge s_n einer Vieleckseite, dann findet man auch schnell den Inhalt F_n der Vieleckfläche. Das n -Eck besteht aus n Bestimmungsdreiecken, also ist

$$F_n = n \cdot \frac{1}{2} s_n \cdot h_n \quad \text{Umfang } u_n = n \cdot s_n$$

$$F_n = \frac{1}{2} u_n h_n \quad h_n = \frac{1}{2} c_n = \frac{1}{2} \sqrt{4 - s_n^2}$$

$$\text{zum Beispiel } F_{96} = \frac{1}{2} u_{96} h_{96} = \frac{1}{2} \cdot 96 s_{96} \cdot \frac{1}{2} c_{96} = 24 s_{96} \cdot c_{96}$$



$$= 24 \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}_b} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}_b}$$

$$\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

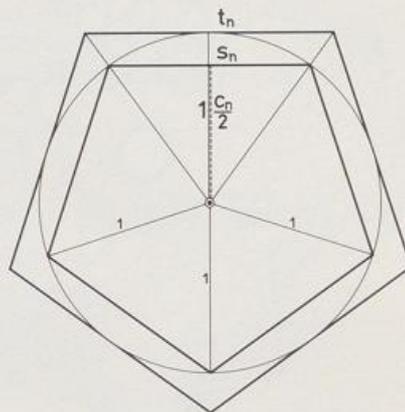
$$F_{96} = 24 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 3,139\,350\,20\dots$$

Hat ein Kreis den Radius r , dann muss man noch mit r^2 multiplizieren. In einem Kreis von 3 m Radius ist die Fläche des eingeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks $9 \text{ m}^2 \cdot 3,139 350 \dots \approx 28,25 \text{ m}^2$ groß.

Umbeschriebene n-Ecke

Wegen der Ähnlichkeitssätze gilt für die Seite t_n des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks

$$t_n : s_n = 1 : \frac{c_n}{2}, \quad \text{also} \quad t_n = 2 \frac{s_n}{c_n}$$



zum Beispiel
$$t_{96} = 2 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} \approx 0,065 473 \dots$$

Bei einem Kreis von 3 m Radius ist die Seite des regelmäßigen umbeschriebenen 96-Ecks $3 \text{ m} \cdot 0,065 473 \dots \approx 196,4 \text{ mm}$ lang.

Für die Fläche G_n des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks gilt

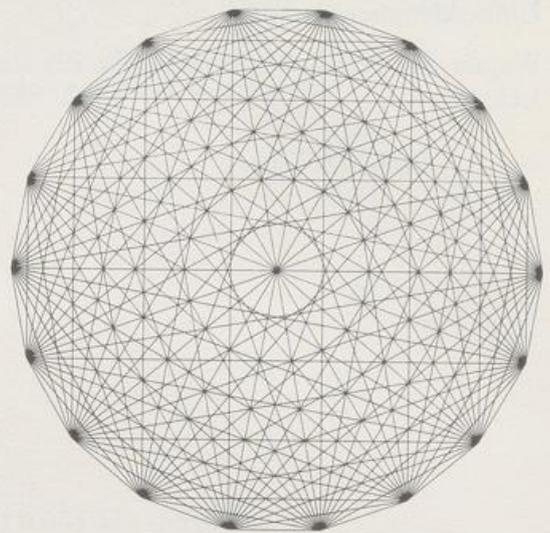
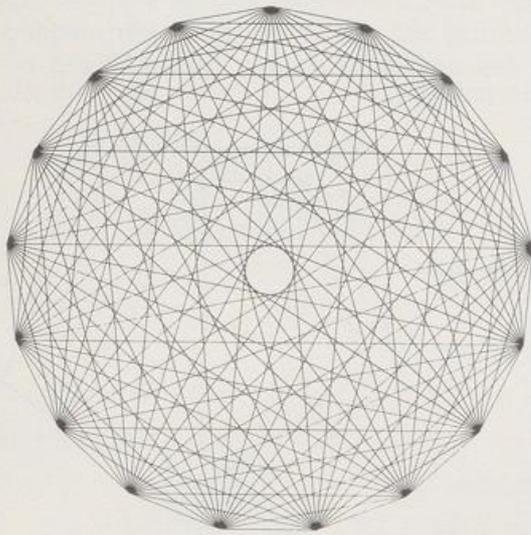
$$G_n = n \cdot \frac{1}{2} t_n \cdot 1 \quad \text{Umfang} \quad v_n = n \cdot t_n$$

$$G_n = \frac{1}{2} v_n$$

zum Beispiel $G_{96} = 3,142 714 \dots$. Bei einem Kreis von 3 m Radius ist die Fläche des umbeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks $9 \text{ m}^2 \cdot 3,142 714 \dots \approx 28,28 \text{ m}^2$ groß.

Aufgaben zu 1.1

Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n -Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n -Eck) gemeint.



1. Welche Vielecke haben keine parallelen Seiten?
2. Bei welchen Vielecken schneiden sich Diagonalen im Mittelpunkt des Vielecks? Wie viele Diagonalen schneiden sich dann?
3. a) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Zwölfeck?
b) Welches n -Eck hat die Winkelsumme 17640° ?
Wie groß ist ein Innenwinkel?
4. Wie groß ist jeweils ein Innenwinkel im n -Eck?
a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 5$ d) $n = 15$ e) $n = 17$
f) $n = 51$ g) $n = 85$ h) $n = 255$ i) $n = 257$
5. Zeichne ein Fünfeck, das nicht regelmäßig ist:
a) mit lauter gleich langen Seiten
b) mit lauter gleich großen Winkeln.
6. Wie groß ist im n -Eck
a) ein Innenwinkel
b) die Innenwinkelsumme
c) die Außenwinkelsumme
d) ein Basiswinkel im Bestimmungsdreieck
e) der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks (Zentriwinkel)?
- 7. a) Wie viele Diagonalen hat ein n -Eck?
b) In wie viele Dreiecke wird ein n -Eck durch die Diagonalen von einer Ecke aus zerlegt?
8. a) Wie viele Symmetrieachsen hat ein n -Eck? Beschreibe die Lage der Achsen.
b) Welche n -Ecke sind punktsymmetrisch?

9. Welche Sätze sind falsch? (Gegenbeispiel!)
- Für einen Innenwinkel α im Vieleck gilt: $60^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$.
 - Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
 - Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Inkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
 - Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich große Winkel hat.
 - Ein n -Eck und ein k -Eck sind genau dann ähnlich, wenn $n = k$ ist.
 - Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie denselben Umkreis haben.
- 10. Wie viele Sternvierecke gibt es mit
a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 100 Ecken?
- 11. Zeige: Ist p eine Primzahl, dann gibt es in einem Kreis $(p-1)/2$ regelmäßige p -Ecke.
12. a) In welchem n -Eck gibt es 1175 Diagonalen?
b) In welchem n -Eck ist ein Innenwinkel $\alpha_n = 178,2^\circ$?

Aufgaben zu 1.2

Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n -Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n -Eck) gemeint.

- Konstruiere in einen Kreis mit $r = 8$ ein
 - Dreieck und Zwölfeck
 - Achteck
 - Zehneck und Fünfeck
 - Fünfeck und Zehneck.
- Begründe, warum das n -Eck konstruierbar ist:
 - $n = 192$
 - $n = 512$
 - $n = 8\,589\,934\,594$
 - $n = 920$
 - $n = 17\,408$
- Das 51-Eck lässt sich über das 17-Eck und das gleichseitige Dreieck konstruieren, das 85-Eck über das 17-Eck und Fünfeck. Gib jeweils die Gleichung für die Konstruktion des Mittelpunktswinkels an. (Keine Konstruktion!)
- Bei der Konstruktion von Vielecken gibt es zwei Aufgabentypen:
 - Der Umkreisradius ist gegeben,
 - die Seitenlänge s ist gegeben.
 - Warum und wie kann man Aufgaben vom Typ II mit Hilfe von Typ I lösen?
 - Konstruiere nach a) ein Fünfeck mit $s = 6$.
- Konstruiere ein Achteck mit $s = 5$.
 - Konstruiere ein Zwölfeck mit $s = 3$.

- 6. »Konstruktion« des Siebenecks mit dem Einschiebelineal (nach BREIDENBACH)
 Ein Einschiebelineal ist ein Lineal, auf dem man zwei Punkte markiert. Man legt das Lineal so durch einen gegebenen Punkt, dass die beiden markierten Punkte auf gegebenen Linien liegen (einschieben).
 Das Siebeneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
 - Zeichne $H(-4|6)$ und OH .
 - Markiere auf einem Lineal R und S so, dass $\overline{RS} = 6$ ist.
 Einschiebung: Lege das Lineal so durch $L(-4|2)$, dass R auf HO und S auf der positiven x -Achse zu liegen kommen.
 - Die Mittelsenkrechte von $[OS]$ schneidet den Kreis in P (über der x -Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Siebenecks.
 Konstruiere nach diesem Verfahren ein Siebeneck.

- 7. »Konstruktion« des Neunecks mit dem Einschiebelineal (nach BREIDENBACH)
 Das Neuneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
 - Zeichne den Kreispunkt $H(2|y > 0)$.
 - Einschiebung: Passe die Strecke $[RS]$ der Länge 8 so ein, dass R auf der y -Achse, S auf der x -Achse und H auf RS zu liegen kommen.
 - Die Mittelsenkrechte von $[OS]$ schneidet den Kreis in P (über der x -Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Neunecks. Konstruiere nach diesem Verfahren ein Neuneck.

Aufgaben zu 1.3

Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n -Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n -Eck) gemeint.

1. Im Kreis mit Radius r gilt für das einbeschriebene Sechseck $s_6 = r$.
 Berechne für diesen Kreis c_6 , c_3 und s_3 .
2. Kreise um Quadratecken durch den Quadratmittelpunkt schneiden die Quadratseiten. Zeige: Die Schnittpunkte bilden ein Achteck.
3. Nach C. F. GAUSS gilt für die Seite des 17-Ecks im Einheitskreis

$$s_{17} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right) - \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}$$

Ermittle mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für s_{17} im Umkreis mit $r = 9$ und zeichne damit das 17-Eck.

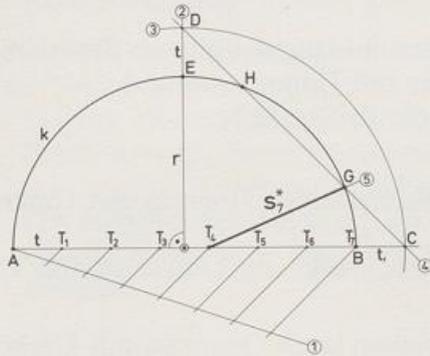
4. a) Wie lang ist die Seite s_4 des Vierecks mit dem Umkreisradius 1?
 b) Berechne die Seite s_{128} des 128-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist.

- 5. Verbindet man in einem n -Eck jeweils zwei Ecken so, dass die Verbindungsstrecke parallel ist zu einer Seite, so rahmen die Verbindungsstrecken ein kleineres n -Eck ein. Berechne für $n = 5$, $n = 6$ und $n = 8$
- aus der Seitenlänge s des n -Ecks die Seitenlänge a des kleineren n -Ecks.
 - das Verhältnis der Flächeninhalte (groß : klein).
- 6. Setze auf die Seiten der Länge s eines n -Ecks kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen s und x . Die äußern Ecken der Rechtecke bilden ein $2n$ -Eck. Berechne das Seitenverhältnis $s : x$ der Rechtecke und das Flächenverhältnis $F_{2n} : F_n$ der Vielecke für
- $n = 3$
 - $n = 4$
 - $n = 5$
 - $n = 6$.
- 7. Zeichne in den Einheitskreis ein Dreieck:
Die eine Seite ist so lang wie die eines Quadrats mit Umkreisradius 1, die andre Seite ist so lang wie die eines gleichseitigen Dreiecks mit Umkreisradius 1.
Bestimme die Dreieckswinkel und die Länge der dritten Seite.
- 8. Zeichne in den Einheitskreis ein Trapez:
Die eine Basis ist so lang wie die Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit Umkreisradius 1,
die andre Basis ist so lang wie die Seite eines Sechsecks mit Umkreisradius 1, der Kreismittelpunkt liegt im Trapez.
- Zeige: Die Schenkel sind so lang wie die Seiten eines Quadrats mit Umkreisradius 1.
 - Zeige: Die Diagonalen schneiden sich rechtwinklig.
 - Zeige: Der Diagonalschnittpunkt S hat von einer Basis den Abstand 0,5.
 - Berechne Winkel und Flächeninhalt des Trapezes.
9. Für die Seitenlänge des Zehnecks mit Umkreisradius 1 gilt $s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$
- Berechne daraus die Seitenlänge des zugehörigen Fünfecks.
 - Wie lang ist s_{80} im Einheitskreis?
 - Wie lang ist der Inkreisradius des 80-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist?
 - Wie lang ist s_{80} im Kreis mit Radius r ?
10. Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und konstruiere ein fast regelmäßiges Siebeneck mit der Näherung von
- HERON: $s_7 \approx \frac{1}{2} s_3$
 - ESTREMOW: $s_7 \approx s_{10} + \frac{1}{4} r$.
11. Dem Einheitskreis ist ein 3-, 6- und 12-Eck ein- bzw. umbeschrieben.
- Berechne Umfang u_n und Flächeninhalt F_n des einbeschriebenen n -Ecks.
 - Berechne Umfang v_n und Flächeninhalt G_n des umbeschriebenen n -Ecks.
12. Berechne Umfang und Flächeninhalt eines 16-Ecks, das einem Kreis mit Radius r ein- bzw. umbeschrieben ist.
- 13. Berechne die Seite des 15-Ecks im Einheitskreis.

14. NAHDRAN

Für alle n-Ecke mit $n \geq 5$ gibt es bei gegebenem Umkreis folgende Näherungskonstruktion:

- ① Ein Durchmesser [AB] des Umkreises k (Mittelpunkt M, Radius r) wird in n gleiche Teile t zerlegt (Teilpunkte: $A = T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, T_n = B$).
- ② Das Lot auf AB in M schneidet k in E und F.
- ③ Der Kreis um M mit Radius $r + t$ schneidet [MB in C und [ME in D.
- ④ CD schneidet k in G und H ($\overline{CG} < \overline{CH}$).
- ⑤ $\overline{GT_{n-3}}$ ist näherungsweise die gesuchte n-Eckseite.

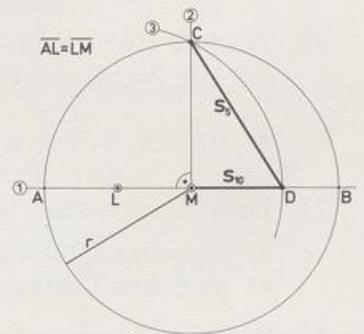
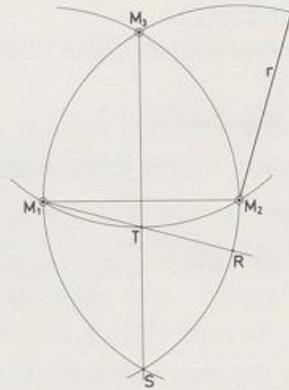


Konstruiere mit diesem Verfahren

- a) ein Neuneck mit $r = 9$
- b) ein Fünfeck mit $r = 5$ und vergleiche rechnerisch den exakten Wert von s_5 mit dem Näherungswert s_5^* .

15. Konstruiere die Figur für $r = 4$ und begründe, dass für die n-Ecke mit Umkreisradius r gilt:

- a) $\overline{SM_3} = s_3$
- b) $\overline{SM_2} = s_6$
- c) $\overline{SR} = s_8$
- d) $\overline{M_1T} = s_{12}$
- e) $\overline{M_2R} = s_{24}$



- a) Konstruiere die Figur für $r = 4$.
- b) Zeige: [MD] ist genau so lang wie die Seite s_{10} des einbeschriebenen Zehnecks, [CD] ist genau so lang wie die Seite s_5 des einbeschriebenen Fünfecks.
- c) Zeige: $s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2$.

17. Dem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a ist ein Halbkreis so umbeschrieben, dass die Ecken A und B auf dem Durchmesser [UV] liegen.

a) Zeige: \overline{UA} ist Seitenlänge in einem Zehneck mit Umkreisradius a.

b) Zeige: \overline{UD} ist Seitenlänge in einem Fünfeck mit Umkreisradius a.

• 18. Beweise die Formel von J. GREGORY (Drumoak 1638 bis 1675 Edinburgh):

$$s_{2n}^3 = (2s_{2n} + s_n)s_{4n}^2.$$

• 19. a) Zeige: $u_{2n} = \sqrt{u_n v_{2n}}$ b) Zeige: $v_{2n} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$
 (geometrisches Mittel) (harmonisches Mittel)

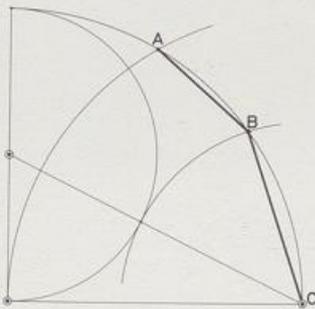
• 20. Die Formeln von J. C. SCHWAB:

Sind R_n und r_n die Radien von Um- und Inkreis eines n-Ecks und R_{2n} und r_{2n} die entsprechenden Radien beim 2n-Eck mit gleichem Umfang ($u_n = u_{2n}$), so gilt

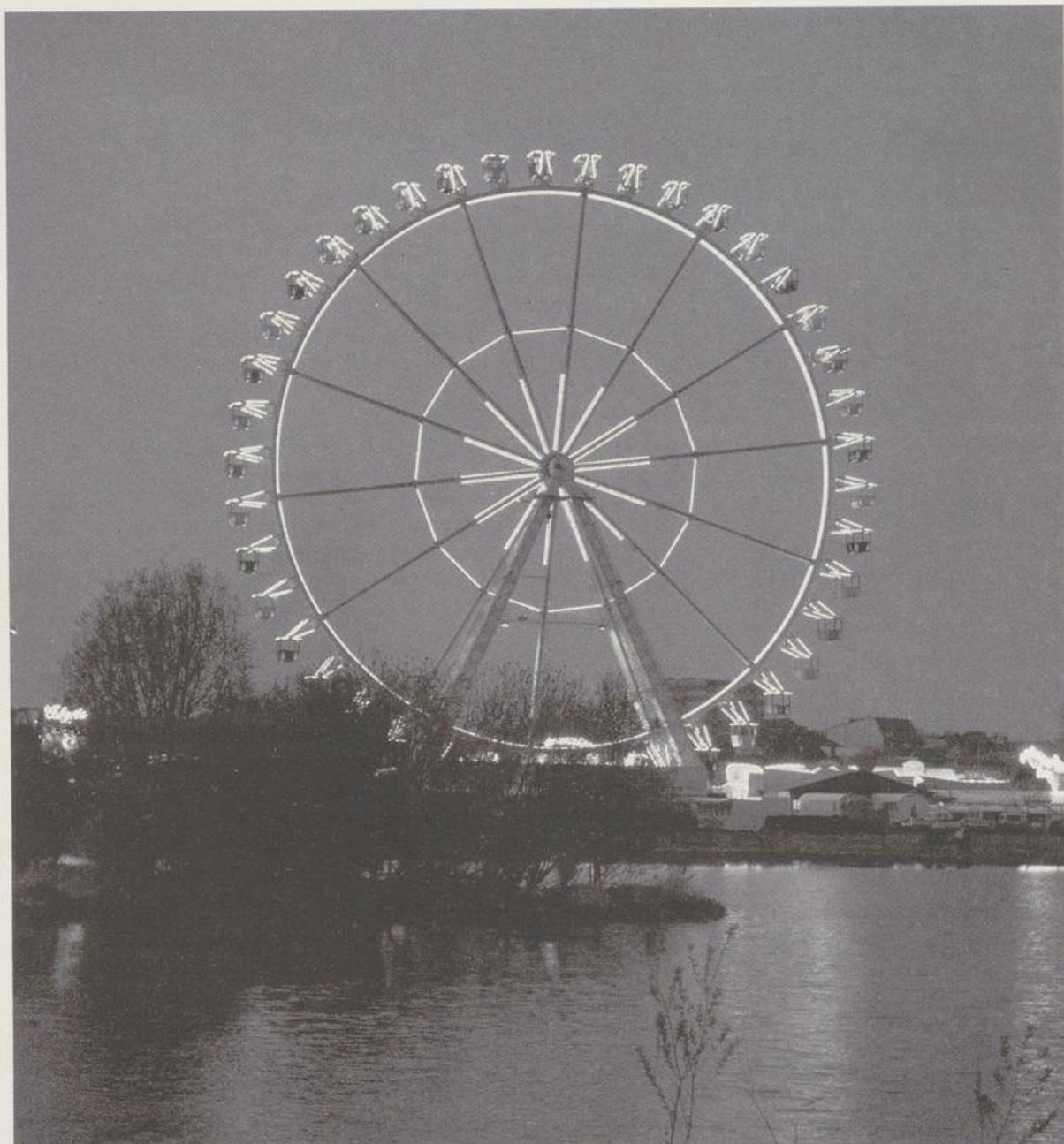
$$r_{2n} = \frac{1}{2}(r_n + R_n) \quad R_{2n} = \sqrt{R_n \cdot r_{2n}}$$

Beweise die Formeln von SCHWAB.

21. Zeige: $\overline{AB} = s_{15}$
 $\overline{BC} = s_{10}$



2. Kapitel Kreismessung



2.1. Umfang

Die Frage, wie man bei gegebenem Durchmesser den Umfang eines Kreises bestimmt, hat den Menschen schon immer beschäftigt. So finden wir in der Bibel im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23: »Hierauf fertigte er ein kreisrundes Becken an, das von einem Rand bis zum andern 10 Ellen maß ..., eine Schnur von 30 Ellen umspannte es.«

Will man bei beliebigen Kreisen den Umfang aus dem Durchmesser ermitteln, so braucht man eine Formel. Um sie zu finden, erinnern wir uns zuerst daran, dass alle Kreise ähnlich sind und dass in ähnlichen Figuren gleich liegende Stücke im gleichen Verhältnis stehen. Man kann zeigen (aber das ist hier zu kompliziert), dass diese Stücke auch krummlinig sein dürfen. Demnach ist das Verhältnis Umfang : Durchmesser bei allen Kreisen dieselbe Zahl. Seit 1737 verwendet man nach Leonhard EULER (1707 bis 1783) für diese Zahl als Symbol den kleinen griechischen Buchstaben π .

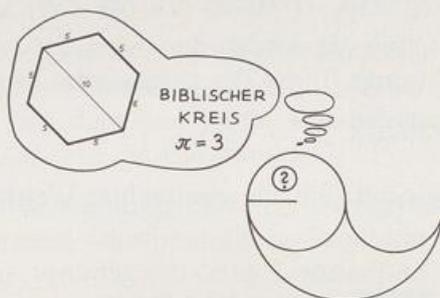
Ist u der Umfang, d der Durchmesser und r der Radius eines Kreises, so gilt

$$\frac{u}{d} \text{ ist konstant, als Gleichung } \frac{u}{d} = \pi \text{ oder } u = d\pi$$

Gewöhnlich ersetzt man d durch $2r$ und bekommt so die **Umfangsformel** $u = 2\pi r$.

Wie groß ist π ?

Wir machen einen kleinen Spaziergang durch die Geschichte der Berechnung von Näherungswerten für π . In den folgenden Dezimalzahlen sind die für π gültigen Werte **fett** gedruckt.



Die Bibel verwendet für π den Wert **3**. Und mit diesem Wert rechnet man auch im alten Babylon. Eine einfache Überprüfung (Maßband rumlegen oder Kreis abrollen) zeigt, dass der Wert in Wirklichkeit etwas größer ist.

Schon um 1900 v. Chr. kennen die Ägypter den Wert $(16/9)^2 = \mathbf{3,1604\dots}$, wie im Papyrus RHIND nachzulesen ist.

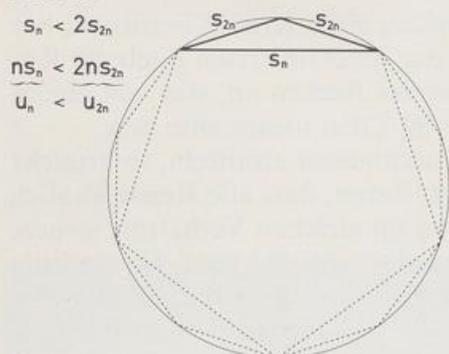
Um 500 v. Chr. rechnet man in den indischen Sulbasutras (das sind Schnurregeln zur Konstruktion von Altären) mit dem Wert $(26/15)^2 = \mathbf{3,0044\dots}$

PLATON (427 bis 348) gebraucht $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \mathbf{3,1462\dots}$

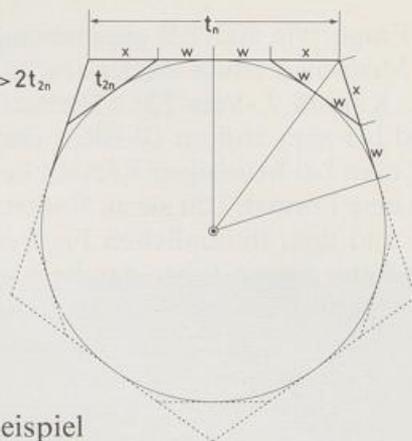
Als erster berechnet ARCHIMEDES (287 bis 212) die Kreiszahl π systematisch, indem er den Kreis zwischen regelmäßige Vielecke einzwängt:

Man sieht leicht ein, dass der Umfang eines einbeschriebenen Vielecks kürzer ist als der Kreisumfang, denn eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Man kann auch zeigen (aber das ist hier zu kompliziert), dass der Umfang eines umbeschriebenen Vielecks größer ist als der Kreisumfang. Beim Verdoppeln der Eckenzahl wird der Um-

fang u_n des einbeschriebenen n -Ecks größer, der Umfang v_n des umbeschriebenen n -Ecks kleiner



$t_{2n} = 2w < 2x$
 $t_n = 2w + 2x > 2t_{2n}$
 $\frac{nt_n}{v_n} > \frac{2nt_{2n}}{v_{2n}}$



innen: $u_{2n} > u_n$ außen: $v_{2n} < v_n$, also ist zum Beispiel

$u_6 < u_{12} < u_{24} < u_{48} < u_{96} < \dots < u < \dots < v_{96} < v_{48} < v_{24} < v_{12} < v_6$

ARCHIMEDES rechnet bis zum 96-Eck. Daraus folgt: $6,282\,063\dots < u < 6,285\,429\dots$

wegen $r = 1$ ist $u = 2\pi$, und es ergibt sich für π die Ungleichung

$3,141\,031\dots < \pi < 3,142\,271\,4\dots$

Weil ARCHIMEDES rationale Näherungswerte für die Wurzeln verwendet, findet er die Ungleichung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Noch heute schätzt man als gute Näherung $\pi \approx \frac{22}{7}$ oder $\pi \approx 3,14$.

Der chinesische Astronom ZHANG HENG (78 bis 139) und der indische Mathematiker BRAHMAGUPTA (7. Jh. n. Chr.) verwenden den Wert $\sqrt{10} = 3,1622\dots$

Eine ausgezeichnete Näherung findet der chinesische Mathematiker ZU CHONG-ZHI (430 bis 501): $\frac{355}{113} = 3,141\,592\,920\,3\dots$

In der Folgezeit entwickelt sich ein regelrechter Wettkampf um möglichst viele gültige Stellen von π .

LEONARDO PISANO, auch LEONARDO FIBONACCI genannt, (etwa 1180 bis um 1250) berechnet aus dem 96-Eck den Näherungswert $3,141\,818\dots$

1427 arbeitet der arabische Astronom AL-KASI mit dem $6 \cdot 2^{27}$ -Eck und bekommt $3,141\,592\,653\,589\,873\dots$

1610 erreicht der Fechtmeister und Mathematiker Ludolph van CEULEN mit einem $4 \cdot 2^{60}$ -Eck 35 Dezimalen. Viele sind von dieser Leistung so beeindruckt, dass sie π fortan als Ludolf'sche Zahl bezeichnen.

1699 bringt es Abraham SHARP (1651 bis 1742) auf 71 Dezimalen.

1841 schafft William RUTHERFORD in mühseliger Rechnung 208 Stellen, von denen leider nur die ersten 152 richtig sind.

1873 stellt William SHANKS einen neuen Rekord auf: Fleiß und Ausdauer lassen ihn bis zur 707. Stelle vordringen, doch ach, bloß die ersten 527 Stellen stimmen!

Bis jetzt sind alle Näherungswerte noch Ergebnisse anstrengender Kopf- und Schreiarbeit.

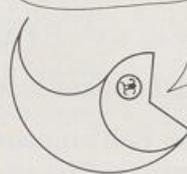
1949 schließlich treten die ersten elektronischen Großrechner in die Arena. Und nun überschlagen sich die Ereignisse:

1949	2073 Stellen in 70 Stunden
1958	10 000 Stellen in 100 Minuten
1961	100 000 Stellen in 8,75 Stunden
1973	1 000 000 Stellen in 23,3 Stunden
1983	16 000 000 Stellen in 30 Stunden

Für π -Fans geben wir hier nur die ersten tausend Dezimalen an:

3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

WIE, O DIES π
MACHT ERNSTLICH SO VIELE VIELE MÜH!
LERNT JEMERHIN, MAGDELEIN, LEICHTE VERSELEIN,
WIE SO ZUM BEISPIEL DIES DÜRFT ZU MERKEN SEIN!



Wer sich die ersten 23 Stellen merken will, lerne Geobolds Gedicht und zähle die Buchstaben.

Für die Praxis ist eine Rekordjagd nach möglichst vielen Dezimalen völlig unnütz: Um den Umfang eines Kreises von der Größe des Erdäquators auf 1 mm genau zu berechnen genügen 11 Dezimalen. Trotzdem sind solche Rekordergebnisse sinnvoll: Man testet damit die Computer und die Programme.

Heute verwendet man zur π -Berechnung nicht mehr regelmäßige Vielecke, sondern zum Beispiel unendliche Summen oder unendliche Produkte wie:

1579 VIETA:
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots$$

1655 WALLIS:
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots$$

1665 NEWTON:
$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 32} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 128} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 512} + \dots$$

1671 GREGORY:
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

1734 EULER: $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

1766 beweist Johann Heinrich LAMBERT (1728 bis 1777), dass π eine irrationale Zahl ist, sich also nicht als Quotient zweier natürlicher Zahlen schreiben lässt.

1882 weist Ferdinand LINDEMANN (1852 bis 1939) nach, dass »die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgendwelchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann«. Das bedeutet: Es gibt keine Gleichung der Form

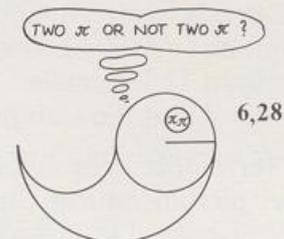
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit rationalem Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots , die π als Lösung hat.

Solche Zahlen nennt man **transzendent**.

Mit seinem Beweis findet LINDEMANN auch die Antwort auf die uralte Frage, ob es allein mit Zirkel und Lineal möglich ist, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln (Quadratur des Kreises). Weil π transzendent ist, gilt:

Die Quadratur des Kreises ist unmöglich.



Noch heute verwendet man den Ausdruck »Quadratur des Kreises« für scheinbar oder tatsächlich unlösbare Probleme.

Nun aber zu einem lösbaren Problem. Es zeigt eine verblüffende Folgerung aus der Kreisumfangsformel.

Wir haben einen Globus von 0,25 m Radius. Um seinen Äquator biegen wir einen Draht so, dass er eng anliegt. Die Drahtlänge ist (in Meter) $s = 2\pi r = 1,57\dots$. Dann nehmen wir einen Draht, der 1 m länger ist, biegen auch ihn zu einem Kreis und legen ihn konzentrisch in die Äquatorialebene. Wie groß ist der Abstand a zwischen Kreis und Kugel?

Neuer Umfang: $s^* = 1 + 1,57\dots = 2,57\dots$

neuer Radius: $r^* = \frac{s^*}{2\pi} = 0,409\dots$

Abstand: $a = r^* - r = 0,159\dots$

Der längere Draht ring steht also etwa 16 cm ab.

Jetzt machen wir dasselbe mit der großen Erdkugel.

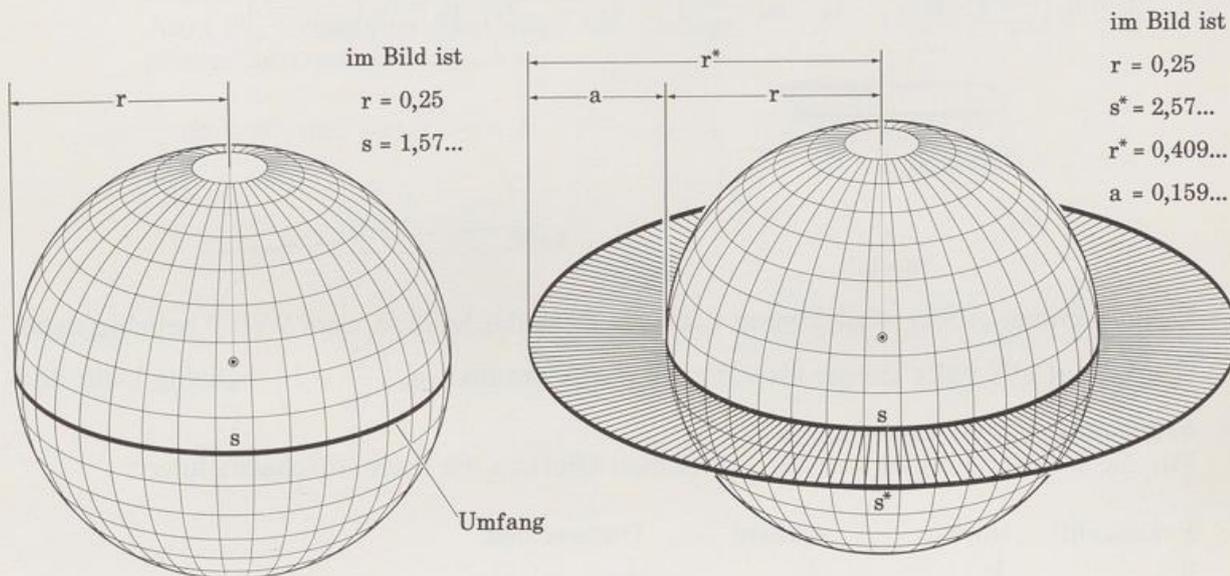
Radius (in Meter): $r = 6\,378\,388$

Äquatorlänge: $u = 2r\pi = 40\,076\,593,765\dots$

um 1 m längerer Umfang: $u^* = 1 + 40\,076\,593,765\dots = 40\,076\,594,756\dots$

neuer Radius: $r^* = \frac{u^*}{2\pi} = 6\,378\,388,159\dots$

Abstand: $a = r^* - r = 0,159\dots$



Seltsam: Obwohl die Verlängerung von 1 Meter bei einer Länge von 40 Millionen Meter praktisch nicht erkennbar ist, steht der Drahtring wieder 16 cm von der Erde ab! Was ist da los? Das Rätsel löst sich, wenn wir die Rechnung allgemein machen.

Radius: r

Umfang: $u = 2r\pi$

neuer Umfang: $u^* = u + 1 = 2r\pi + 1$

neuer Radius: $r^* = \frac{u^*}{2\pi} = \frac{2r\pi + 1}{2\pi} = r + \frac{1}{2\pi}$

Abstand: $a = r^* - r = r + \frac{1}{2\pi} - r = \frac{1}{2\pi} = 0,159\dots$

Der Abstand a hängt nicht vom Radius ab, er ist bei jeder Kugel gleich groß!

Mathematischer Hintergrund

Wir haben so getan, als ob es klar wäre, was unter der Länge einer krummen Linie zu verstehen sei. Bisher können wir aber eigentlich nur die Längen von Strecken bestimmen. Bevor der Mathematiker Kreisumfänge berechnet, muss er sich überlegen, was ein Kreisumfang überhaupt sein soll. Weil ARCHIMEDES keinen Anspruch mehr auf Copyright erheben kann, benutzen wir seine gute Idee zu folgender Definition:

Der Kreisumfang ist das Ergebnis der Intervallschachtelung $[u_n; v_n]$ für unbegrenzt wachsendes n . u_n und v_n sind die Umfänge des ein- und umbeschriebenen n -Ecks.

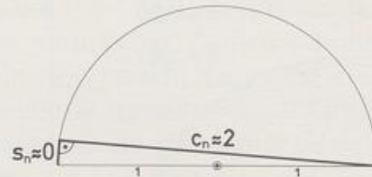
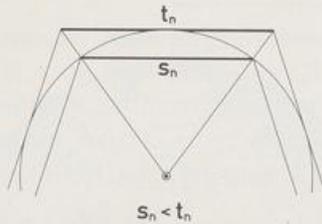
Für den Sonderfall der Verdopplung der Eckenzahl sieht man leicht, dass eine Intervallschachtelung vorliegt:

Von Seite 22 wissen wir $u_{2n} > u_n$ und $v_{2n} < v_n$

außerdem gilt $s_n < t_n$

und damit $n \cdot s_n < n \cdot t_n$ also $u_n < v_n$ und schließlich wegen

$$t_n = s_n \cdot \frac{2}{c_n} \parallel \cdot n; \quad v_n = u_n \cdot \frac{2}{c_n} \parallel - u_n; \quad v_n - u_n = u_n \left(\frac{2}{c_n} - 1 \right).$$



Wenn n immer größer wird, kommt s_n dem Wert 0, das heißt, c_n dem Wert 2 beliebig nahe.

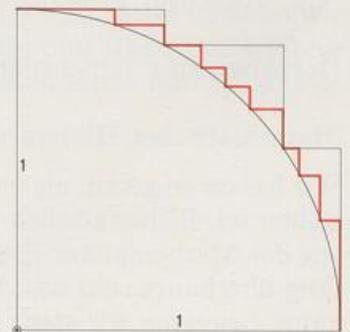
Weil u_n auf alle Fälle kleiner als v_3 ist, wird das Produkt $u_n \left(\frac{2}{c_n} - 1 \right)$ beliebig klein und damit auch die Differenz $v_n - u_n$.

Für die 3-er Serie ergibt sich für den halben Umfang die Intervallschachtelung:

Eckenzahl n	Innen: $\frac{1}{2}u_n$	Außen: $\frac{1}{2}v_n$	Unterschied $\frac{1}{2}(v_n - u_n)$
3	2,598 08...	5,196 15...	2,598 07...
6	3,000 00...	3,464 10...	0,464 10...
12	3,105 82...	3,215 39...	0,109 56...
24	3,132 62	3,159 65...	0,027 03...
48	3,139 35...	3,146 08...	0,006 73...
96	3,141 03...	3,142 71...	0,001 68...
192	3,141 45...	3,141 87...	0,000 42...

Die abstrakte und komplizierte Definition des Kreisumfangs ist deshalb nötig, weil anschauliche Überlegungen in die Irre führen können, wenn das Unendliche mit im Spiel ist. Dazu zwei Beispiele:

$\pi = 4$ (?) Beim Viertelkreis ist die Länge der Außentreppe auch bei beliebiger Verfeinerung immer gleich 2. Folglich ist der Kreisumfang gleich 8 und damit $\pi = 4$.

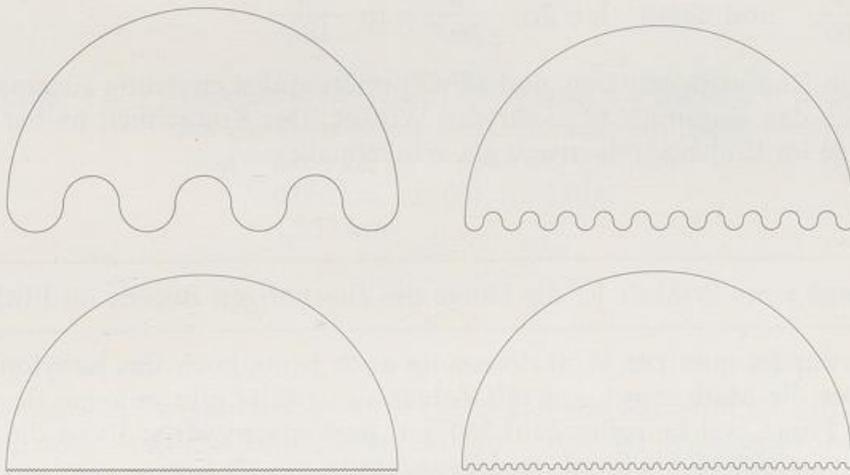
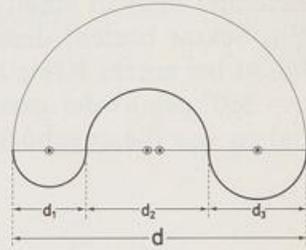


$\pi = 2$ (?) Die Wellenlinie besteht aus lauter Halbkreisen. Bei einer Unterteilung in drei Halbkreise gilt zum Beispiel (Durchmesser d):

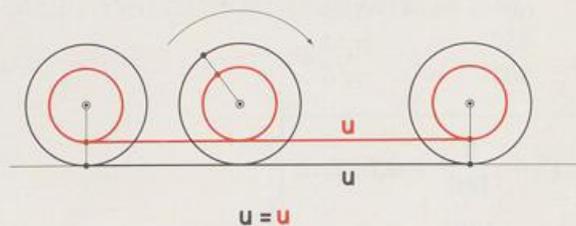
$$\begin{aligned} \text{Länge der Wellenlinie} &= \frac{1}{2} d_1 \pi + \frac{1}{2} d_2 \pi + \frac{1}{2} d_3 \pi \\ &= \frac{1}{2} (d_1 + d_2 + d_3) \pi = \frac{1}{2} d \pi \end{aligned}$$

Das gilt auch bei beliebig vielen, beliebig kleinen Halbkreisen. Schließlich kann das Auge die Wellenlinie nicht mehr vom Durchmesser unterscheiden. Also ist

$$\frac{1}{2} d \pi = d \quad \text{und somit} \quad \pi = 2.$$



Das letzte von Geobold: Er meint, alle Kreise hätten denselben Kreisumfang. Zum Beweis rollt er eine Kreisscheibe ab, auf der eine kleine (rote) Kreisscheibe befestigt ist.



2.2. Bogen und Bogenmaß

Zeichnet man in einen Kreis zwei Radien ein, so entstehen zwei Sektoren (Ausschnitte). Ein Sektor besteht demnach aus zwei Radien und einem Kreisbogen. Die Bogenlänge b hängt bei einem Kreis mit festem Radius nur vom Mittelpunktswinkel μ ab. Zum Winkel $\mu = 360^\circ$ gehört der ganze Umfang $2r\pi$ als Bogen. Weil sich die Längen zweier Bögen verhalten wie die zugehörigen Mittelpunktswinkel, gilt



$$\frac{b}{2r\pi} = \frac{\mu}{360^\circ} \quad \text{und damit} \quad b = 2r\pi \cdot \frac{\mu}{360^\circ} = r\mu \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Weil bei festem Radius Bogenlänge und Mittelpunktswinkel eindeutig zusammengehören, verwendet man den Bogen als Maß für den Winkel: Der Einfachheit halber nimmt man die Bogenlänge im Einheitskreis gleich als Winkelmaß.

Definition

Das **Bogenmaß** eines Winkels ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.

Im Alltag verwendet man zur Winkelmessung auch heute noch das babylonische Gradmaß. Weil aber die Mathematik nur mit Zahlen misst (hier gibt es keine Benennungen!), stellt sich die Frage, welche reelle Zahl 360° ist. Jetzt wissen wir's: Es ist die Zahl 2π ! In einer Tabelle vergleichen wir Grad- und Bogenmaß:

Gradmaß = Bogenmaß

$$360^\circ = 2\pi$$

$$180^\circ = \pi$$

$$90^\circ = \pi/2$$

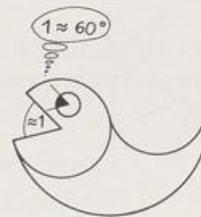
$$60^\circ = \pi/3$$

$$45^\circ = \pi/4$$

$$30^\circ = \pi/6$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,017\dots$$

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$



Der hochgestellte Kringel im babylonischen Winkelmaß lässt sich als Faktor $\frac{\pi}{180}$ deuten. So kann man einen Winkel leicht von einem Maß ins andre umrechnen:

$$35^\circ = 35 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{36} \approx 0,61 \quad 2,5 = 2,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 143,2^\circ$$

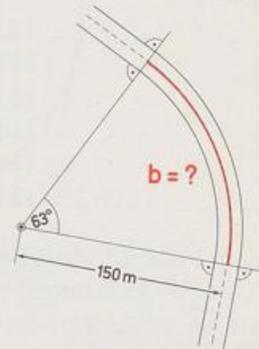
Mit dem Bogenmaß wird die Formel für die Bogenlänge viel einfacher:

$$b = r\mu \cdot \frac{\pi}{180^\circ}, \quad \text{wegen } \frac{\pi}{180^\circ} = 1 \quad \text{ergibt sich}$$

Bogenlänge $b = r \cdot \mu$ μ im Bogenmaß

Zwei Beispiele:

Wie lang ist die Kurve? $b = 150 \text{ m} \cdot 63^\circ = 150 \text{ m} \cdot 63 \cdot \pi / 180 \approx 165 \text{ m}$



Wie lang ist eine Seemeile?

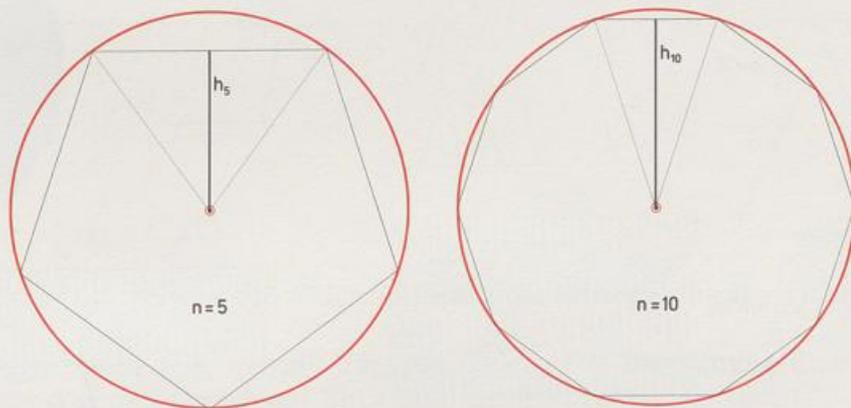
Eine Seemeile (1 sm) ist so lang wie ein Bogen eines Längenkreis der Erde (Meridian), der zum Mittelpunktswinkel $1'$ gehört.

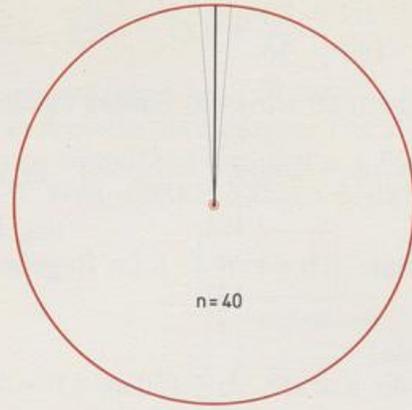
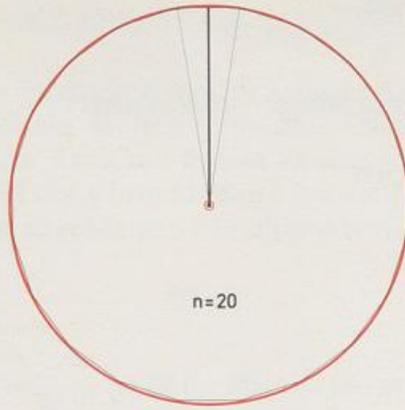
$$\begin{aligned} 1 \text{ sm} &= 6368 \text{ km} \cdot 1' = 6386 \text{ km} \cdot (1^\circ/60) \\ &= 6386 \text{ km} \cdot (1/60) \cdot (\pi/180) \\ &= 1,852 \text{ km} \end{aligned}$$

2.3 Fläche

Seit 1882 (LINDEMANN!) wissen wir, dass die Quadratur des Kreises unmöglich ist: Mit Zirkel und Lineal allein lässt sich kein Quadrat konstruieren, das denselben Inhalt hat wie ein gegebener Kreis. Wir suchen jetzt eine Formel, mit der wir den Kreisinhalt wenigstens berechnen können.

Auf Seite 12 steht die Formel $F_n = u_n h_n / 2$ für ein regelmäßiges n -Eck, das einem Kreis eingeschrieben ist. Wächst n über alle Grenzen, so kommt der Umfang u_n des n -Ecks dem Kreisumfang $u = 2r\pi$ beliebig nahe. Ebenso kommt die Höhe h_n des Bestimmungsdreiecks dem Kreisradius r beliebig nahe. Die Fläche F_n wird zur Kreisfläche und es gilt:



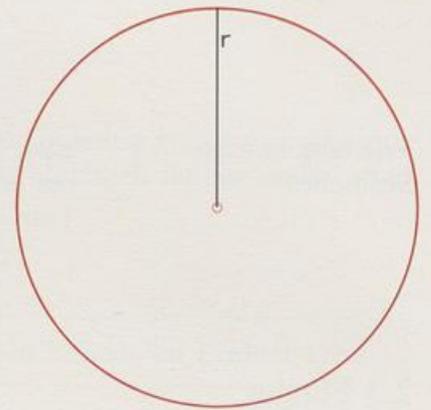


$$F = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r$$

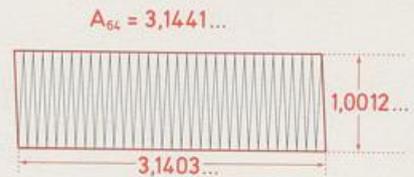
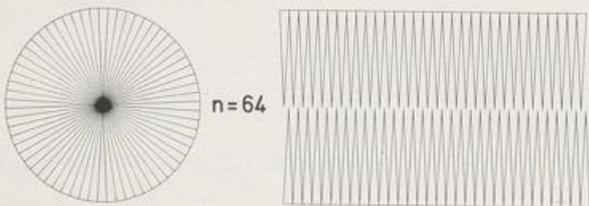
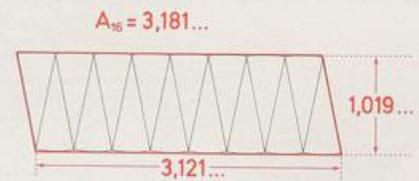
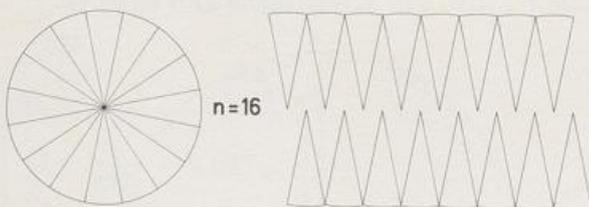
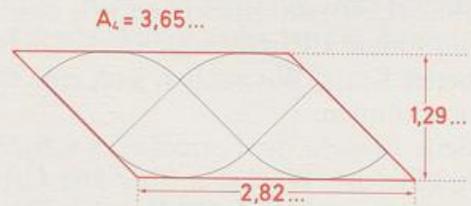
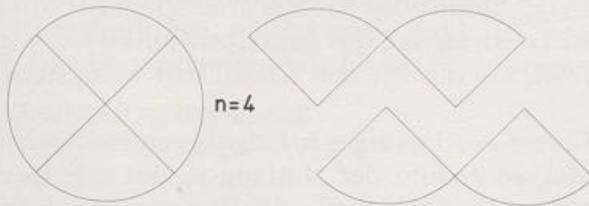
Inhalt der Kreisfläche

$$F = r^2\pi$$

Ein anderer Weg zu dieser Formel kommt ohne Vielecke aus: Man zerschneidet zwei gleiche Halbkreise in kongruente Sektoren und verzahnt diese wechselweise, sodass ihnen ein Parallelogramm umbeschrieben ist. Wächst die Sektorenzahl über alle Grenzen, so kommt die Grundseite dem halben Kreisumfang $r\pi$ und die Höhe dem Kreisradius r beliebig nahe und es gilt Kreisfläche = halber Kreisumfang mal Radius: $F = r\pi \cdot r = r^2\pi$.



Einheitskreis



In der Tabelle stehen einige Parallelogrammwerte, wie sie sich beim Aufschneiden des Einheitskreises ergeben:

Sektorenzahl	Parallelogrammlänge	Parallelogrammhöhe	Parallelogrammfläche
4	2,82...	1,29...	3,65...
16	3,121...	1,019...	3,181...
64	3,1403...	1,0012...	3,1441...
256	3,14151...	1,00075...	3,14175...
1024	3,141587...	1,000047...	3,14160...
4096	3,14159234...	1,0000029...	3,1415932...
16384	3,141592634...	1,00000018...	3,141592692...

Der Faktor r^2 in der Flächenformel sollte nicht überraschen. Weil alle Kreise ähnlich sind, kann man sich vorstellen, dass der Kreis mit Radius r durch zentrische Streckung (Streckfaktor r) aus dem Einheitskreis entstanden ist. Ist F_1 der Inhalt des Einheitskreises, so ergibt sich für den Inhalt F_r des Kreises mit Radius r die Formel $F_r = r^2 F_1$. Die Konstante F_1 entpuppt sich als die Kreiszahl π , als die Zahl also, die schon bei der Umfangsbestimmung die entscheidende Rolle gespielt hat.

Sektorfläche

Den Flächeninhalt F_{Sektor} eines Sektors berechnen wir so ähnlich wie die Länge eines Kreisbogens: Zum Winkel $\mu = 360^\circ$ gehört der ganze Kreisinhalt $r^2\pi$ als Fläche. Bei gleichem Radius verhalten sich zwei Sektorflächen wie die zugehörigen Mittelpunktswinkel. Deswegen gilt

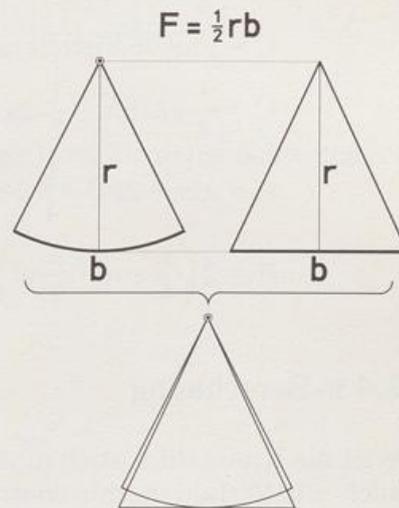
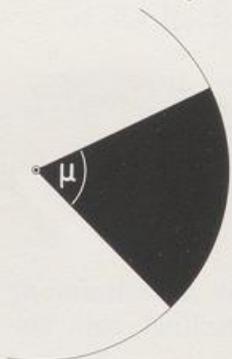
$$\frac{F_{\text{Sektor}}}{r^2\pi} = \frac{\mu}{360^\circ} \quad \text{und damit} \quad F_{\text{Sektor}} = r^2\pi \frac{\mu}{360^\circ}$$

mit $\pi/180^\circ = 1$ ergibt sich

$$F_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} r^2 \mu$$

Ersetzt man $r\mu$ durch die Bogenlänge b , so ergibt sich

$$F_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} br$$



Die letzte Formel erinnert an den Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundlinie b und der Höhe r .

Mit Kreisbögen lassen sich reizvolle Figuren bilden. Die Berechnung ihrer Fläche und ihres Umfangs erfordert manchmal Blick und Geschick. Dazu ein Beispiel:

Gegeben ist eine Kreisbogenfigur im Quadratgitter mit der Gitterkonstante a . Berechne Umfang und Flächeninhalt in Abhängigkeit von a .

Umfang: Die Figur besteht aus vier Viertelkreisen, davon haben zwei den Radius a , die andern beiden den Radius $2a$.

$$u = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2a\pi + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2(2a)\pi = 3a\pi$$

Fläche: Den Flächeninhalt F findet man, wenn man vom Quadrat der Seitenlänge $3a$ die Flächenstücke A und B zweimal abzieht

$A = \text{Rechteck} - \text{Viertelkreis}$

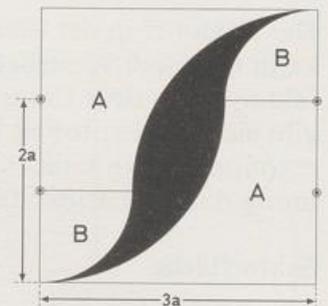
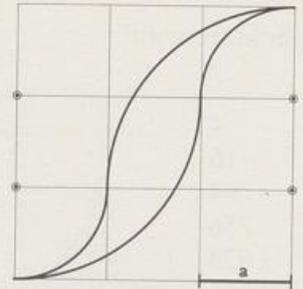
$$A = 3a \cdot 2a - \frac{1}{4} \cdot (2a)^2\pi = 6a^2 - a^2\pi$$

$$F = (3a)^2 - 2A - 2B \quad \text{Viertelkreis } B = \frac{1}{4} a^2\pi$$

$$F = 9a^2 - 2(6a^2 - a^2\pi) - 2 \cdot \frac{1}{4} a^2\pi$$

$$F = 9a^2 - 12a^2 + 2a^2\pi - \frac{1}{2} a^2\pi$$

$$= \frac{3}{2} a^2\pi - 3a^2 = \frac{3}{2} a^2(\pi - 2)$$



Es geht auch anders: Weil die Figur punktsymmetrisch ist, wird sie von der Diagonale halbiert, das heißt $F = 2C$.

$D = \text{kleiner Viertelkreis} - \text{kleines Dreieck}$

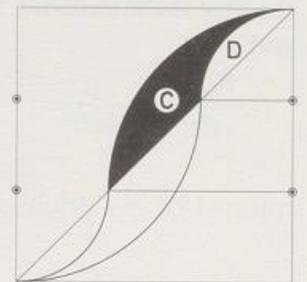
$$D = \frac{1}{4} a^2\pi - \frac{1}{2} a^2$$

$C = \text{großer Viertelkreis} - \text{großes Dreieck} - D$

$$C = \frac{1}{4} (2a)^2\pi - \frac{1}{2} 2a \cdot 2a - \left(\frac{1}{4} a^2\pi - \frac{1}{2} a^2 \right)$$

$$C = a^2\pi - 2a^2 - \frac{1}{4} a^2\pi + \frac{1}{2} a^2 = \frac{3}{4} a^2\pi - \frac{3}{2} a^2$$

$$F = 2 \left(\frac{3}{4} a^2\pi - \frac{3}{2} a^2 \right) = \frac{3}{2} a^2 = \frac{3}{2} a^2(\pi - 2)$$



2.4 π -Berechnung

Weil die Kreiszahl π auch in der Flächenformel auftaucht, eignen sich zur π -Bestimmung auch alle Verfahren, mit denen man die Kreisfläche näherungsweise berechnet, zum Beispiel:

Treppenverfahren

Wir zerschneiden einen Viertelkreis mit Radius 1 in n gleich breite Streifen. Jeder Schnitt bestimmt zwei Rechtecke der Breite $1/n$. Die Rechtecke bilden zwei Treppen: Die innere

liegt ganz im Viertelkreis, sie füllt ihn um so besser, je größer die Anzahl der Rechtecke ist – und die äußere enthält den Viertelkreis, auch sie gleicht sich diesem mit wachsender Streifenzahl immer besser an. Die Inhalte von Innen- und Außentreppe kommen sich bei wachsender Streifenzahl beliebig nahe, bilden also eine Intervallschachtelung für den Viertelkreis-Inhalt. Die Bilder zeigen Außentreppe mit acht bzw. 20 Streifen und die zugehörigen Innentreppe.

Flächeninhalt der Innentreppe F_{innen}

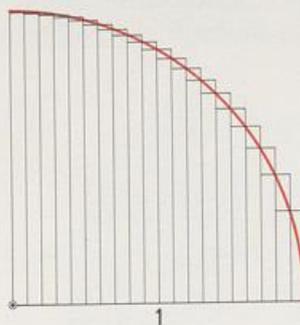
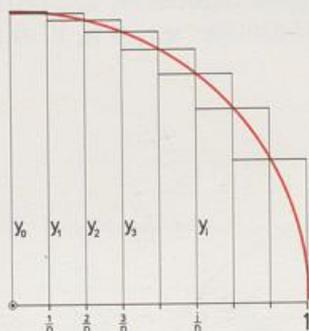
Nach PYTHAGORAS gilt für die Höhe y_i des i -ten Rechtecks

$$y_i^2 = 1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{n^2 - i^2}{n^2} \quad \text{also} \quad y_i = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - i^2}$$

Das i -te Rechteck hat den Inhalt $F_i = \frac{1}{n} y_i = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - i^2}$

$$F_{\text{innen}} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n$$

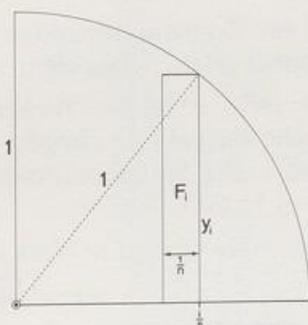
$$F_{\text{innen}} = \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \sqrt{n^2 - 3^2} + \dots + \sqrt{n^2 - n^2})$$



Flächeninhalt der Außentreppe $F_{\text{außen}}$

Die Außentreppe unterscheidet sich um ein Rechteck von ihrer kleineren Schwester, es ist das Rechteck mit der Höhe 1 (= Radius); sein Inhalt ist $1/n$.

$$F_{\text{außen}} = F_{\text{innen}} + \frac{1}{n}$$



$4 \cdot F_{\text{innen}}$ und $4 \cdot F_{\text{außen}}$ sind Näherungswerte für den Inhalt des Einheitskreises und deshalb zugleich auch für π :

$$4 \cdot F_{\text{innen}} < \pi < 4 \cdot F_{\text{außen}}$$

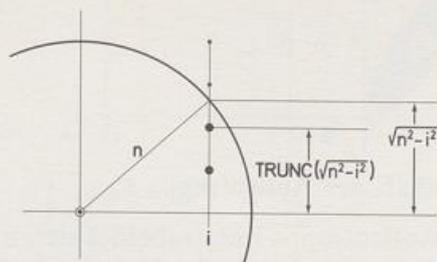
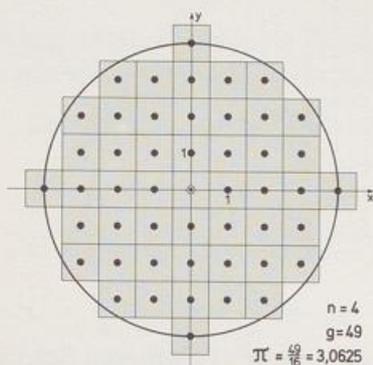
Die Tabelle macht's deutlich: der Kreis im Würgegriff von Innen- und Außentreppe:

Anzahl n der Streifen	vierfacher Inhalt der Innentreppe	vierfacher Inhalt der Außentreppe	Unter- schied
8	2,83...	3,33...	0,5
10	2,90...	3,90...	0,4
20	3,02...	3,22...	0,2
100	3,120...	3,160...	0,04
1 000	3,139 5...	3,1435...	0,004
10 000	3,141 39...	3,141 79...	0,000 4
100 000	3,141 572...	3,141 612...	0,000 04
1 000 000	3,141 5906...	3,141 5946...	0,000 004

Die Mittelwerte von Außen- und Innentreppe ergeben bessere Näherungswerte für π , so zum Beispiel **3,141 592 265 24...** bei einer Million Außenstreifen.

Gitterpunktverfahren

Wir zählen alle Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten in oder auf einem Kreis mit Radius n ($n \in \mathbb{N}$). Jeder Gitterpunkt repräsentiert ein Einheitsquadrat. Die Anzahl g der Gitterpunkte ist deshalb ein Näherungswert für die Kreisfläche: $g \approx n^2\pi$, also $\pi \approx g/n^2$.



Wir zeichnen den Kreis mit Radius n in ein Koordinatensystem um $M(0|0)$. Zuerst zählen wir alle Gitterpunkte mit positiven Koordinaten. Über dem x -Wert i liegen alle Gitterpunkte, deren y -Wert kleiner oder gleich $\sqrt{n^2 - i^2}$ ist. Solche Werte lassen sich bequem mit der TRUNC-Funktion der Computersprache Pascal berechnen.

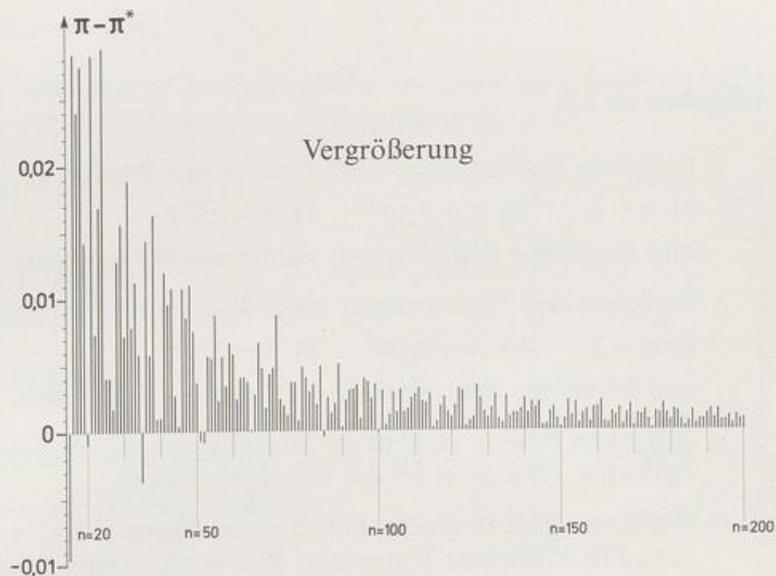
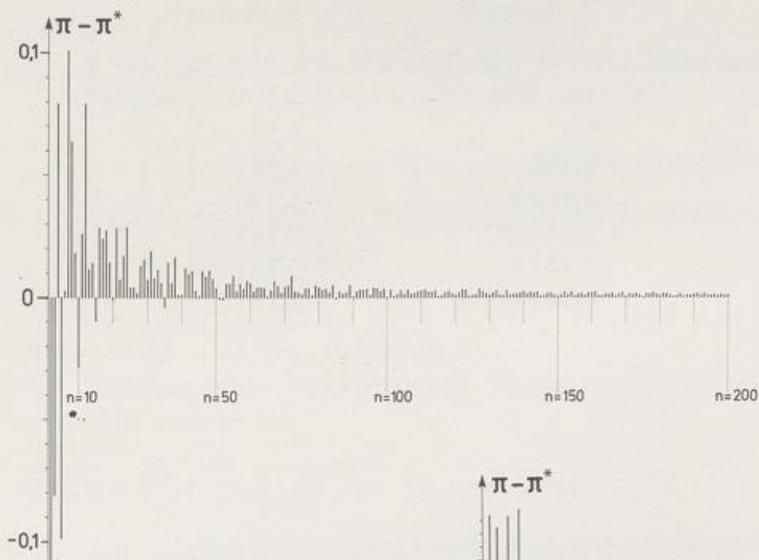
TRUNC(x) schneidet von der Dezimalzahl x alle Nachkommastellen ab,

Beispiel: TRUNC(1,87) = 1 oder TRUNC(-3,1415) = -3.

Folglich liegen $\text{TRUNC}(\sqrt{n^2 - i^2})$ Gitterpunkte überm x -Wert i im Viertelkreis. Insgesamt liegen $v = \text{TRUNC}(\sqrt{n^2 - 1^2}) + \text{TRUNC}(\sqrt{n^2 - 2^2}) + \dots + \text{TRUNC}(\sqrt{n^2 - (n-1)^2})$ Gitterpunkte mit positiven Koordinaten in oder auf dem Viertelkreis.

Zählt man die Achsenpunkte noch dazu, so ergibt sich für alle Gitterpunkte in oder auf dem Kreis die Anzahl $g = 4 \cdot v + 4 \cdot n + 1$. Die Näherungswerte g/n^2 zappeln unregelmäßig um π , kommen aber auf lange Sicht der Kreiszahl π dennoch beliebig nahe.

Radius n	Anzahl g der Gitterpunkte	Näherungswert π^* für π	$\pi - \pi^*$
2	13	3,25	-0,10...
3	29	3,22...	-0,080...
4	49	3,06...	0,079...
5	81	3,24	0,098...
6	113	3,138...	0,0027...
7	149	3,04...	0,10...
8	197	3,07...	0,063...
9	253	3,123...	0,018...
10	317	3,17	-0,028
100	31 417	3,141 7	-0,000 10...
1 000	3 141 549	3,141 59	0,000 043...
10 000	31 415 053	3,141 590 53	0,000 002 1...
100 000	31 415 925 457	3,141 592 54...	0,000 000 10...
1 000 000	31 451 592 649 625	3,141 592 649...	0,000 000 003 9...



Zufallsregen (Monte-Carlo-Methode)

Mit einem Computer erzeugen wir Paare von Zufallszahlen zwischen 0 und 1 und deuten sie als Punktkoordinaten. Solche Zufallspunkte liegen in einem Quadrat mit den Gegenecken (0|0) und (1|1). Weil der Zufall auf lange Sicht keine Gegend im Quadrat bevorzugt, verhält sich die Anzahl v der Punkte im Viertelkreis zur Anzahl q der Punkte im Quadrat annähernd wie der Inhalt des Viertelkreises zum Inhalt des Quadrats

$$\frac{v}{q} \approx \frac{\frac{1}{4}\pi}{1} \quad \text{also} \quad \pi \approx 4 \frac{v}{q}.$$

Die Tabelle enthält die Ergebnisse dreier Versuche mit je 10 Millionen Tropfen und die Zwischenergebnisse in Abständen von Zehnerpotenzen. Der Zufall verteilt die Tropfen nicht so gleichmäßig, wie die Gitterpunkte liegen. Deshalb sind die Näherungswerte im Durchschnitt nicht so gut wie die im Gitterpunktverfahren.

Anzahl q der Punkte im Quadrat	Näherungswert 1. Versuch	Näherungswert 2. Versuch	Näherungswert 3. Versuch
10	4	1,6	3,6
100	3,24	3,4	3,56
1 000	3,124	3,132	3,184
10 000	3,155 6	3,110 4	3,146
100 000	3,147 76	3,145 24	3,145 92
1 000 000	3,142 904	3,143 4	3,141 104
10 000 000	3,141 564 4	3,141 871 6	3,141 218 4

Aufgaben zu 2.1

- Berechne den Umfang eines Kreises mit Radius 10. Verwende dazu
a) $\pi \approx 3$ b) $\pi \approx 3,14$ c) $\pi \approx 22/7$
und bestimme den relativen Fehler auf 0,1 % genau.
- Berechne den Durchmesser eines Kreises mit Umfang 10. Verwende dazu
a) $\pi \approx 3$ b) $\pi \approx 3,14$ c) $\pi \approx 22/7$
und bestimme den relativen Fehler auf 0,1 % genau.
- München bewegt sich in 24 Stunden auf einem Kreis mit 4260 km Radius um die Erdachse. Wie groß ist die Geschwindigkeit?
- Die Erde läuft in einem Jahr um die Sonne auf einer kreisähnlichen Bahn vom Radius 150 Millionen Kilometer. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit?

Historische π -Näherungen

Bestimme mit dem Taschenrechner Dezimalzahlen der angegebenen Näherungswerte für π und gib die Anzahl der richtigen Stellen an. Berechne jeweils den relativen Fehler auf Promille genau. Der relative Fehler ist der Quotient $\frac{\text{Näherung} - \text{wahrer Wert}}{\text{wahrer Wert}}$.

5. $\pi \approx 3 \frac{1}{5}$

In der französischen Artillerie verwendet man beim Zielen das ›millieme‹, es ist der Winkel, unter dem man einen Meter in 1 km Entfernung sieht. Man nimmt an, dass der Kreis mit Radius 1 km einen Umfang von 6400 m hat.

6. $\pi \approx 3 \frac{1}{8}$

Babylonischer Näherungswert aus dem 2. Jahrtausend v. Chr.

7. $\pi \approx \sqrt{10}$ BRAHMAGUPTA-Wert

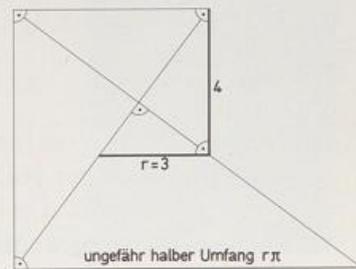
Schnelle Konstruktion als Hypotenusenlänge (Kathetenlänge 1 und 3)

8. $\pi^2 \approx g$

g ist hier nur die Maßzahl der Fallbeschleunigung: $g = 9,81$, praktischer Näherungswert in der Physik (Drehbewegungen)

9. $\pi \approx \left(\frac{4}{3}\right)^4$ Ägyptischer Wert aus dem Papyrus RHIND

Warum folgt aus der Konstruktion der angegebene Näherungswert für π ?



10. $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$ PLATON-Wert

Welcher Näherungswert (mit Wurzeln ohne Bruchstrich) ergibt sich für den Kehrwert von π ?

11. $\pi \approx \frac{4}{\sqrt{\tau}} = 2\sqrt{2\sqrt{5}-2}$ CHEOPS-Wert

Nimmt man an, dass die Seitenflächen der CHEOPS-Pyramide aus zwei halben Goldenen Rechtecken bestehen, dann ergibt sich der Näherungswert.

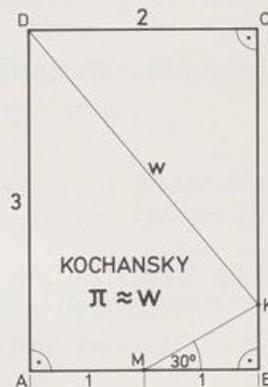
12. $\pi \approx \frac{22}{7}$ ARCHIMEDES-Wert

13. $\pi \approx \frac{20\sqrt{2}}{9}$ WARUSFEL-Wert (1961)

14. $\pi \approx \frac{3^\circ 8' 30''}{1^\circ}$ PTOLEMAIOS-Wert im 60iger System

• 15. $\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3}$ KOCHANSKY-Wert (1685)

Warum folgt aus der Konstruktion der angegebene Näherungswert für π ?



• 16. $\pi \approx \frac{6}{5}(2 + \sigma)$, $\sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Suche dafür eine möglichst einfache Konstruktion. (*Tip*: Goldener Schnitt)

17. $\pi \approx 1,8 + \sqrt{1,8}$ VIETE-Wert (16. Jh.)

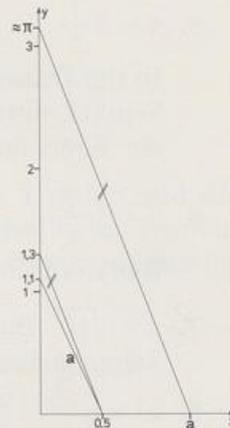
Zeige, dass dieser Wert der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 1,2 und 0,6 ist.

18. $\pi \approx 3,1416$

Indischer Wert aus dem 5. Jahrhundert

19. $\pi \approx \frac{13}{50} \sqrt{146}$

Warum folgt aus der Konstruktion der angegebene Näherungswert für π ?



20. $\pi \approx \frac{1}{8}(10 + \sqrt{229})$

Suche dafür eine möglichst einfache Konstruktion.
(*Tip*: $229 = 225 + 4$)

21. $\pi \approx \frac{355}{113}$

Chinesischer Wert (um 500 n. Chr.), Kettenbruchwert

Zeige, dass dieser Näherungswert gleich dem Kettenbruch k ist, wenn man den sehr kleinen Wert für $d \approx 1/292$ vernachlässigt.

Was ergibt sich, wenn du auch noch den Näherungswert für d berücksichtigst?

Kettenbruch $k = 3 + a$

$$a = \frac{1}{7 + b}$$

$$b = \frac{1}{15 + c}$$

$$c = \frac{1}{1 + d}$$

$$d = \dots$$

Zusammengefasst ergibt das

$$k = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + d}}}$$

22. Bestimme mit dem Taschenrechner die Näherungswerte für π , die sich ergeben, wenn man die Summen- bzw. Produktdarstellungen von VIETE, WALLIS, NEWTON, GREGORY und EULER von Seite 23 auswertet.

Aufgaben zu 2.2

1. Gib den Winkel im Bogenmaß an als Vielfaches von π und als Dezimalzahl mit zwei Dezimalen:

- a) 90° b) 15° c) 45° d) 30°
 e) 60° f) 1° g) 1988° h) -540°
 i) -2000° j) $(90^\circ)^2$ k) $\sqrt{100^\circ}$

2. Gib den Winkel auf $0,1^\circ$ genau an:

- a) 2 b) $22/7$ c) 0,8 d) 0,5 e) 10
 f) $-2 + \sqrt{3}$ g) $1 + 1^\circ$ h) $\frac{\pi + 180^\circ}{2\pi}$

3. Berechne die fehlenden Größen eines Kreissektors

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	5	5	5	5	5	5			
μ	1°	1	120°				1	45°	60°
b				1	5	π	1	1	$\pi/2$

4. Der Minutenzeiger der Turmuhr Big Ben ist 4,27 m lang, der Stundenzeiger 2,75 m. Welchen Weg legen die Zeigerspitzen zurück in 1 Sekunde, 1 Minute, 1 Stunde?



- 5. Der Umfang eines Kreises ist um 2 größer als der des einbeschriebenen Quadrats. Wie lang ist die Quadratseite?
6. a) Wie groß ist der Radius der Erde (des Mondes, der Sonne), wenn der Äquator ungefähr 40 000 km (10 900 km, 4 370 000 km) lang ist?
 b) Die Erdbahn ist ziemlich genau ein Kreis von $9,43 \cdot 10^8$ km Umfang. Wie weit ist also der erdnächste Stern von uns entfernt? Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit (in km/s) der Erde bei ihrem Lauf um die Sonne?
 c) Pluto, der äußerste Planet unsres Sonnensystems, bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 4,75 km/s in 248 Jahren einmal um die Sonne. Wie groß ist der Durchmesser unsres Sonnensystems?
- 7. Das Auge sieht zwei Punkte als einen, wenn der Sehwinkel kleiner als 1 Winkelminute ist. In welcher Entfernung scheinen sich die Schienen eines geraden Gleises zu schneiden, wenn der Schienenabstand 1435 mm ist?
8. Wie lang ist der Kreisbogen, den ein Bestimmungsdreieck aus dem Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks mit Radius 10 ausschneidet?
 a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 50$

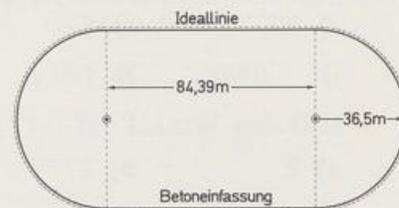
9. Zeichne die Punkte $A(0|0)$, $b(4|0)$ und $C(2|2\sqrt{3})$.

a) Welches besondere Dreieck ist ABC? (Begründung!)

b) Die drei Kreise um die Eckpunkte des Dreiecks mit $r = 4$ bilden ein Kreisbogendreieck. Berechne seinen Umfang.

10. RENNBAHN

Die Laufbahn in einem Leichtathletikstadion ist innen gewöhnlich von einer 5 cm breiten Betoneinfassung begrenzt. Gemessen bis zur Innenkante dieser Einfassung ist der Radius der Halbkreise 36,50 m, die sogenannten Geraden sind jeweils 84,39 m lang.



a) Wie weit von der Außenkante der Einfassung entfernt wird die Innenbahn vermessen, wenn sie 400 m lang ist?

b) Ein 10000-m-Läufer hält die Ideallinie ein, das heißt, er läuft genau 400 m pro Runde. Sein Freund läuft ständig neben ihm her in 1 m Abstand von der Ideallinie. Wie viel m läuft er mehr?

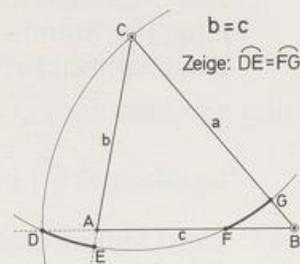
11. Zeichne die Kreise um $A(0|0)$ mit $r_1 = 4$ und um $B(2|2)$ mit $r_2 = 2\sqrt{2}$. Welchen Umfang hat die Schnittfläche der beiden Kreise?

• 12. BOGENGLEICH

a) Im Dreieck ABC ist $b = c < a$ und $\alpha < 90^\circ$.

Der Kreis um B mit Radius a schneidet AB in D, der Kreis um C mit Radius CD schneidet AC in E, AB in F und BC in G.

Zeige: Die Bögen DE und FG sind gleich lang.



b) Begründe: Die Aussage von a) gilt auch, wenn $b = c > a$ und $\alpha < 90^\circ$ ist.

c) Begründe: Die Aussage von a) gilt auch, wenn $b = c < a$ und $\alpha < 90^\circ$ ist.

d) Bei einem besonderen Dreieck fallen A und F zusammen. Gib die Besonderheit an (Winkel, Seitenverhältnisse!).

13. Ein Auto fährt 100 km. Welche Streckenlänge misst der Kilometerzähler, wenn der Durchmesser der Reifen wegen Abnutzung statt 50 cm nur 49,5 cm beträgt?

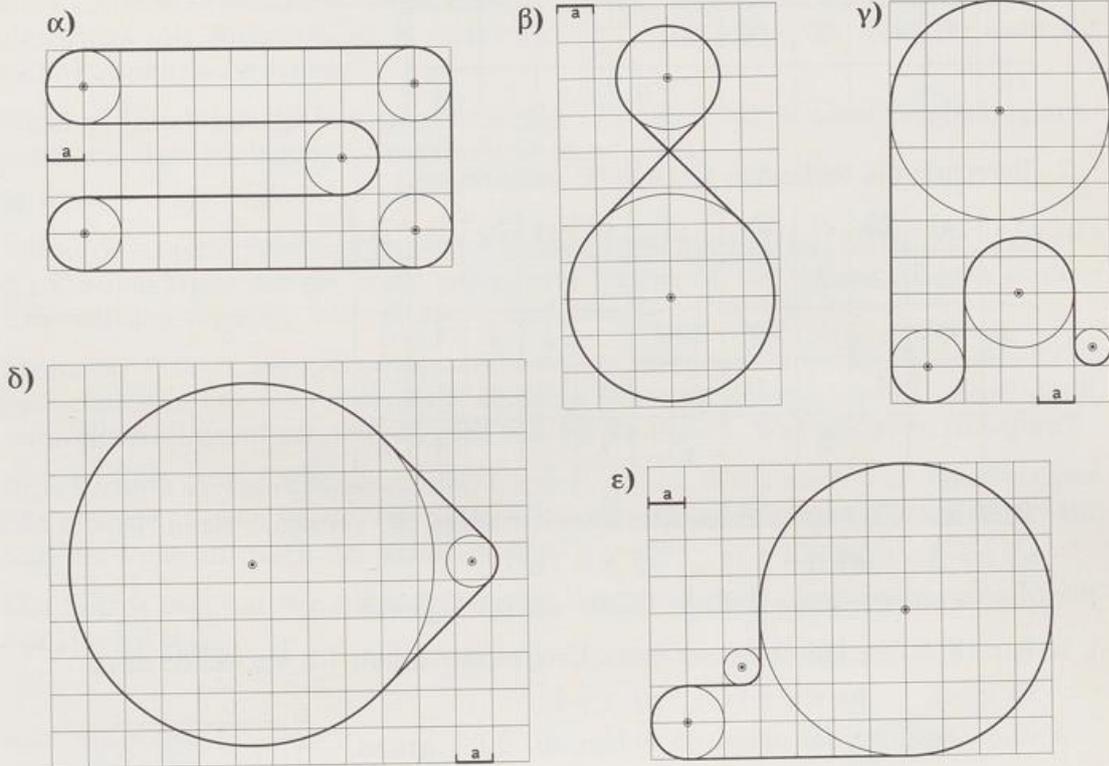
14. Welchen Umfang darf eine Tonne haben, damit sie durch eine 2 m breite Kellertür passt?

15. Zum Ausmessen krummer Wege auf Landkarten verwendet man Messrädchen. Wie groß muss der Raddurchmesser sein, wenn eine Umdrehung bei einem Maßstab 1 : 100 000 einem Kilometer entsprechen soll?

• 16. RIEMENTRIEB

In einem Quadratnetz mit Gitterkonstante a sind dünn Kreise gezeichnet: Jeder Kreis geht durch mindestens zwei Gitterpunkte oder berührt vier Gittergeraden. Die Kreise bedeuten Räder, die dick gezeichneten Kurven bedeuten Riemen oder Ketten.

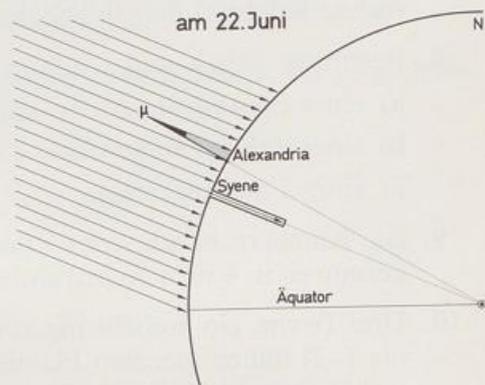
- a) Vergleichen mit dem größten Rad – wie viel mal so schnell dreht sich das kleinste Rad?
 b) Berechne die Riemenlänge abhängig von a .



17. ERDUMFANG

Der griechische Mathematiker ERATOSTHENES (Alexandria, 275 bis 194) hat den Erdumfang mit folgender Überlegung bestimmt: Wenn in Syene (heute Assuan) die Sonne zur Sommersonnenwende (höchster Sonnenstand) einen tiefen Brunnen genau ausleuchtet, also senkrecht über Syene steht, dann wirft eine Säule im 800 km nördlich gelegenen Alexandria einen Schatten. Nimmt man an, dass die Sonnenstrahlen parallel sind, dann folgt daraus, dass die Erdoberfläche krumm sein muss. Wenn ERATOSTHENES weiter annimmt, dass die Erde eine Kugel ist, dann kann er aus dem Winkel μ , den die Sonnenstrahlen und die Säule bilden, Umfang und Radius der Erdkugel bestimmen; für μ gibt er »ein Fünfzigstel von vier Rechten« an.

Welcher Wert ergibt sich für den Umfang, welcher für den Radius ($\pi \approx 22/7$)?



Aufgaben zu 2.3

1. Berechne die fehlenden Größen (F Kreisinhalt)

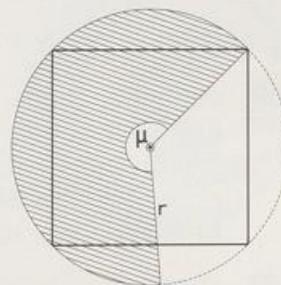
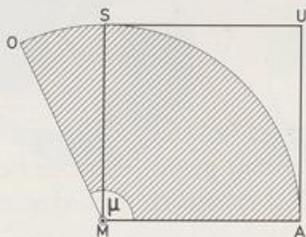
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	1	0,5	2	$\sqrt{5}$	π				
F						1	0,5	2	$\sqrt{5}$

2. Berechne die fehlenden Größen (F Sektorinhalt)

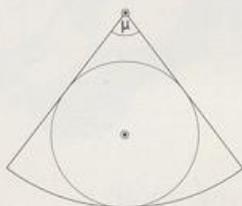
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)
r	2	2	2				1			
μ	45°			60°	120°		1	1	1	1
b		1		1		1		1		
F			2		$\sqrt{3}$	1			1	π

3. Berechne die Fläche eines Kreises mit Radius 10. Verwende dazu
 a) $\pi \approx 3$ b) $\pi \approx 3,14$ c) $\pi \approx 22/7$
 und bestimme den relativen Fehler auf 0,1 % genau.
4. Berechne den Durchmesser eines Kreises mit Inhalt 10. Verwende dazu
 a) $\pi \approx 3$ b) $\pi \approx 3,14$ c) $\pi \approx 22/7$
 und bestimme den relativen Fehler auf 0,1 % genau.
5. Der Inhalt eines Kreises mit Radius r ist ungefähr so groß wie der eines Quadrats mit der Diagonallänge 2,5 r. Berechne den relativen Fehler auf 0,1 % genau.
6. Wie verhalten sich die Inhalte von In- und Umkreis eines
 a) Quadrats?
 b) gleichseitigen Dreiecks?
7. Aus einer quadratischen Platte ($a = 31,5$ cm) soll jemand entweder einen Kreis oder vier kongruente Kreise so ausschneiden, dass möglichst wenig Abfall entsteht. Berechne jedesmal den Inhalt der Restflächen.
8. Bestimme Inhalt und Umfang
 a) eines Pfennigs
 b) einer Zehnpfennigmünze
 c) eines Fünfmarkstücks.
9. Ein Kamel tragt mit sechs Kilometer je Stunde durch die Wüste. Welche Kreisfläche könnte es in einem Achtstundentrag umrunden?
10. Drei Tische, ein kreisförmiger, ein quadratischer und ein rechteckiger (Seitenverhältnis 1 : 2) haben gleichen Flächeninhalt. Welcher hat den kleinsten Umfang, um wie viel Prozent sind die Umfänge der andern beiden größer?

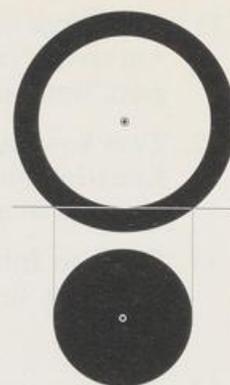
- 11. Eine Ziege ist an einem Pflock angeleint und weidet alles ab, was sie erreichen kann. Am ersten Tag ist die Leine 4 m lang. Um wie viel Meter muss man sie täglich verlängern, wenn die Ziege jeden Tag gleich viel Fläche abweidet?
12. Zwei konzentrische Kreise bilden einen **Kreisring**. Berechne Umfang und Inhalt des Kreisrings mit Außenradius R und Innenradius r . Gelten die Formeln auch für nicht konzentrische Kreise?
13. Welchen Inhalt hat der Kreisring zwischen Um- und Inkreis eines regelmäßigen n -Ecks, das dem Einheitskreis umschrieben ist, falls
 a) $n = 4$ b) $n = 3$ c) $n = 6$?
14. THUKYDIDES (griechischer Geschichtsschreiber 460 bis 400) hat behauptet, dass sich die Flächen kreisförmiger Inseln genauso verhielten wie die Zeiten, die man zu ihrer Umschiffung braucht. Was ist davon zu halten?
15. Leonardo PISANO, genannt FIBONACCI (italienischer Mathematiker 1180 bis 1240) hat behauptet: Die Spur eines Rads bei einer Umdrehung ist gleich dem Kreisinhalt, wenn die Auflagenbreite halb so groß wie der Radius ist. Was ist davon zu halten?
16. Eine Pizzeria verkauft Pizzen in drei Größen: 30 cm, 20 cm und 15 cm Durchmesser. Die kleinste kostet 6 Mark. Wie teuer sollten die andern (derselben Sorte) sein, wenn sich der Preis nur nach der Fläche richtet?
17. Der Sektor OMA hat denselben Inhalt wie das Quadrat $MAUS$. Berechne den Mittelpunktswinkel μ .



18. Wie groß ist bei einem Kreis mit Radius r der Mittelpunktswinkel μ eines Sektors, der denselben Inhalt hat wie das eingeschriebene Quadrat?
- 19. In einem Sektor mit Mittelpunktswinkel μ ist ein möglichst großer Kreis gezeichnet. Wie viel Prozent der Sektorfläche bedeckt die Kreisscheibe für
 a) $\mu = 90^\circ$ b) $\mu = 60^\circ$ c) $\mu = 120^\circ$ d) $\mu = 180^\circ$?

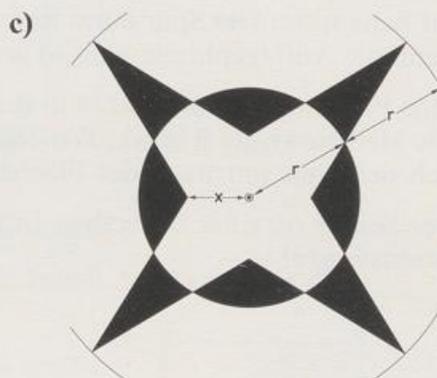
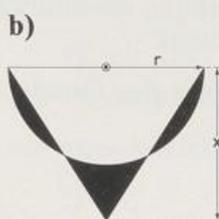
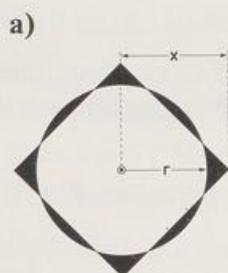


20. Zeige, dass die schwarze Kreisfläche und der schwarze Kreisring gleichen Inhalt haben.



- 21. DRAUSSEN = DRINNEN

Berechne x in Abhängigkeit von r so, dass die schwarzen Flächen außerhalb des Kreises denselben Inhalt haben wie die schwarzen Flächen innerhalb des Kreises.

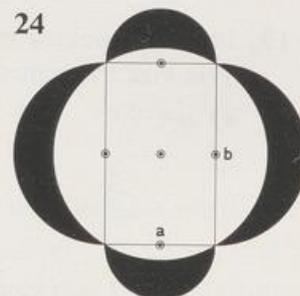
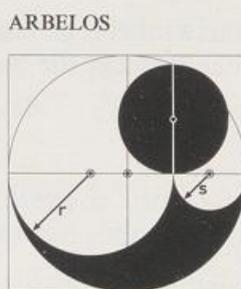
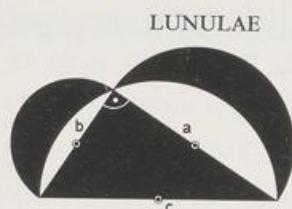


- 22. LUNULAE

Der Pythagoräer HIPPOKRATES von Chios (um 440 v. Chr.) ist bei der Suche nach der Quadratur des Kreises auf eine verblüffende Flächengleichheit gestoßen: Die beiden sichelförmigen Mönchchen (Lunulae) über den Katheten haben zusammen denselben Inhalt wie das rechtwinklige Dreieck. Beweise dies.

- 23. ARBELOS

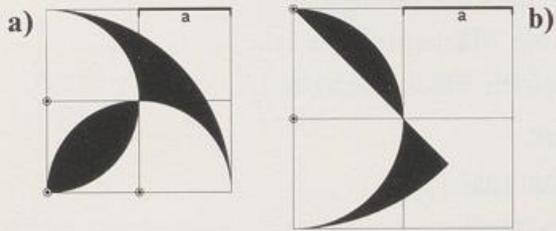
ARCHIMEDES hat gezeigt: Die schwarze, von drei Halbkreisen begrenzte Fläche (Arbelos = Schustermesser) hat denselben Inhalt wie die schwarze Kreisfläche. Zeige durch Rechnung die Flächengleichheit.



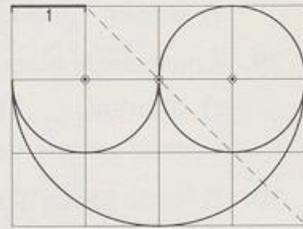
24. Berechne den Inhalt der schwarzen Fläche in Abhängigkeit von a und b .

25. FLÄCHENGLEICH

Zeige: Die beiden schwarzen Flächen haben jeweils gleichen Inhalt.



GEOBOLD



26. GEOBOLD

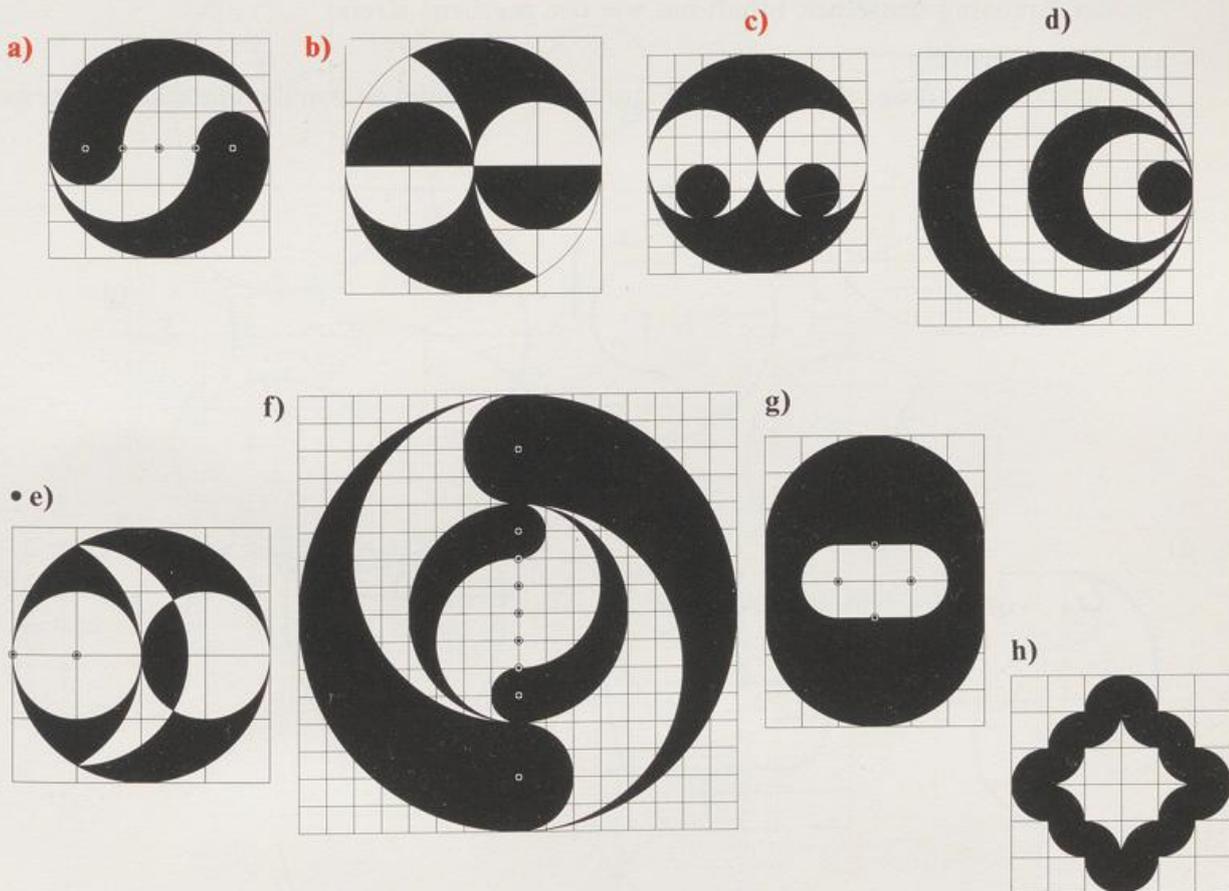
a) Berechne Inhalt und Umfang von Geobold.

b) Zeige, dass die gestrichelte Gerade den Geobold in zwei flächengleiche Teile zerlegt.

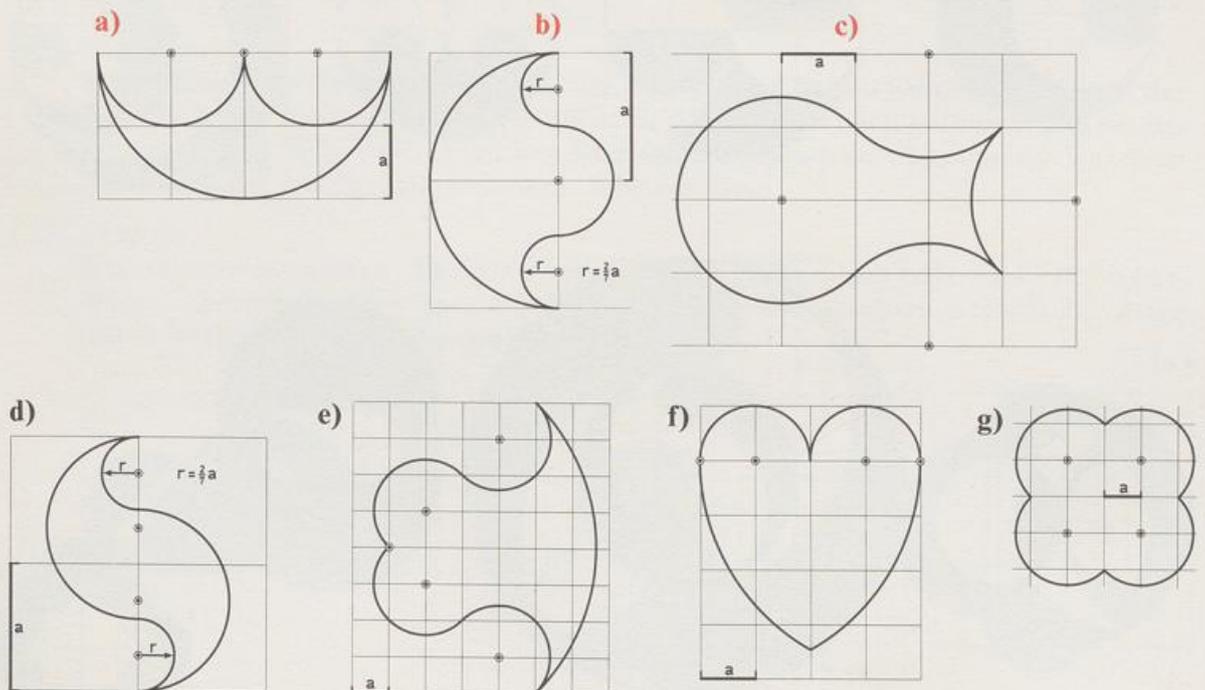
• c) Welche Gerade zerlegt den Geobold in zwei umfanggleiche Teile?

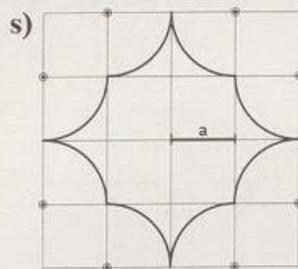
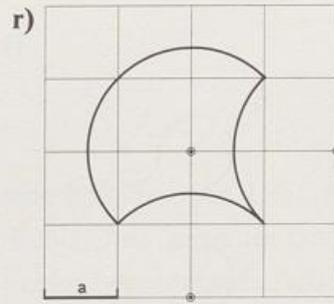
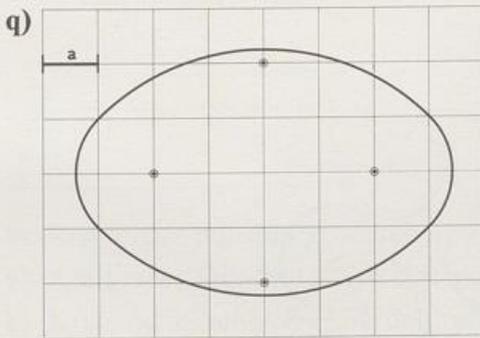
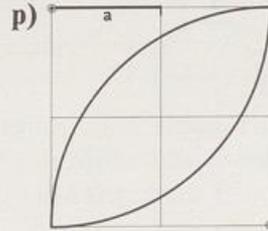
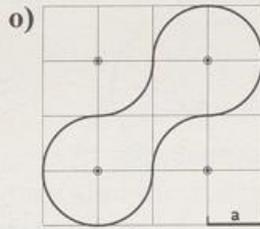
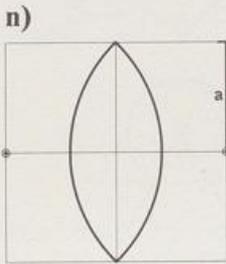
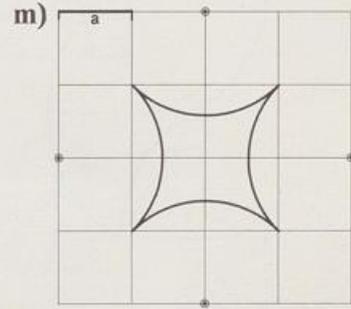
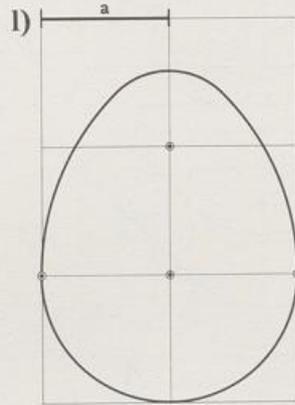
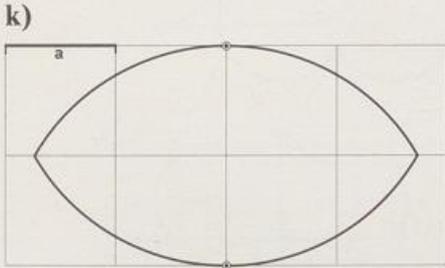
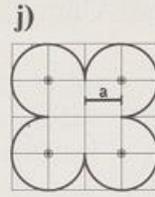
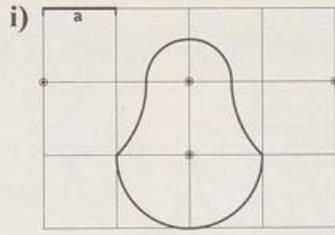
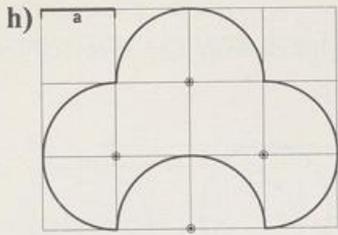
27. SCHWARZWEISS

Berechne den Inhalt der schwarzen Fläche in Abhängigkeit von der Gitterkonstante a (= Abstand zweier Nachbarparallelen im Gitter).



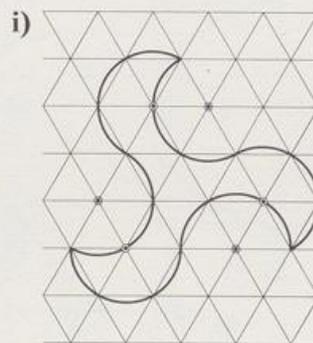
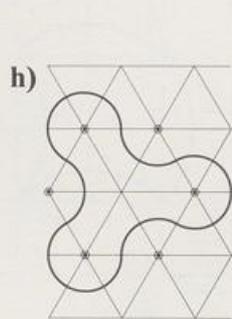
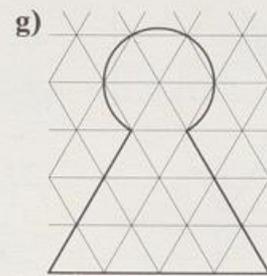
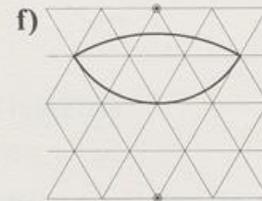
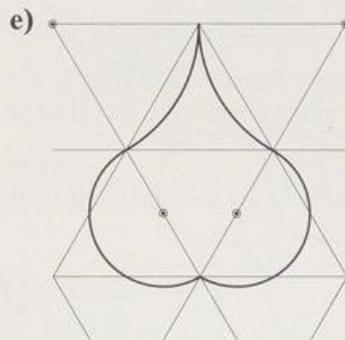
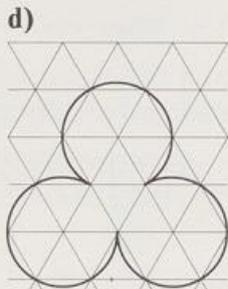
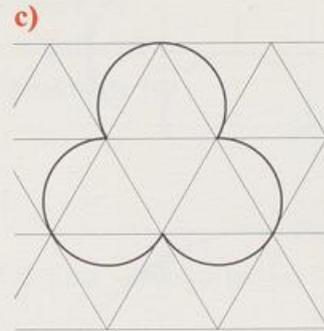
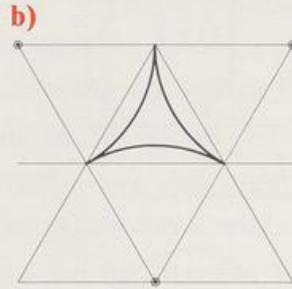
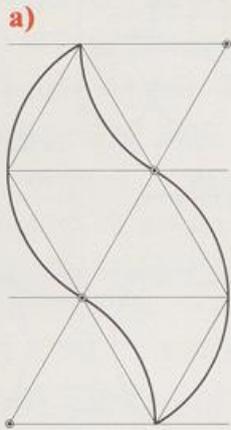
28. Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien 4 und 6. Konstruiere einen Kreis,
- dessen Umfang die Summe der beiden Umfänge ist
 - dessen Umfang die Differenz der beiden Umfänge ist
 - dessen Inhalt die Summe der beiden Flächeninhalte ist
 - dessen Inhalt die Differenz der beiden Flächeninhalte ist.
29. Konstruiere einen Kreis, dessen Inhalt
- dreimal
 - viermal
 - siebenmal
- so groß ist wie der eines gegebenen Kreises.
30. Zeichne einen Kreisring mit den Radien 3 und 5 und verwandle ihn in einen flächengleichen
- Kreis
 - Kreis Sektor mit Mittelpunktswinkel 60° .
31. Teile eine Kreisfläche mit konzentrischen Kreisen in
- zwei
 - drei
- flächengleiche Teile.
32. a) Verwandle einen Kreis in einen flächengleichen Halbkreis.
b) Verwandle einen Halbkreis in einen flächengleichen Kreis.
33. Zeichne einen Kreis mit $r = 4$ und konstruiere einen konzentrischen zweiten, sodass der Kreisring denselben Inhalt hat wie der gegebene Kreis.
34. QUADRATGITTER
Berechne Umfang und Inhalt der Figuren in Abhängigkeit von der Gitterkonstante a .





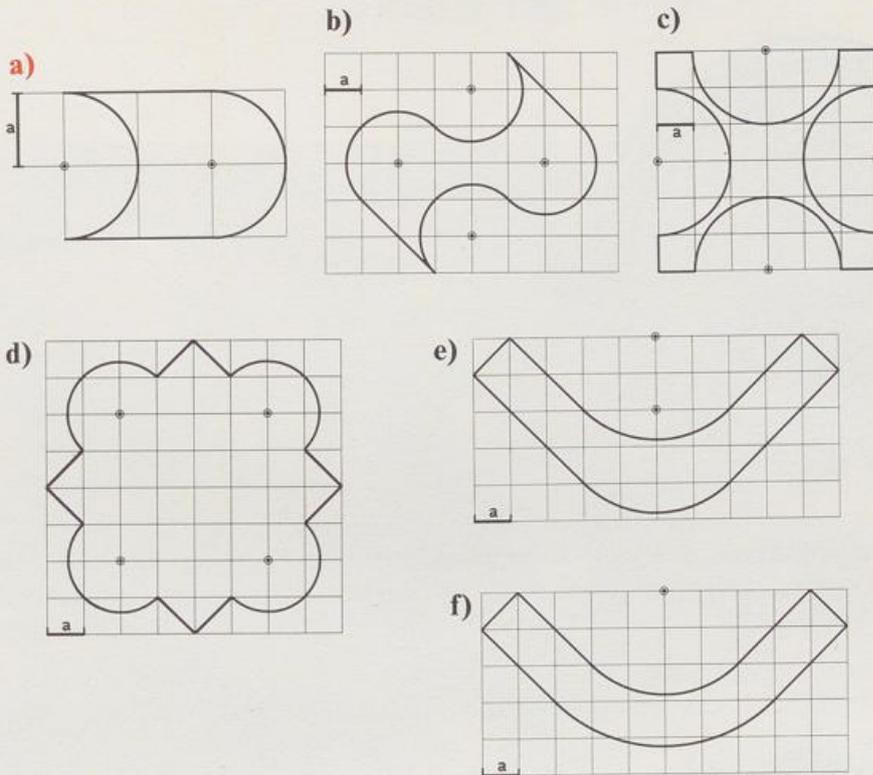
35. DREIECKGITTER

Berechne Umfang und Inhalt der Figuren in Abhängigkeit von der Dreieckseite a .

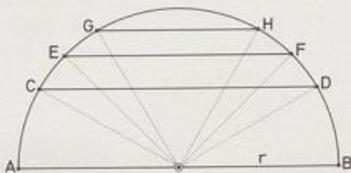


36. GERADEKRUMM

Berechne Umfang und Inhalt der Figuren in Abhängigkeit von der Gitterkonstante a .

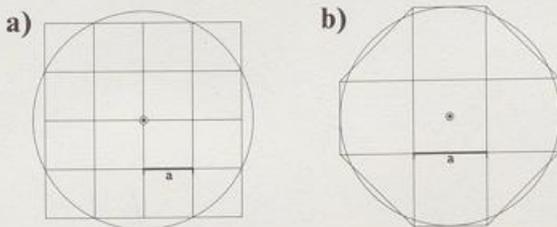


- 37. Drei zum Durchmesser $[AB]$ parallele Sehnen unterteilen einen Halbkreis in vier Flächenstücke. Die Sehnen sind die Seiten dem Kreis einbeschriebener regelmäßiger Drei-, Vier- und Sechsecke. Berechne Inhalt und Umfang jedes Flächenstücks.



38. Welche Figur hat den größeren Inhalt, welche den längeren Umfang:

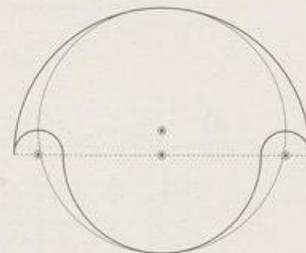
- a) Kreis oder Quadrat? Gib den relativen Fehler bezogen aufs Quadrat an.
 b) Kreis oder Achteck? Gib den relativen Fehler bezogen aufs Achteck an. (Ägyptische Kreisnäherung vor 4000 Jahren)



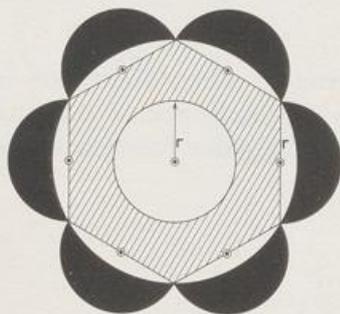
39. Die Figur ist aus lauter Halbkreisen zusammengesetzt, deren Mittelpunkte auf demselben Durchmesser liegen (vgl. Aufgabe 27 a). Wie viel Prozent der Kreisfläche sind schwarz?



SALINON



- 40. SALINON
Diese achsensymmetrische Figur, die aus vier Halbkreisen besteht, heißt Salinon (= Salzfass) von ARCHIMEDES. Mach's wie ARCHIMEDES und beweise, dass unabhängig von der Wahl der Radien das Salinon flächengleich ist dem Berührkreis.
- 41. DIE MUTTER VON ARCHIMEDES
Zeige: Der Inhalt der schwarzen Sichel ist gleich dem der schraffierten Mutter.

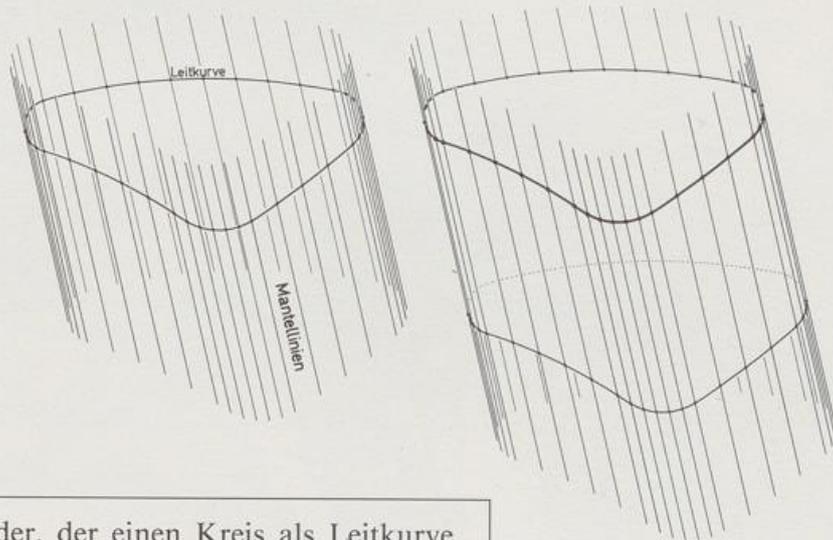


3. Kapitel Zylinder und Kegel



3.1 Der Zylinder

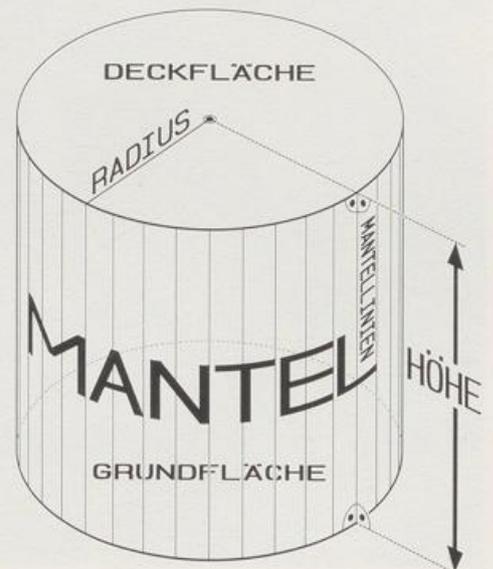
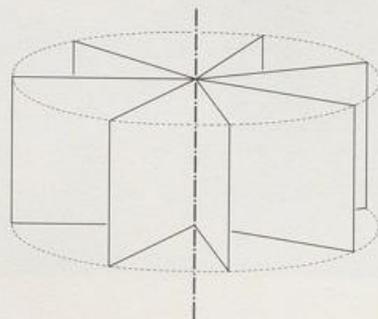
Neben dem Quader ist der Zylinder die häufigste regelmäßige Körperform in unserer Umwelt: Gaskessel, Litfaßsäulen, Münzen usw. In der Mathematik versteht man unter einem Zylinder einen Körper, der entsteht, wenn man eine Gerade parallel zu sich längs einer geschlossenen ebenen Kurve im Raum verschiebt; die Gerade darf nicht in der Ebene der Kurve liegen. Man kann sich auch vorstellen, dass das von der Kurve begrenzte Flächenstück parallel zu sich im Raum verschoben wird. Die ebene Kurve heißt **Leitkurve**, die Gerade heißt **Erzeugende** oder **Mantellinie** des Zylinders. Es gibt also unendlich viele verschiedene Zylinderformen. Wir definieren nur den einfachsten, aber wichtigsten Fall:



Definition

Ein Zylinder, der einen Kreis als Leitkurve hat und dessen Mantellinien senkrecht auf der Kreisfläche stehen, heißt **gerader Kreiszyylinder**.

Im Folgenden beschränken wir uns auf endliche gerade Kreiszyylinder, die von zwei parallelen Kreisflächen begrenzt sind, und nennen sie der Einfachheit halber kurz Zylinder. So ein Zylinder entsteht auch, wenn ein Rechteck um eine Seite als Drehachse rotiert.



Schaut man schräg auf den Zylinder, so sieht man Grund- und Deckfläche als Ellipse. Beim Zeichnen eines Schrägbilds muss man also die Kreise von Deck- und Grundfläche zu Ellipsen stauchen.

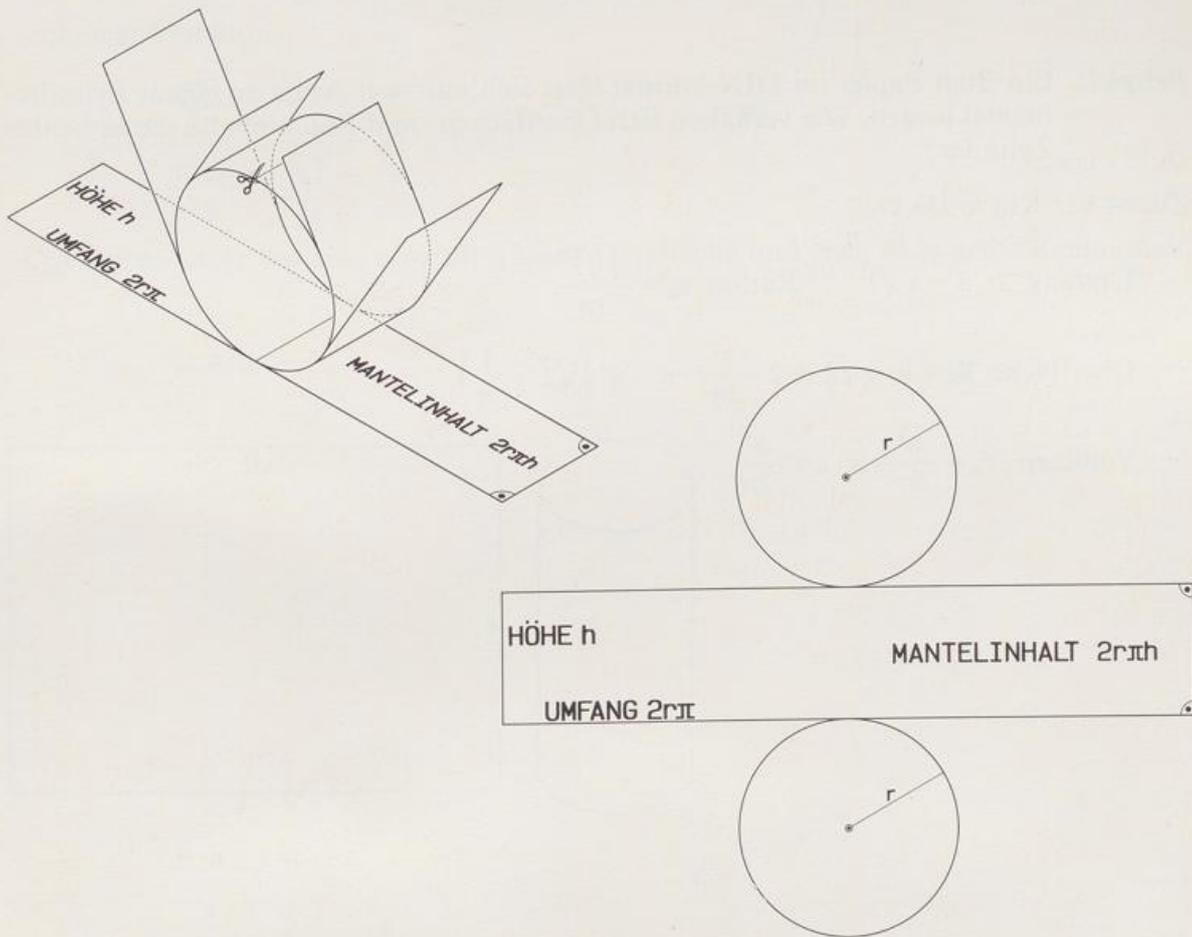
Bezeichnungen am Zylinder: D Deckfläche r Radius
 G Grundfläche h Höhe
 M Mantelfläche m Mantellinie
 S Oberfläche

Oberfläche

Schneidet man den Mantel längs einer Mantellinie auf, so lässt er sich zu einer Rechteckfläche aufbiegen. Die Rechteckseiten sind die Höhe h und der Grundkreisumfang $2r\pi$. Deshalb gilt für

Mantelinhalt $M = 2r\pi h$

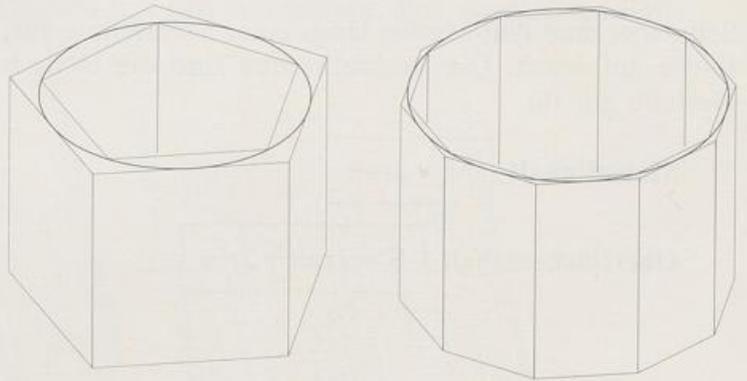
Oberflächeninhalt $S = 2r\pi h + 2r^2\pi$



Volumen

Den Kreisinhalt haben wir bestimmt, indem wir die Kreisfläche zwischen ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke eingesperrt haben. In ähnlicher Weise nähern wir den Zylinder durch ein- und umbeschriebene Prismen an. Die Prismen entstehen, wenn man Grund und Deckfläche des Zylinders durch ein- und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke ersetzt. Für alle diese Prismen gilt: **Volumen = Grundfläche mal Höhe**. Weil sich bei genügend großer Eckenzahl die Prismen beliebig wenig vom Zylinder unterscheiden, verwenden wir diese Formel auch für Zylinder:

Volumen $V = Gh = r^2\pi h$



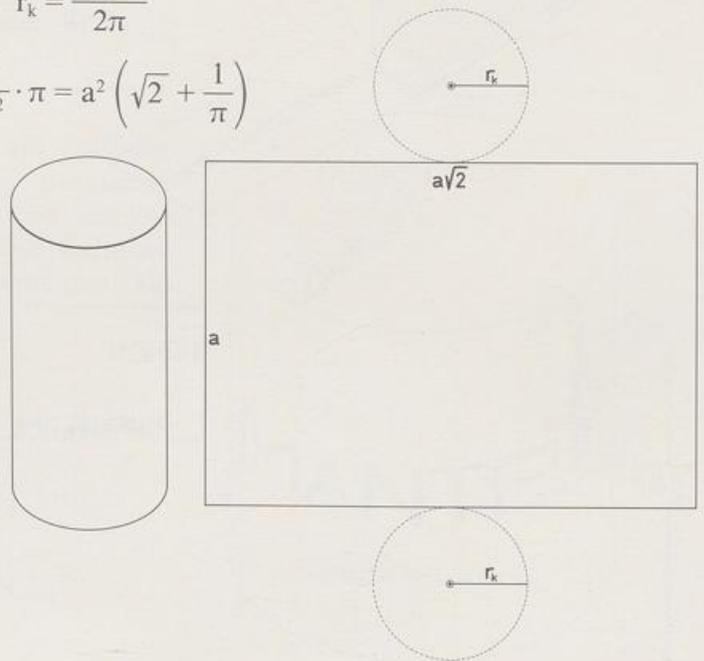
Beispiel: Ein Blatt Papier im DIN-Format lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylindermantel biegen. Wie verhalten sich Oberflächen- und Rauminhalte dieser beiden Zylinder?

Zuerst der Kurze-Dicke:

$$\text{Umfang } 2r_k\pi = a\sqrt{2} \quad \text{Radius } r_k = \frac{a\sqrt{2}}{2\pi}$$

$$\text{Oberfläche } S_k = a \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{2\pi^2} \cdot \pi = a^2 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\pi} \right)$$

$$\text{Volumen } V_k = \frac{a^2}{2\pi^2} \cdot \pi \cdot a = \frac{a^3}{2\pi}$$



Jetzt der Lange-Dünne:

$$\text{Umfang } 2r_1\pi = a \quad \text{Radius } r_1 = \frac{a}{2\pi}$$

$$\text{Oberfläche } S_1 = a \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot \pi = a^2 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2\pi} \right)$$

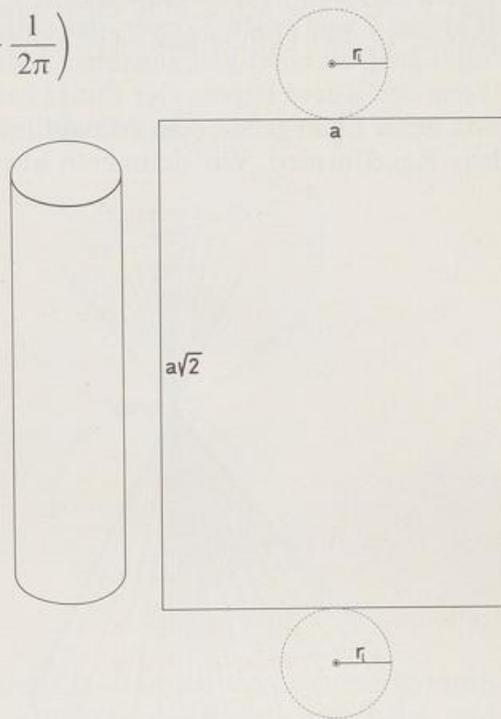
$$\text{Volumen } V_1 = \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot \pi a \sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4\pi}$$

Oberflächen-Verhältnis:

$$\frac{S_k}{S_1} = \frac{a^2 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\pi} \right)}{a^2 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2\pi} \right)} = \frac{2\pi\sqrt{2} + 2}{2\pi\sqrt{2} + 1} = 1,10\dots$$

Volumen-Verhältnis:

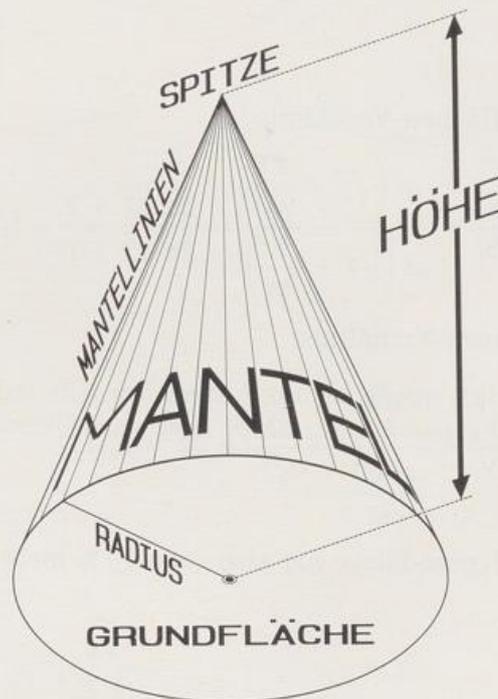
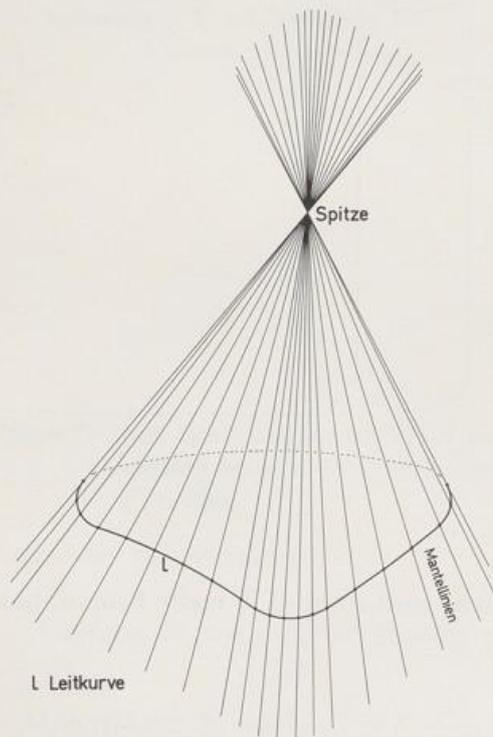
$$\frac{V_k}{V_1} = \frac{\frac{a^3}{2\pi}}{\frac{a^3 \sqrt{2}}{4\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,41\dots$$



Der Kurze-Dicke hat also etwa 10 % mehr Oberfläche und etwa 41 % mehr Rauminhalt.

3.2 Der Kegel

Kegelformen finden wir in der Baukunst als Turmdächer und sonst zum Beispiel bei Schul-, Eistüten, Kopfbedeckungen, Schüttkegel usw. In der Mathematik versteht man unter einem Kegel einen Körper, der entsteht, wenn man eine Gerade, die durch einen festen Punkt geht, an einer geschlossenen ebenen Kurve entlangführt; der Punkt darf nicht in der Ebene der Kurve liegen. Der Punkt heißt **Spitze**, die ebene Kurve heißt **Leitkurve**, die Gerade heißt **Erzeugende** oder **Mantellinie** des Kegels. Es gibt also unendlich viele verschiedene Kegelformen. Wir definieren nur den einfachsten, aber wichtigsten Fall:



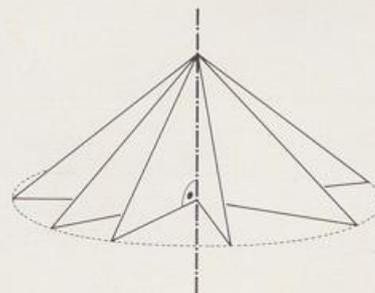
Definition

Ein Kegel, der einen Kreis als Leitkurve hat und bei dem die Spitze senkrecht überm Kreismittelpunkt liegt, heißt **gerader Kreiskegel**.

Im Folgenden beschränken wir uns auf endliche gerade Kreiskegel, die von einer Kreisfläche und der Spitze begrenzt sind, und nennen sie der Einfachheit halber kurz Kegel. So ein Kegel entsteht auch, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete als Drehachse rotiert.

Wie beim Zylinder erscheint auch hier im Schrägbild die Grundfläche als Ellipse.

Bezeichnungen am Kegel: G Grundfläche r Radius
 M Mantelfläche h Höhe
 S Oberfläche m Mantellinie



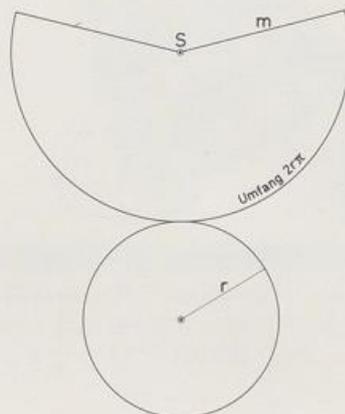
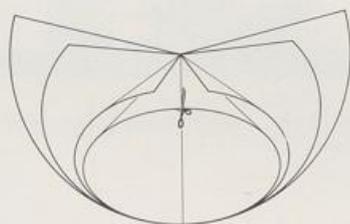
Oberfläche

Schneidet man den Mantel längs einer Mantellinie auf, so lässt er sich zu einer Kreissektorfläche aufbiegen: Die Mantellinie m wird zum Radius r des Sektors, der Umfang des Grundflächenkreises wird zur Bogenlänge b des Sektors. Im Bild sehen wir einen Kegel auf der Zeichenebene liegen; sein Mantel wird oben längs einer Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene aufgebogen.

Wegen $F_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Bogenlänge} \cdot \text{Sektorradius}$ gilt $M = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot m$.

Mantelinhalt $M = r\pi m$

Oberflächeninhalt $S = r\pi m + r^2\pi$

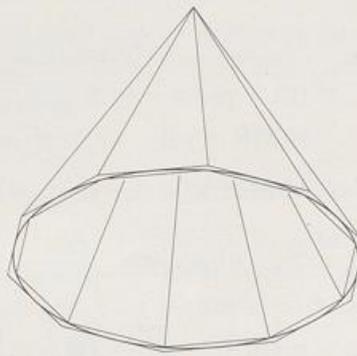
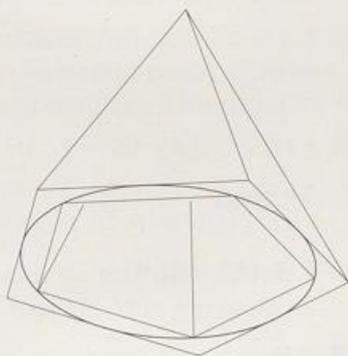


Volumen

Ähnlich wie beim Zylinder nähern wir den Kegel durch ein- und umbeschriebene Pyramiden an. Die Pyramiden entstehen, wenn man die Grundfläche des Kegels durch ein- und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke ersetzt. Für alle diese Pyramiden gilt:

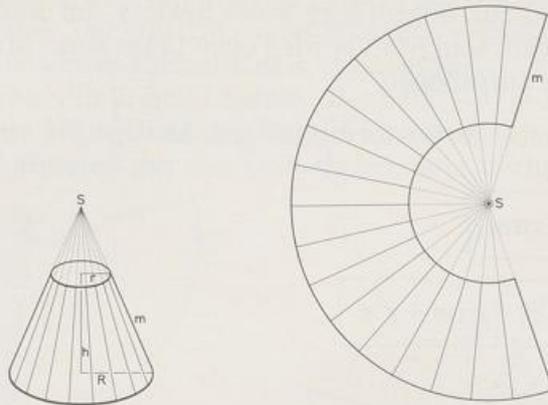
Volumen $= \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$. Weil sich bei genügend großer Eckenzahl die Pyramiden beliebig wenig vom Kegel unterscheiden, verwenden wir diese Formel auch für den Kegel:

Volumen $V = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} r^2\pi h$



Wir wenden die neuen Formeln an und berechnen Volumen und Mantelinhalt eines Kegelstumpfs. Ein **Kegelstumpf** entsteht, wenn man von einem Kegel einen Kegel abschneidet.

Die begrenzenden Kreisflächen mit den Radien R und r heißen Grund- und Deckfläche, ihr Abstand h heißt Höhe des Kegelstumpfs; die Mantellinien des Stumpfs sind die Reste der Mantellinien des ursprünglichen Kegels.



Volumen $V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{großer Kegel}} - V_{\text{kleiner Kegel}}$

$$= \frac{1}{3} R^2 \pi (h + x) - \frac{1}{3} r^2 \pi x$$

$$= \frac{1}{3} \pi (R^2 h + R^2 x - r^2 x)$$

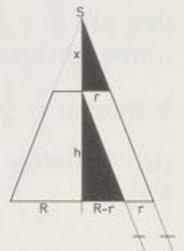
$$= \frac{1}{3} \pi (R^2 h + x(R^2 - r^2)) \quad (\diamond)$$

Aus der Ähnlichkeit der schwarzen Dreiecke folgt

$$\frac{x}{r} = \frac{h}{R-r}, \quad \text{also } x = \frac{hr}{R-r}, \quad \text{eingesetzt in } (\diamond) \text{ ergibt}$$

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{1}{3} \pi \left[R^2 h + \frac{hr}{R-r} (R^2 - r^2) \right]$$

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + rR + r^2)$$



Mantel $M_{\text{Stumpf}} = M_{\text{großer Kegel}} - M_{\text{kleiner Kegel}}$

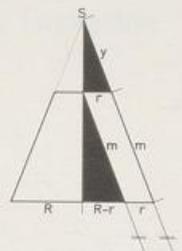
$$= (m + y) R \pi - y r \pi$$

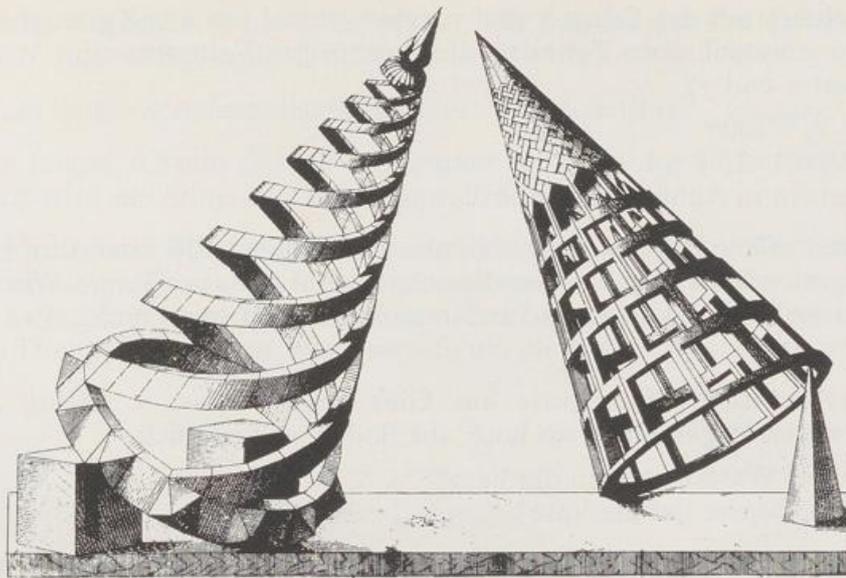
$$= \pi (mR + yR - yr) = \pi (mR + y(R-r)) \quad (\bullet)$$

Aus der Ähnlichkeit der schwarzen Dreiecke folgt

$$\frac{y}{r} = \frac{m}{R-r}, \quad \text{also } y = \frac{rm}{R-r}, \quad \text{eingesetzt in } (\bullet) \text{ ergibt}$$

$$M_{\text{Stumpf}} = \pi \left[mR + \frac{rm}{R-r} (R-r) \right] = \pi m (R+r)$$





Wenzel JAMNITZER, 1568, *Perspectiva Corporum Regularium*

Aufgaben zu 3.1

1. Berechne die fehlenden Stücke eines Zylinders

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	1	10	4	0,1					
h	2	10			5	0,4			
V			π		20π		20π	1	
S				π					2π
M						8π	20π	1	π

• 2. Ein Rechteck mit den Seiten x und y lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylinderzeugt so jedesmal einen Zylinder. Berechne die Verhältnisse der Volumina, der Mantelflächen und der Oberflächen dieser Zylinder.

a) $x = 10, y = 20$

b) $x : y = \sqrt{2}$

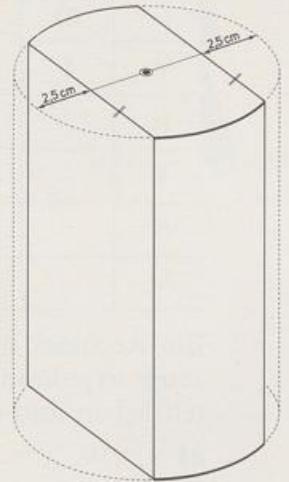
c) allgemein in Abhängigkeit von x und y

• 3. Ein Rechteck mit den Seiten x und y lässt sich auf zwei Arten zu einem Zylindermantel biegen. Wie verhalten sich Oberflächen und Rauminhalte dieser Zylinder

a) $x = 10, y = 20$ b) $x : y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

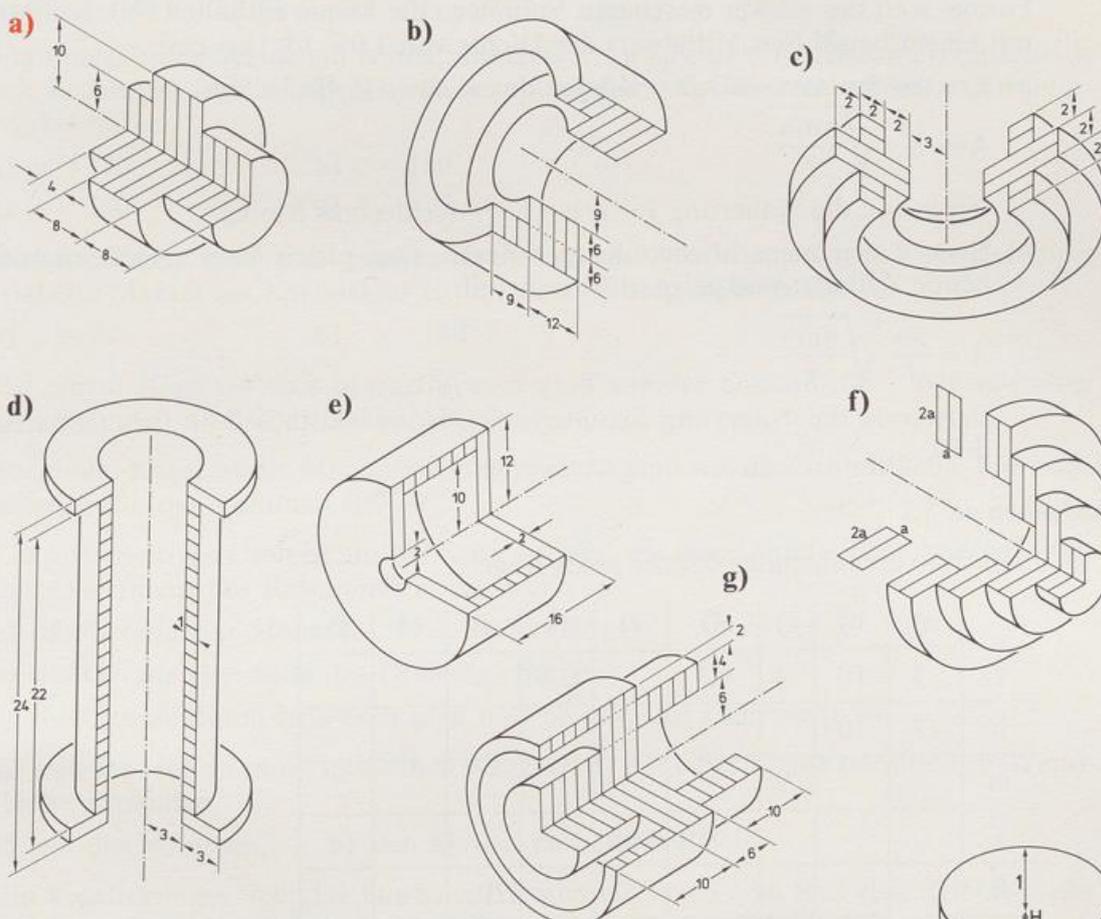
c) allgemein in Abhängigkeit von x und y ?

- 4. Ein Rechteck mit den Seiten x und y rotiert einmal um x und einmal um y und erzeugt so jedesmal einen Zylinder; die zugehörigen Volumina sind V_x und V_y . Wie groß sind x und y ?
 - a) $V_x = V_y = 100\pi$
 - b) $V_x : V_y = 1 : 2$, $y = 4$
 - c) allgemein in Abhängigkeit von V_x und V_y
- 5. Eine oben offene Regentonne aus dünnem Blech fasst 800 Liter, ihre Höhe ist doppelt so groß wie ihr Durchmesser. Berechne den Radius der Tonne. Wie viel kg Farbe braucht man, um sie innen und außen anzustreichen, wenn 0,1 kg etwa für 1 m^2 ausreicht?
- 6. Eine zylindrische Blumenvase aus Glas (Innenradius = 3,6 cm, Außenradius = 4,2 cm) ist insgesamt 30 cm hoch, ihr Boden ist 1 cm dick.
 - a) Wie viel Wasser passt in die Vase?
 - b) Welche Masse hat die Vase? ($\rho_{\text{Glas}} = 2,2 \text{ g/cm}^3$)
- 7. Berechne Volumen und Oberfläche des Zylinders, der einem Würfel mit der Kantenlänge a
 - a) einbeschrieben b) umbeschrieben ist.
- 8. Ein Würfel hat dieselbe Oberfläche wie ein Zylinder, dessen Durchmesser und Höhe gleich lang sind. Welcher Körper hat das größere Volumen? Um wie viel % ist sein Volumen größer?
- 9. Von einem Eisenzylinder ($r = 5 \text{ cm}$, $h = 15 \text{ cm}$) werden von der Rundung auf beiden Seiten 2,5 cm weggefeilt (im Bild gestrichelt).
 - a) Welche Oberfläche hat der Restkörper?
 - b) Welche Masse hat der Restkörper, welche haben die Feilspäne?
($\rho_{\text{Fe}} = 7,9 \text{ g/cm}^3$)



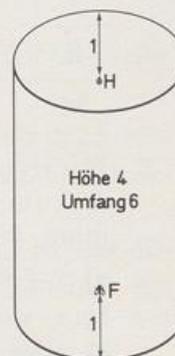
- 10. Ein Messzylinder hat einen Innendurchmesser von 25 mm. In welchem Abstand liegen die Teilstriche für 1 cm^3 ?
- 11. In einem Messzylinder mit der Wandstärke 2 mm stehen 500 cm^3 Wasser 25 cm hoch. Berechne den Innendurchmesser.
- 12. Durch einen Würfel bohrt jemand ein zylindrisches Loch parallel zu einer Kante. Wie verhalten sich Lochdurchmesser und Kantenlänge, wenn der Würfel dann nur noch halb so schwer ist?

13. Eine Rolle Kupferdraht hat 14 kg Masse. Wie lang ist der Draht, wenn er 1,8 mm dick ist? ($\rho_{\text{Cu}} = 8,8 \text{ g/cm}^3$)
14. Ein 30 cm langer Spaghetti hat 0,3 g Masse. Wie dick ist er? ($\rho_{\text{Spaghetti}} = 1,2 \text{ g/cm}^3$).
15. Ein 1 m langer, 0,5 mm dicker Kupferdraht soll mit 0,1 g Silber versilbert werden. Wie dick wird die Silberschicht? ($\rho_{\text{Ag}} = 10,5 \text{ g/cm}^3$).
16. Die Bilder zeigen Schnittbilder von Drehkörpern. Die Schnittebenen (schraffiert) schneiden sich rechtwinklig in der Symmetrieachse des Drehkörpers. Berechne Volumen und Oberfläche des Drehkörpers sowie den Inhalt der Fläche, die den Drehkörper erzeugt, wenn sie sich um die Symmetrieachse (gepunktstrichelt) dreht.



• 17. DUDENEYS Fliege

Von Englands größtem Rätselerfinder Henry Ernest DUDENEY stammt folgendes Fliegenproblem: Auf der Außenseite eines Glaszylinders sitzt eine Fliege F und will auf kürzestem Weg zum Honigtröpfen H krabbeln. Wie lang ist ihr Weg?



- 18. Schneide von einem zylindrischen Korken (Radius r) zwei kongruente Stücke so ab, dass der Rest als Stöpsel genau hineinpasst in ein Rohr mit
- kreisförmigem Querschnitt (Radius r),
 - quadratischem Querschnitt (Seite $2r$),
 - dreieckigem Querschnitt (gleichschenkelig, Basis = Höhe = $2r$).
- Wie schaut dieser Allzweckstöpsel aus? Welches Volumen hat er?

• 19. Oberfläche des Menschen

In der Medizin berechnet man die Oberfläche A eines Menschen mit der Formel $A = 71,84 \cdot m^{0,425} \cdot h^{0,425}$ von DUBOIS/DUBOIS aus dem Jahr 1916.

m ist die Masse in kg und h die Körperhöhe in cm, A ist die Oberfläche in cm^2 . Um eine einfachere Formel zu finden, ersetzt man den menschlichen Körper durch einfachere geometrische Körper mit gleichem Volumen und gleicher Höhe. Weil aber die Formel statt des schwer messbaren Volumens die Masse enthalten soll, rechnet man mit einem bewährten Mittelwert der Dichte von $1,05 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$.

- a) Ersetze den menschlichen Körper durch einen Zylinder und zeige:

$$A = \frac{16}{7} \sqrt{\frac{\pi m h}{r}}$$

Verwende die Näherung $1 + r/h \approx 8/7$ (schlechtes Modell).

- b) Ersetze den menschlichen Körper durch zwei gleich hohe nebeneinander stehende Zylinder und zeige, dass dann gilt

$$A = \frac{30}{7} \sqrt{\frac{\pi m h}{r}}$$

Verwende die Näherung Schulterbreite/Höhe = $4r/h \approx 2/7$ (brauchbares Modell).

Aufgaben zu 3.2

1. Berechne die fehlenden Stücke eines Kegels

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	5	10	4	0,3		0,4	2		
h	12	10			5				
m			5						2
V				$0,01\pi$	60π				
S							20π	3π	
M						$0,8\pi$		2π	2π

2. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x und y rotiert einmal um x und einmal um y und erzeugt so jedesmal einen Kegel. Berechne die Verhältnisse der Volumina, der Mantelflächen und der Oberflächen dieser Kegel.

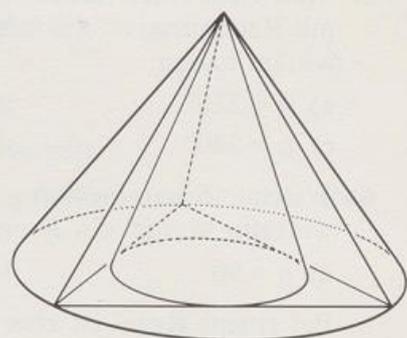
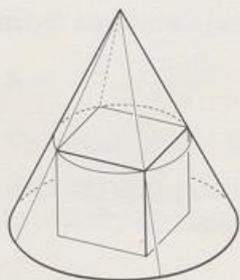
a) $x = 35, y = 84$

b) $x : y = \sqrt{2}$

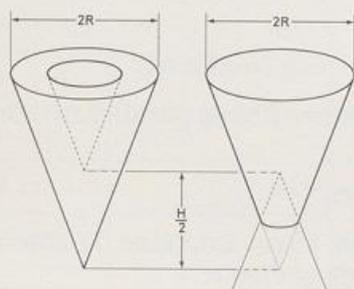
c) allgemein in Abhängigkeit von x und y

- 3. Man biegt einen Sektor mit Mittelpunktswinkel μ und dem Radius R zu einem Kegelmantel. Berechne das Kegelvolumen:
 - $\mu = 90^\circ$, $R = 1$ b) $\mu = 270^\circ$, $R = 1$
 - c) $\mu = 180^\circ$, $R = 1/\pi$ d) $\mu = 120^\circ$, $R = 3$
- 4. Eine Symmetrieebene eines Kegels schneidet aus ihm ein gleichschenkliges Dreieck aus. Der Winkel an der Spitze heißt **Öffnungswinkel** ω des Kegels. Entscheide mit Rechnung, ob die folgenden Kegel spitze, stumpfe oder rechtwinklige Öffnungswinkel haben.
 - a) $r = 1$, $m = \sqrt{2}$
 - b) $r = 1$, $h = \sqrt{3}$
 - c) $r = 12$, $m = 17$.
- 5. Man biegt einen Sektor mit Mittelpunktswinkel μ zu einem Kegelmantel. Entscheide mit Rechnung, ob die folgenden Kegel spitze, stumpfe oder rechtwinklige Öffnungswinkel haben.
 - a) $\mu = 270^\circ$ b) $\mu = 180^\circ$
 - c) $\mu = 240^\circ$ d) $\mu = \sqrt{2} \pi$
- 6. Welcher Zusammenhang besteht zwischen m und r bei einem Kegel, wenn der abgewinkelte Mantel ein Kreissektor ist mit dem Mittelpunktswinkel
 - a) $\mu = 90^\circ$ b) $\mu = 180^\circ$?
- 7. Bei einem Kegel ist eine Mantellinie so groß wie der Durchmesser. Wie verhalten sich Volumen und Oberfläche?
- 8. Bei einem Kegel ist die Mantelfläche doppelt so groß wie die Grundfläche. Wie hoch ist er, wenn das Volumen 100 ist?
- 9. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a rotiert um eine Gerade. Berechne Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn
 - a) die Gerade eine Höhe des Dreiecks enthält,
 - b) die Gerade eine Seite des Dreiecks enthält,
 - c) die Gerade durch eine Ecke geht und parallel zur Gegenseite ist.
- 10. In welcher Höhe x muss man einen Kegel (r , h) mit einer Ebene parallel zur Grundfläche schneiden,
 - a) um das Volumen, b) den Mantel zu halbieren?
- 11. Ein kegelförmiges Sektglas hat eine Trichtertiefe von 15 cm und eine Trichterweite von 6 cm. Ein vorsichtiger Gast möchte nur ein »halbes Glas«.
 - a) Der Gastgeber füllt das Glas bis zur halben Höhe. Wie viel Sekt trinkt der Gast?
 - b) Der Gastgeber macht das Glas halb voll. Wie hoch steht der Sekt, wie viel trinkt der Gast?
 - c) Der Gastgeber füllt das Glas, bis die Sekt»ober«fläche halb so groß ist wie die Kreisfläche, die der Glasrand bildet. Wie hoch steht der Sekt, wie viel trinkt der Gast?

12. Ein Kegel mit $m = 3r$ hat dieselbe Grundfläche wie ein anderer, größerer Kegel. Wie verhalten sich die Höhen, wenn
- der größere doppeltes Volumen hat,
 - der größere doppelte Mantelfläche hat,
 - der größere doppelte Oberfläche hat?
- 13. Ein Kegel mit $h = 4r$ und ein Zylinder haben gleiches Volumen und
- gleiche Höhe
 - kongruente Grundflächen.
- Berechne das Verhältnis der Mantelflächen und das der Oberflächen.
14. Einem Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h soll ein Würfel so einbeschrieben werden, dass der Würfel auf der Grundfläche des Kegels steht. Berechne die Kantenlänge k in Abhängigkeit von r und h .



15. Einem regelmäßigen Tetraeder der Kantenlänge k ist ein Kegel ein- und ein Kegel umbeschrieben. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte dieser Kegel?
16. Aus einem Kegel (R, H) wird ein konzentrischer Kegel (r, h) mit gleichem Öffnungswinkel so ausgebohrt, dass die Spitzen die Entfernung $s = H/2$ haben. Welches Volumen hat der Restkörper,



- wenn man von der Grundfläche zur Spitze bohrt,
 - wenn man von der Spitze zur Grundfläche bohrt?
17. Ein Kegel (r, h) wird längs seiner Achse um s verschoben. Welches Volumen überstreicht der Kegel,
- wenn $s = h$ ist,
 - $s = h/2$ ist?

- 18. Ein Kegel (R, H) wird zylindrisch (Zylinderradius r) so durchbohrt, dass Kegel- und Zylinderachse zusammenfallen.

a) Berechne das Volumen des Restkörpers.

b) Wie groß muß r sein, damit das Volumen des Restkörpers halb so groß ist wie das des Kegels?

19. Der **Böschungswinkel** eines Kegels ist der Winkel zwischen einer Mantellinie und der Grundfläche. Ein Schüttkegel entsteht, wenn man körniges Gut aufschüttet. Der Böschungswinkel von Kohle ist 45° , der von Getreide 30° . Der Grundkreisumfang eines Schüttkegels sei 12 m. Welches Volumen hat er wenn es

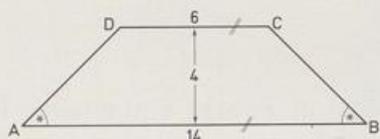
a) ein Kohlekegel b) ein Getreidekegel ist?

20. Das gleichschenklige Trapez ABCD rotiert um die Achse

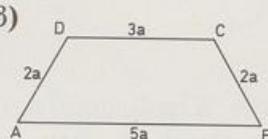
a) AB b) CD c) BC

Berechne Volumen und Oberfläche der Rotationskörper.

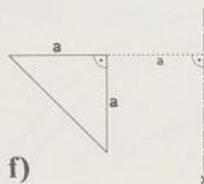
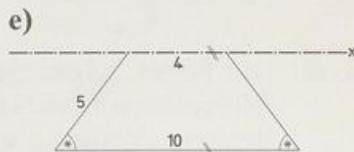
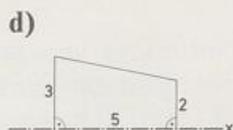
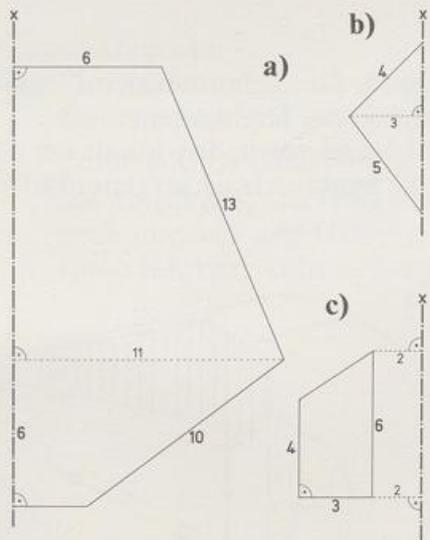
α)



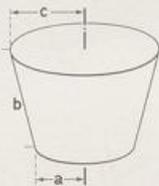
β)



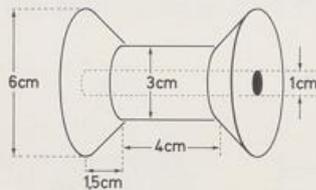
21. Die gezeichneten Vielecke rotieren um die Achse x . Berechne Volumen und Oberfläche der Rotationskörper.



22. Gib Volumen und Mantelfläche des Kegelstumpfs in Abhängigkeit von a, b und c an.



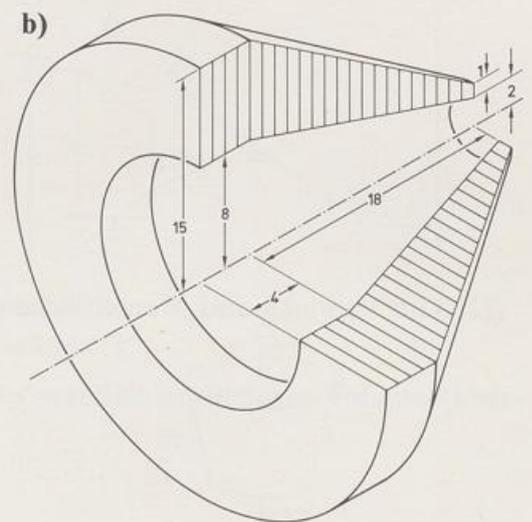
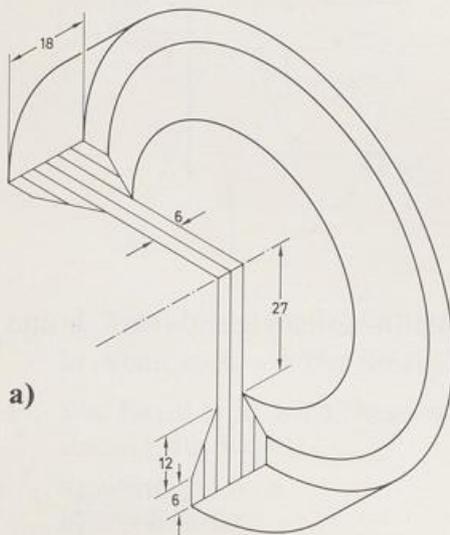
23. Ein Kegel (Mantellinie = Durchmesser) soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten werden, dass beide Teile gleiche Oberfläche haben. In welchem Verhältnis muss man die Mantellinie des Kegels teilen?
24. Ein Kessel von 500 Liter hat die Form eines Kegelstumpfs. Wie muss man seine Maße (auf cm gerundet) wählen, wenn gelten soll:
obere Weite : untere Weite : Tiefe = 4 : 2 : 3 ?
25. Ein 10 m langer Baumstamm hat die Form eines Kegelstumpfs. Berechne sein Volumen (auf dm^3 genau), wenn sein dickes Ende einen Umfang von 1,95 m hat, sein dünnes Ende einen von 1,64 m.
26. Berechne das Volumen der Garnrolle.

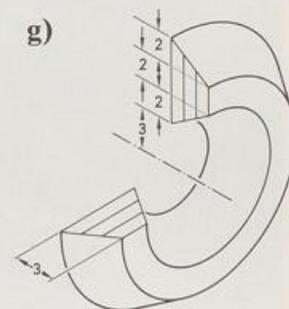
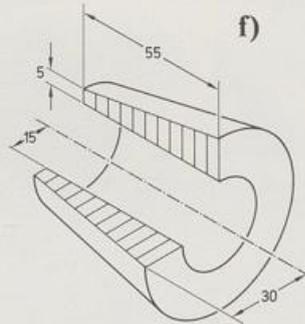
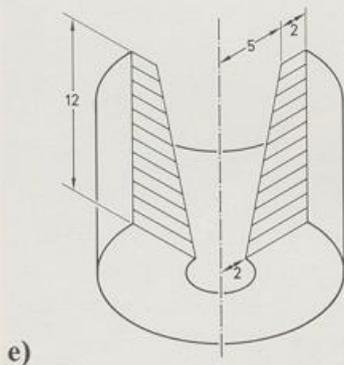
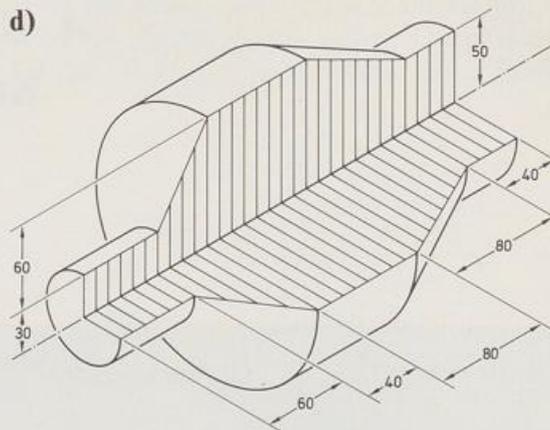
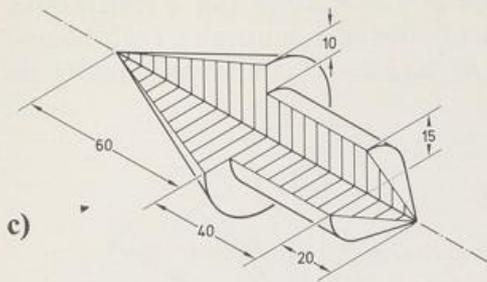


27. Das Volumen eines Kegelstumpfs ($r, R = 3r, h$) soll zwecks einfacherer Rechnung angenähert werden durch das Volumen eines gleich hohen Zylinders, dessen Radius das arithmetische Mittel der Kegelstumpfradien ist. Wie groß ist der prozentuale Fehler f ?

$$f = \frac{V_{\text{Kegelstumpf}} - V_{\text{Zylinder}}}{V_{\text{Kegelstumpf}}}$$

28. Die Bilder zeigen Schnittbilder von Drehkörpern. Die Schnittebenen (schraffiert) schneiden sich rechtwinklig in der Symmetrieachse des Drehkörpers. Berechne Volumen und Oberfläche eines Drehkörpers sowie den Inhalt der Fläche, die den Drehkörper erzeugt, wenn sie sich um die Symmetrieachse (gepunktstrichelt) dreht.

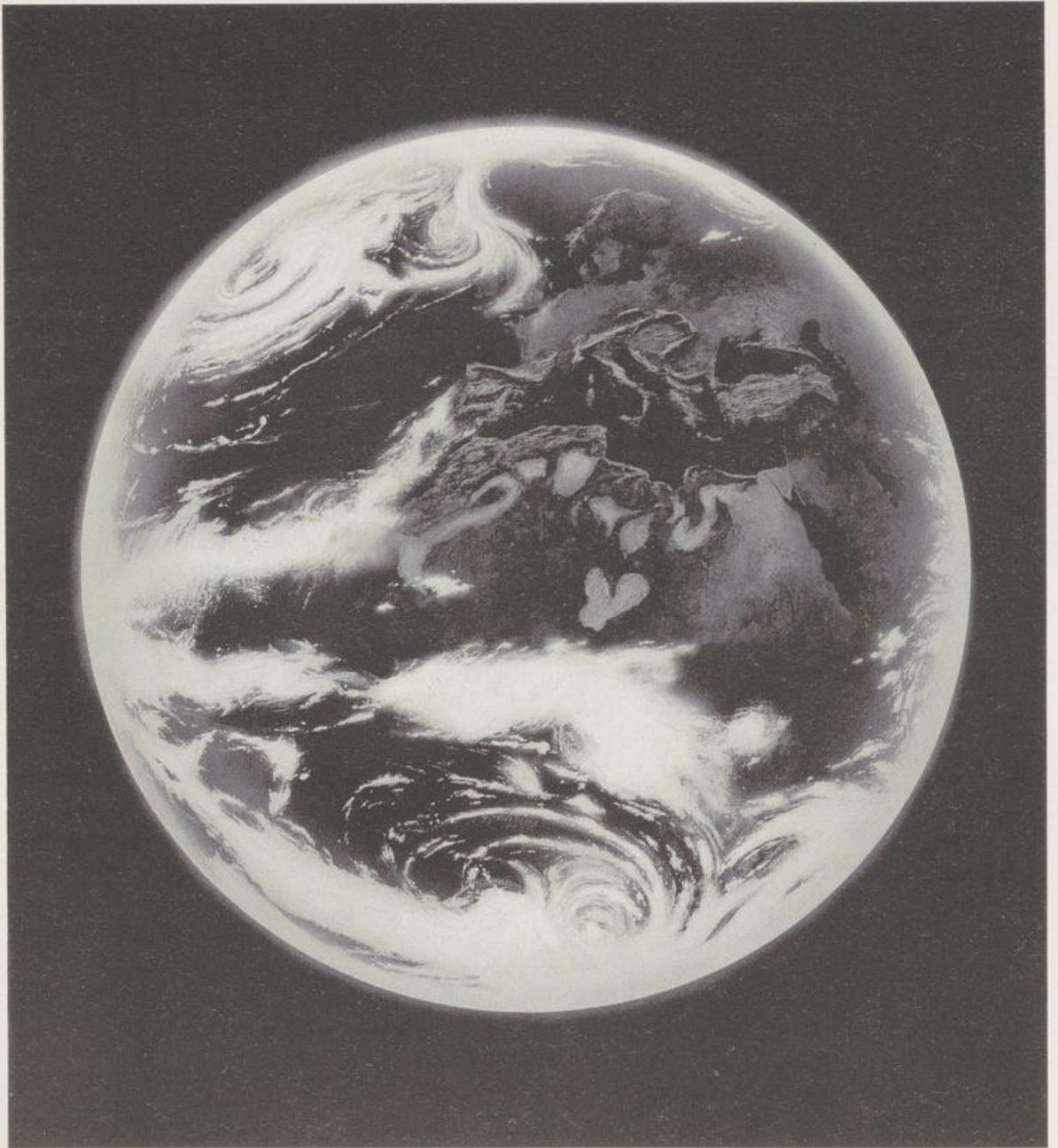




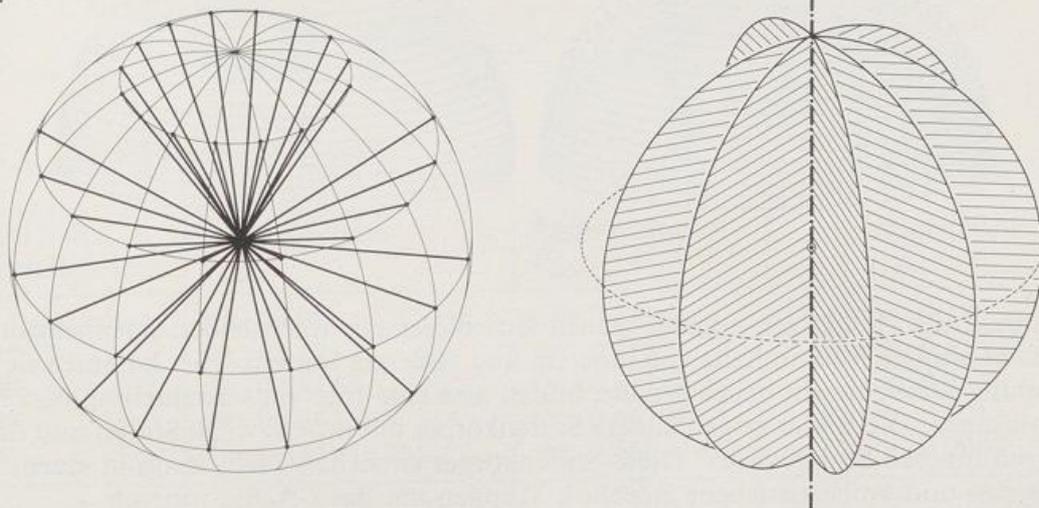
29. KÜRZESTER WEG

- a) Ein Mädchen (kleine Made!) sitzt auf einem zylindrischen Baum von 30 cm Durchmesser und will ihn umrunden. Wie lang ist der kürzeste Weg?
- b) Ein Mädchen (keine Made!) steht am Fuß eines kegelförmigen Hügel und will ihn umrunden. Der Weg soll um die Kegelachse führen. Der Hügel ist $10\sqrt{35}$ m hoch und hat den Umfang 20π m. Wie lang ist der kürzeste Weg? Auf welche Höhe führt er? Gibt es bei jedem Kegel einen solchen kürzesten Weg?

4. Kapitel Kugel



Eine Kugel k mit Mittelpunkt M und Radius r ist die Menge aller Punkte im Raum, die von M die Entfernung r haben. Sie entsteht, wenn ein Halbkreis um seinen Durchmesser als Drehachse rotiert. Die Kugel ist also eine Fläche im Raum, vergleichbar einer Seifenblase.

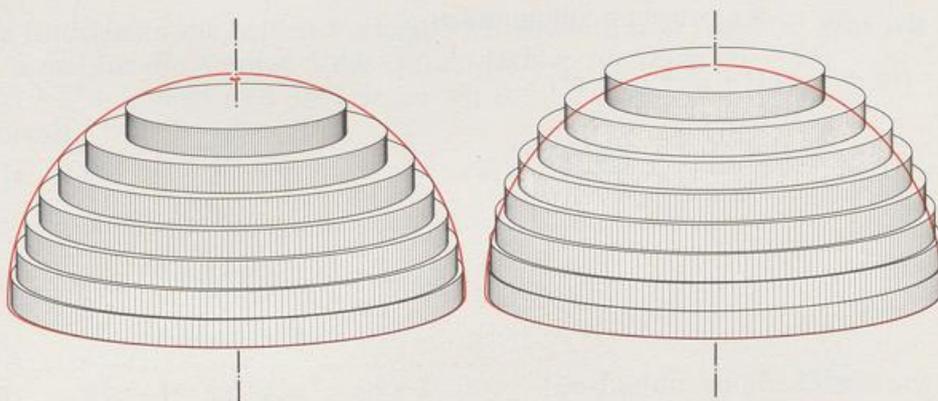


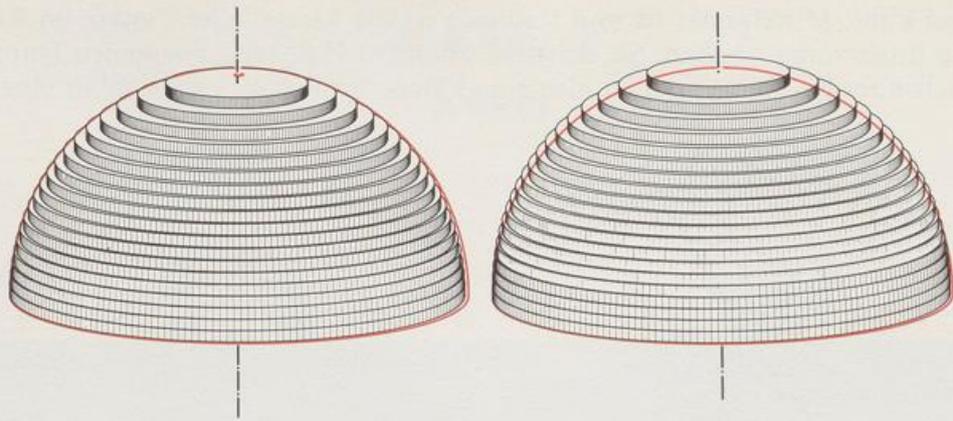
4.1 Volumen

Das Kugelvolumen zu berechnen, hat den alten Mathematikern einiges Kopfzerbrechen gemacht. EUKLID (um 300 v. Chr.) wusste zwar schon, dass sich die Inhalte zweier Kugeln so verhalten wie die dritten Potenzen ihrer Radien, aber die genaue Formel kannte er nicht. Etwa ein halbes Jahrhundert später ist es ARCHIMEDES (285 bis 212) gelungen, das Volumen einer Kugel zu bestimmen; er verwendete physikalische Überlegungen, nämlich das von ihm selber gefundene Hebelgesetz. Bevor wir seine Methode vorführen, suchen wir das Kugelvolumen zunächst mit rein mathematischen Mitteln.

Scheibenmethode

Wir schneiden eine Halbkugel mit Radius r parallel zum Grundkreis in gleichen Abständen r/n . Die Zylinderscheiben bilden zwei Stufenkörper: Der innere liegt ganz in der Halbkugel, er füllt sie um so besser, je größer die Anzahl der Scheiben ist – und der ä-





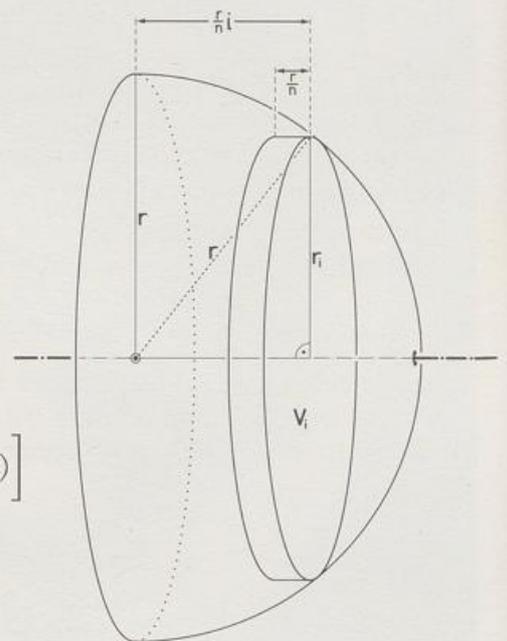
Bere enthält die Halbkugel, auch er gleicht sich dieser mit wachsender Scheibenzahl immer besser an. Die Rauminhalte von innerem und äußerem Stufenkörper kommen sich bei wachsender Scheibenzahl beliebig nahe, bilden also eine Intervallschachtelung fürs halbe Kugelvolumen. Die Bilder zeigen äußere Stufenkörper mit acht bzw. 20 Stufen und die zugehörigen inneren Stufenkörper. Diese Stufenkörper entstehen auch, wenn in einem Viertelkreis ein- und umbeschriebene Rechteck-Treppen um die x-Achse rotieren.

Volumen des inneren Stufenkörpers V_{innen}

Nach PYTHAGORAS ist $r_i^2 = r^2 - \left(i \cdot \frac{r}{n}\right)^2 = r^2 \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$

$$\begin{aligned}
 V_{\text{innen}} &= V_1 + V_2 + \dots + V_n \\
 &= r_1^2 \pi \cdot \frac{r}{n} + r_2^2 \pi \cdot \frac{r}{n} + \dots + r_n^2 \pi \cdot \frac{r}{n} \\
 &= r^2 \left(1 - \frac{1^2}{n^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} + r^2 \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} \\
 &\quad + \dots + r^2 \left(1 - \frac{n^2}{n^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} \\
 &= \frac{r^3 \pi}{n} \left[\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{= n \text{ (wegen } n \text{ Summanden)}} - \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \right] \\
 &= r^3 \pi - \frac{r^3 \pi}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)
 \end{aligned}$$

$$V_{\text{innen}} = r^3 \pi \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}\right) \quad (*)$$



Volumen des äußeren Stufenkörpers $V_{\text{außen}}$

Der äußere Stufenkörper unterscheidet sich um eine Scheibe von seinem kleineren Bruder, es ist der Zylinder überm Grundkreis der Halbkugel mit dem Volumen $V' = r^2\pi \cdot r/n = r^3\pi/n$.

$$V_{\text{außen}} = V_{\text{innen}} + V' = r^3\pi \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right) + \frac{r^3\pi}{n}$$

$$V_{\text{außen}} = r^3\pi \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} + \frac{1}{n} \right)$$

Anzahl n der äußeren Scheiben	Innenvolumen V_{innen}	Außenvolumen $V_{\text{außen}}$	Unterschied $V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$
8	$r^3\pi \cdot 0,601\dots$	$r^3\pi \cdot 0,726\dots$	$r^3\pi \cdot 0,125$
10	$r^3\pi \cdot 0,615$	$r^3\pi \cdot 0,715$	$r^3\pi \cdot 0,1$
100	$r^3\pi \cdot 0,66165$	$r^3\pi \cdot 0,67165$	$r^3\pi \cdot 0,01$
1000	$r^3\pi \cdot 0,6661665$	$r^3\pi \cdot 0,6671665$	$r^3\pi \cdot 0,001$
10000	$r^3\pi \cdot 0,666616665$	$r^3\pi \cdot 0,666716665$	$r^3\pi \cdot 0,0001$
n	$r^3\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right)$	$r^3\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right)$	$\frac{r^3\pi}{n}$

Die Werte in den ersten fünf Zeilen der Tabelle lassen vermuten, dass das Volumen der Halbkugel $r^3\pi \cdot 0,6 = r^3\pi \cdot \frac{2}{3}$ ist. Letzte Sicherheit geben uns die Formeln fürs Innen- und Außenvolumen in der letzten Zeile: Wächst n über alle Grenzen, dann unterscheiden sich in jeder Formel die beiden von n abhängigen Brüche beliebig wenig von 0, das Halbkugelvolumen wird immer mehr in die Enge ($= r^3\pi/n$) getrieben

$$r^3\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right) < V_{\text{Halbkugel}} < r^3\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right)$$

und unterscheidet sich immer weniger vom Wert $r^3\pi \cdot \frac{2}{3}$. Eine Kugel mit Radius r hat deshalb das Volumen

$$K_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} r^3\pi$$

Doch wie findet man die beiden Formeln? Mit Geduld und Algebra! Was wir brauchen, ist eine Formel für die Summe S der Quadratzahlen im Term (*):

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ und die kriegen wir so:

In die Formel

$$a^3 - (a-1)^3 = 3a^2 - 3a + 1$$

setzen wir der Reihe nach für a die Zahlen 1, 2, 3, ..., n ein:

$$a = 1: \quad 1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$a = 2: \quad 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$a = 3: \quad 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

$$\dots$$

$$a = n: \quad n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

und addieren alle Gleichungen.

Auf der linken Seite fallen bis auf n^3 alle Potenzen (Differenzen!) raus

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$n^3 = \quad \quad \quad 3S \quad \quad \quad - \quad \quad \quad 3S' \quad \quad \quad + n \quad (\spadesuit)$$

die erste Klammer enthält die Summe S der Quadratzahlen, die zweite die Summe S' der natürlichen Zahlen. S' findet man schnell mit dem Vorwärts-Rückwärts-Trick:

$$\begin{array}{r} \text{vorwärts: } S' = \quad 1 + \quad 2 + \quad 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ \text{rückwärts: } S' = \quad n + (n-1) + (n-2) + \dots + \quad 3 + \quad 2 + 1 \\ \hline 2S' = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1) = n(n+1) \\ S' = \frac{1}{2}n(n+1) \end{array}$$

Gleichung (\spadesuit) nach S auflösen: $S = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + S'$

$$S = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n(n+1)$$

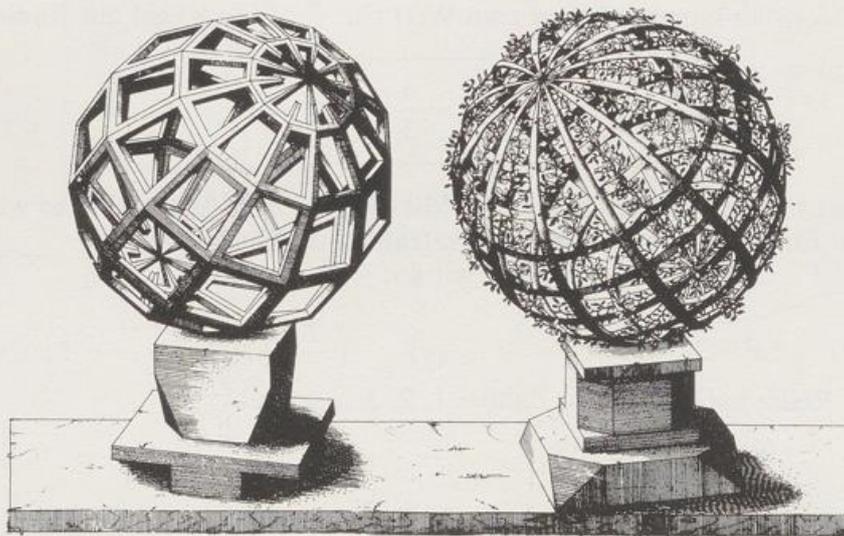
$$S = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$V_{\text{innen}} = r^3\pi \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right)$$

den Zähler ersetzen wir durch den Term von S

$$V_{\text{innen}} = r^3\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}{n^3} \right) = r^3\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right)$$

$$V_{\text{außen}} = V_{\text{innen}} + \frac{r^3\pi}{n} = r^3\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n} \right) = r^3\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right)$$



Wenzel JAMNITZER, 1568, Perspektiva Corporum Regularium

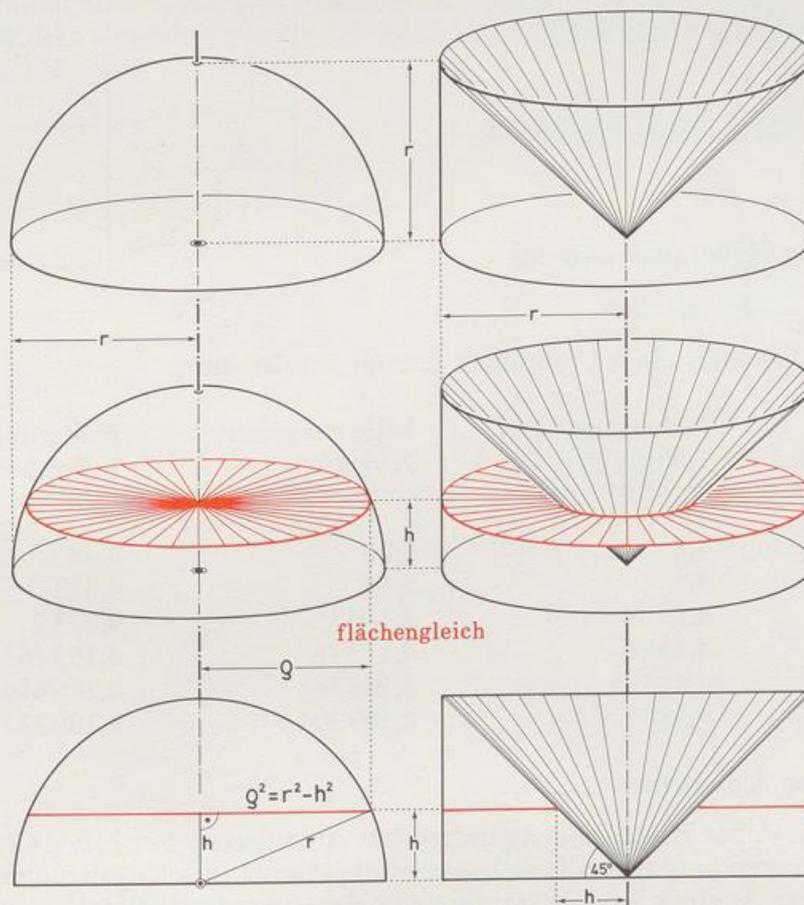
Körpervergleich nach SEGNER

Der deutsche Mathematiker und Physiker Johann Andreas von SEGNER (Preßburg 9.10.1704 bis 5.10.1777 Halle) hat 1747 einen Weg zur Bestimmung des Kugelvolumens beschrieben. SEGNER wandelt zwar in Archimedes' Spuren, doch sein Weg ist leichter verständlich. In seinem Buch »Vorlesungen über Rechenkunst und Geometrie« vergleicht er eine Halbkugel (Radius r) mit einem kegelförmig ausgebohrten Zylinder (Radius r , Höhe r). Er stellt die beiden Körper wie im Bild nebeneinander und schneidet sie in gleicher Höhe h mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen. Bei der Halbkugel ergibt sich als Schnittfigur ein Kreis (Radius q) vom Inhalt $q^2\pi = (r^2 - h^2)\pi$ und beim ausgebohrten Zylinder ein konzentrischer Kreisring (Radien r und h) vom Inhalt $r^2\pi - h^2\pi$. Die beiden Schnittfiguren sind in jeder Höhe flächengleich. Denkt man sich beide Körper aus dünnen Scheiben aufgebaut, dann haben zwei Scheiben in gleicher Höhe auch gleiches Volumen. Folglich haben Halbkugel und ausgebohrter Zylinder denselben Rauminhalt (Prinzip von CAVALIERI).

$$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}$$

$$\frac{1}{2} V_{\text{Kugel}} = r^2\pi \cdot r - \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r = \frac{2}{3} r^3\pi$$

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} r^3\pi$$



Zufallspunkte (Monte-Carlo-Methode)

Mit einem Computer erzeugen wir Tripel $(x|y|z)$ von Zufallszahlen zwischen -1 und 1 und deuten sie als Punktkoordinaten. Solche Zufallspunkte liegen in einem Würfel der Kantenlänge 2 , der Ursprung ist der Mittelpunkt des Würfels. Wenn $e^2 = x^2 + y^2 + z^2$ das Entfernungsquadrat Punkt-Ursprung ist, dann liegen Punkte mit $e \leq 1$ in oder auf der Kugel. Weil der Zufall auf lange Sicht keine Gegend im Würfel bevorzugt, verhält sich die Anzahl k der Punkte innerhalb der Kugel zur Gesamtanzahl n der Punkte im Würfel annähernd wie das Volumen der Einheitskugel zum Würfelvolumen:

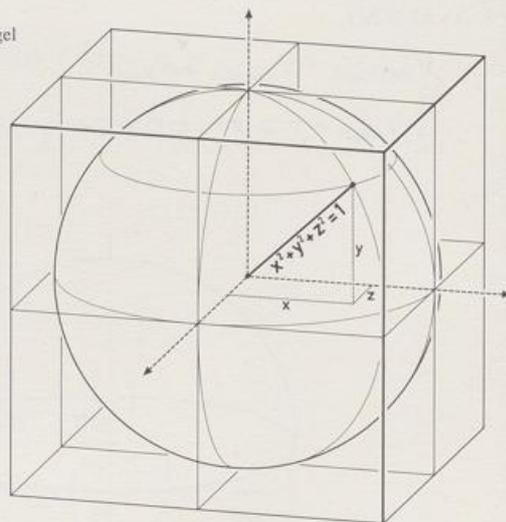
$$\frac{V_{\text{Einheitskugel}}}{V_{\text{Würfel}}} \approx \frac{k}{n}, \quad V_{\text{Würfel}} = 8, \quad \text{also} \quad V_{\text{Einheitskugel}} \approx 8 \cdot \frac{k}{n}$$

Weil alle Kugeln ähnlich sind, gilt fürs Volumen V_{Kugel} einer Kugel mit Radius r

$$\frac{V_{\text{Kugel}}}{V_{\text{Einheitskugel}}} = \frac{r^3}{1^3}, \quad \text{das heißt} \quad V_{\text{Kugel}} = r^3 V_{\text{Einheitskugel}}$$

Von den beiden Verfahren (Scheiben- und SEGNER-Methode) kennen wir schon den exakten Wert für $V_{\text{Einheitskugel}}$:

$$V_{\text{Einheitskugel}} = \frac{4}{3}\pi = 4,188\,790\,204\,7\dots$$



Die Tabelle zeigt Näherungswerte für

$$V_{\text{Einheitskugel}} \approx 8 \cdot \frac{k}{n}, \quad \text{die mit dem}$$

Zufallszahlen-Generator eines Computers erzeugt worden sind.

Anzahl n der Punkte im Würfel	Näherungswert 1. Versuch	Näherungswert 2. Versuch	Näherungswert 3. Versuch
10	5,6	4	3,2
100	4,8	4,56	4,48
1 000	4,2	4,16	4,312
10 000	4,177 4	4,140 8	4,223 2
100 000	4,195 68	4,177 76	4,193 76
1 000 000	4,193 48	4,188 568	4,186 616
10 000 000	4,188 726 4	4,189 304 8	4,189 222 4

Die Methode von ARCHIMEDES

In seinem Buch »Über Kugel und Zylinder« hat ARCHIMEDES um 250 v. Chr. durch eine ausgeklügelte Anwendung seines Hebelgesetzes die Formel fürs Kugelvolumen hergeleitet. Der Durchmesser $2r$ eines Kreises ist die Seite eines Quadrats. Ein Lot auf dem Kreisdurchmesser schneidet den Kreis und die Diagonale des Quadrats. Es gilt

$$x^2 + y^2 = s^2 \quad (\text{PYTHAGORAS})$$

$$s^2 = 2rx \quad (\text{EUKLID})$$

also $x^2 + y^2 = 2rx \quad || \cdot 2\pi$

$$(x^2\pi + y^2\pi) \cdot 2r = (2r)^2\pi \cdot x \quad (\blacksquare)$$

Rotiert die Figur um den Durchmesser, so entstehen ein Zylinder, ein Kegel und eine Kugel.

$(2r)^2\pi$ ist der Inhalt eines Zylinderkreises,

$x^2\pi$ ist der Inhalt eines Kegelkreises,

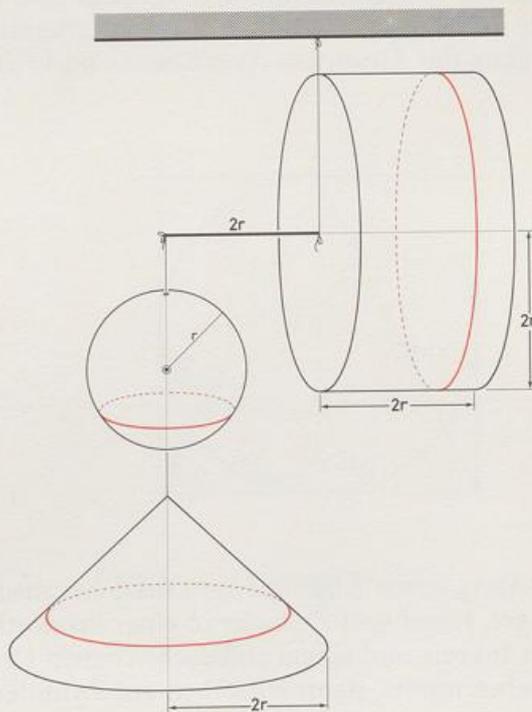
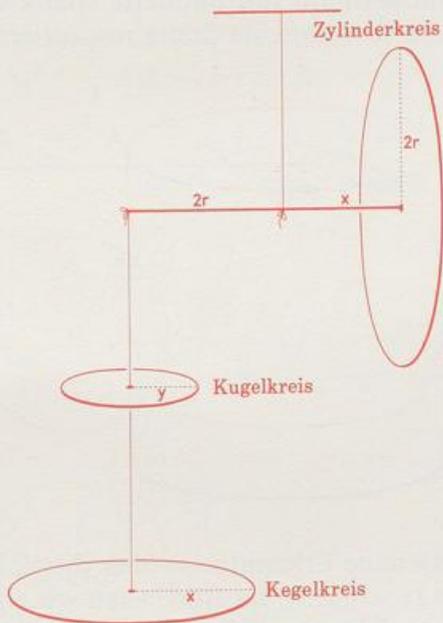
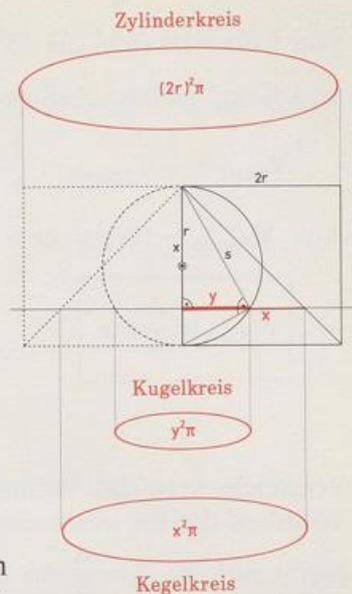
$y^2\pi$ ist der Inhalt eines Kugelkreises.

Die Gleichung (\blacksquare) bedeutet dann

$$(\text{Kegelkreis} + \text{Kugelkreis}) \cdot 2r = (\text{Zylinderkreis}) \cdot x$$

Nach dem Hebelgesetz von ARCHIMEDES heißt das:

Die Kreisscheiben von Kegel und Kugel, die im Abstand $2r$ vom Drehpunkt hängen, sind im Gleichgewicht mit der Zylinderkreisscheibe, die den Abstand x vom Drehpunkt hat. Dies gilt für jedes x zwischen 0 und $2r$. Folglich halten auch Kegel und Kugel, die im Abstand $2r$ vom Drehpunkt hängen, das Gleichgewicht dem Zylinder, dessen Schwerpunkt den Abstand r vom Drehpunkt hat.

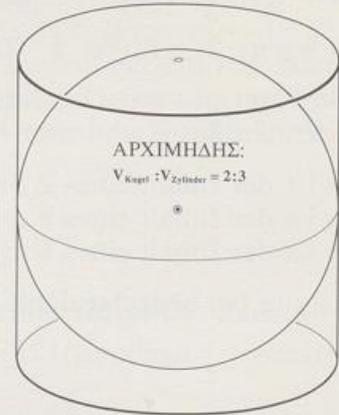


Von EUDOXOS (408 bis 355) wusste ARCHIMEDES, dass $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} V_{\text{Zylinder}}$ ist (falls Zylinder und Kegel gleiche Radien und gleiche Höhen haben).

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2} V_{\text{Zylinder}} - \frac{1}{3} V_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{6} V_{\text{Zylinder}}$$

Aus $V_{\text{Zylinder}} = (2r)^2 \pi \cdot 2r = 8r^3 \pi$ folgt

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

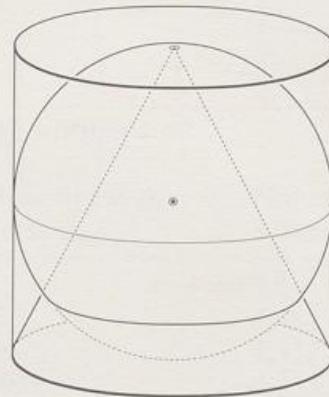
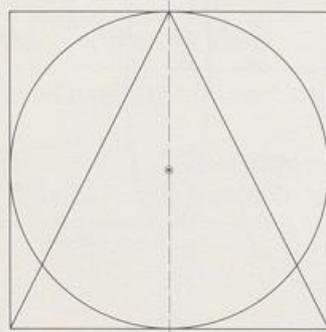


Vergleicht man das Volumen einer Kugel mit dem Volumen des ihr umbeschriebenen Zylinders, so

ergibt sich $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} r^3 \pi$ und $V_{\text{Zylinder}} = r^2 \pi \cdot 2r = 2r^3 \pi$, oder als Verhältnis geschrieben

$$V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Zylinder}} = \frac{4}{3} : 2 = 4 : 6 = 2 : 3$$

Auf diese Entdeckung war ARCHIMEDES sehr stolz. Auf seinen Wunsch hin meißelte man in seinen Grabstein ein Sinnbild. Es zeigt eine Kugel mit dem umbeschriebenen Zylinder und das Volumenverhältnis 2 : 3. Daran erkannte anderthalb Jahrhunderte später CICERO bei Syrakus das Grab von ARCHIMEDES und ließ die verwairstete Stätte restaurieren.



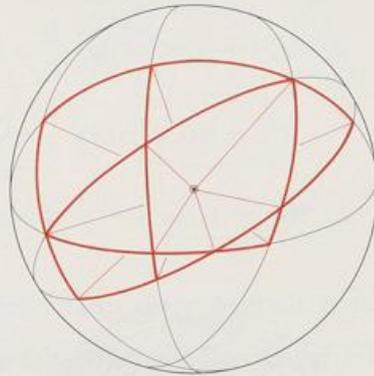
Als Krönung seiner Überlegungen fasst ARCHIMEDES seine Erkenntnisse über die Volumina von Kugel, Kegel und Zylinder in einer Proportion zusammen. Im Bild sehen wir ein Quadrat mit Inkreis und einem einbeschriebenen Dreieck. Wenn nun diese Figur um ihre Symmetrieachse rotiert, dann entstehen ein Zylinder, eine Kugel und ein Kegel – für sie gilt

$$\begin{aligned} V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} &= 3 : 2 \\ V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kegel}} &= 3 : 1 \end{aligned}$$

zusammengefasst $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1$

4.2 Oberfläche

Auch den Inhalt der Kugeloberfläche hat ARCHIMEDES als erster bestimmt. Kern seiner Überlegung ist die



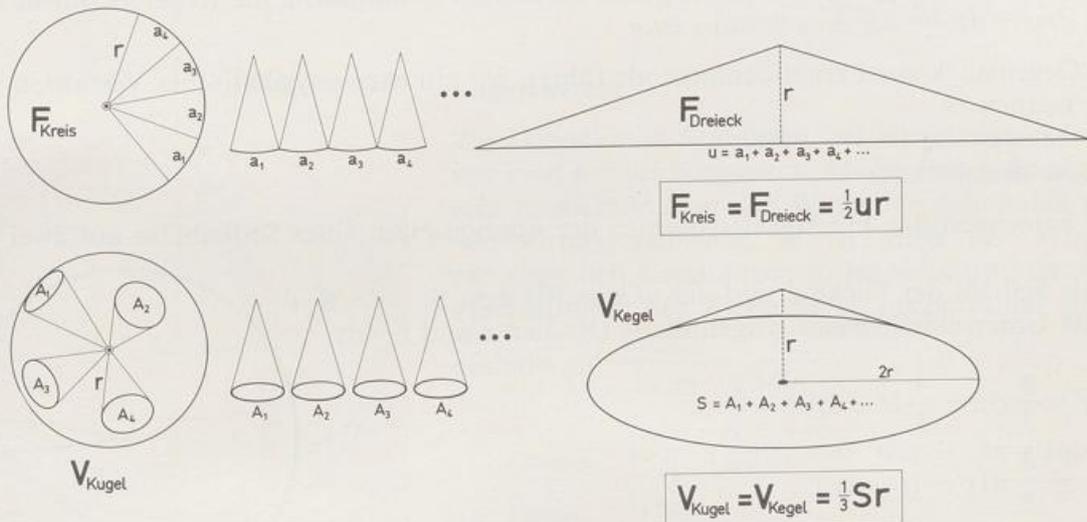
Pyramiden-Methode

Wir denken uns die Kugeloberfläche in n kleine Flächenstücke A_i zerlegt. Verbindet man alle Randpunkte mit dem Kugelmittelpunkt, so entstehen pyramidenartige Körper mit der »Höhe« r , ihre Grundflächen ergeben zusammen die Kugeloberfläche S , und ihre Rauminhalte bilden zusammen das Kugelvolumen:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

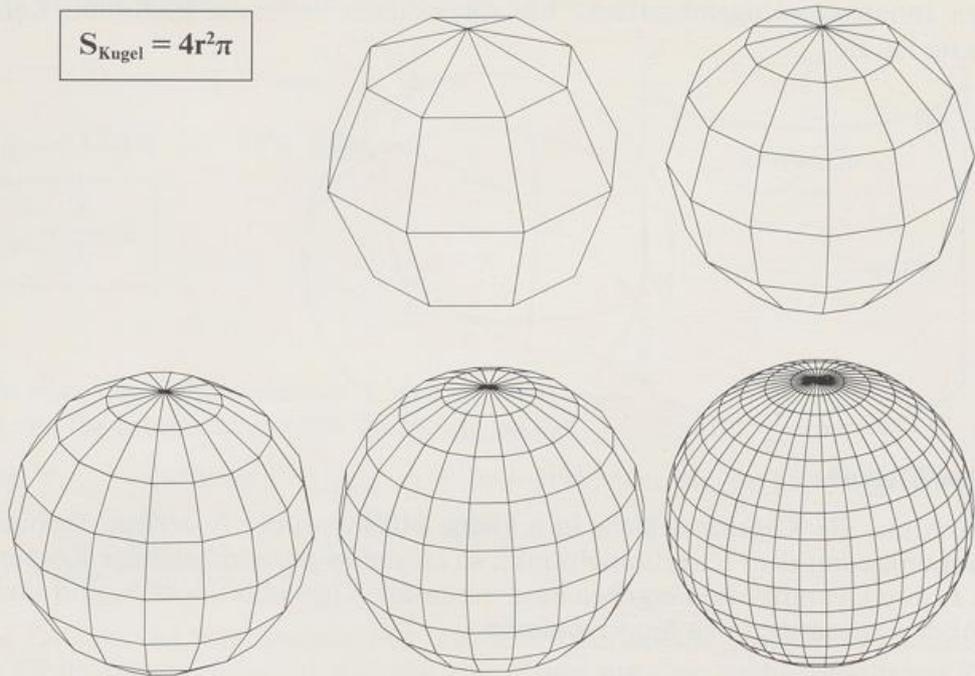
$$\frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \dots + \frac{1}{3} A_n r \approx \frac{4}{3} r^3 \pi \quad || \cdot \frac{3}{r}$$

$$\underbrace{A_1 + A_2 + \dots + A_n}_S \approx 4r^2 \pi$$



Je kleiner die Flächenstücke werden, desto besser wird die Näherung, und man kann beweisen, dass gilt

$$S_{\text{Kugel}} = 4r^2\pi$$



ARCHIMEDES findet dieses Ergebnis so: Er überträgt einen Flächenvergleich bei Kreis und Dreieck auf einen Volumenvergleich bei Kugel und Kegel. Seine Überlegung im Wortlaut:

»... ist mir der Gedanke gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist wie deren größter Kreis, indem ich mir vorgestellt habe, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie der Kreisumfang und dessen Höhe der Kreisradius ist, ebenso die Kugel einem Kegel gleich ist, dessen Grundfläche die Kugeloberfläche und dessen Höhe der Kugelradius ist.«

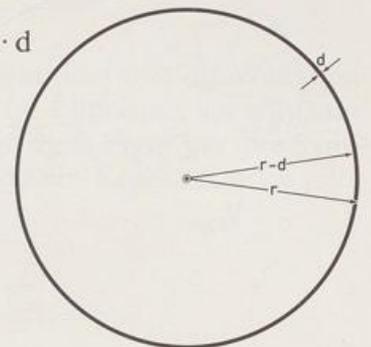
Als Gegenstück zur Pyramidenmethode führen wir ein eher physikalisches Verfahren vor. Wir nennen es

Seifenblasenmethode

Wir berechnen das Flüssigkeitsvolumen der dünnen Haut einer Seifenblase auf zwei Arten:

1. als Schicht der Dicke d und der »Grundfläche« S : $V \approx S \cdot d$
2. als Unterschied zweier Kugelinhalte (Radien r und $r - d$)

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} r^3\pi - \frac{4}{3} (r - d)^3\pi \\ &= \frac{4}{3} \pi (r^3 - (r - d)^3) \\ &= \frac{4}{3} \pi (r^3 - (r^3 - 3r^2d + 3rd^2 - d^3)) \end{aligned}$$



$$= \frac{4}{3} \pi (3r^2d - 3rd^2 + d^3)$$

$$= \frac{4}{3} \pi d (3r^2 - 3rd + d^2)$$

Es gilt näherungsweise: $S \cdot d \approx \frac{4}{3} \pi d (3r^2 - 3rd + d^2)$

$$S \approx \frac{4}{3} \pi (3r^2 - 3rd + d^2)$$

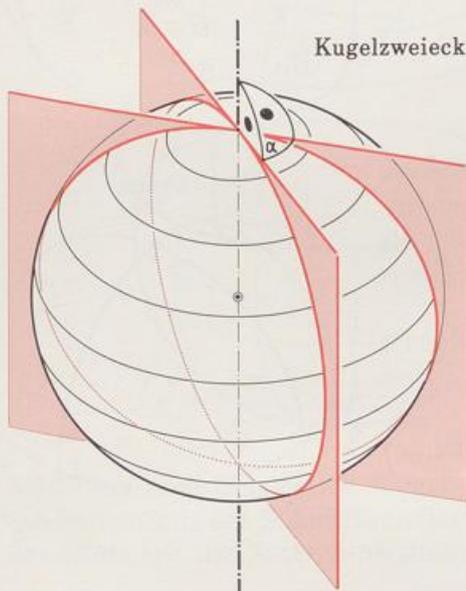
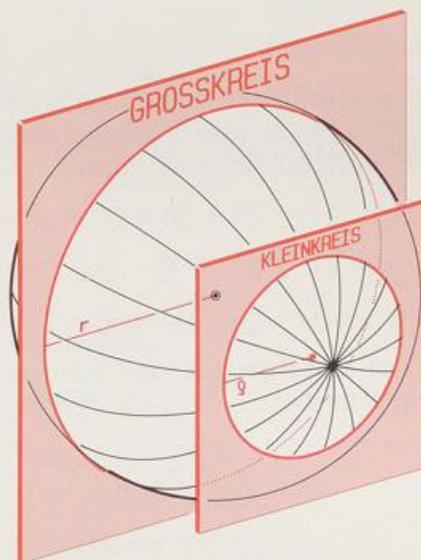
$$S \approx 4r^2\pi - 4r\pi d + \frac{4}{3} \pi d^2$$

Wenn nun d beliebig klein wird, dann werden auch $4r\pi d$ und erst recht $\frac{4}{3} \pi d^2$ beliebig klein im Vergleich zu $4r^2\pi$. Die Oberfläche S der Kugel unterscheidet sich dann um beliebig wenig von $4r^2\pi$ und es gilt wiederum

$$S_{\text{Kugel}} = 4r^2\pi$$

* 4.3 Kugelteile

Schneidet eine Ebene eine Kugel, so entsteht als Schnittfigur ein Kreis. Geht die Ebene durch den Kugelmittelpunkt, so ergibt sich ein Großkreis (Kreisradius = Kugelradius), andernfalls ein Kleinkreis (Kreisradius < Kugelradius).



Kugelzweieck

Kugelzweieck

Zwei Großkreise begrenzen vier Kugelzweiecke, davon sind je zwei kongruent. Als Winkel α des Zweiecks bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Großkreisebenen, er ist auch der Winkel zwischen den Kreistangenten im Schnittpunkt. Der Flächeninhalt des Zweiecks ist proportional zu α ,

deshalb gilt $\frac{F_{\text{Zweieck}}}{S_{\text{Kugel}}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$

$$F_{\text{Zweieck}} = 4r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \text{oder wegen } 2\pi = 360^\circ$$

$$F_{\text{Zweieck}} = 2r^2\alpha.$$

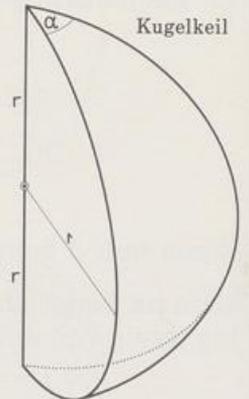
Kugelkeil

Verbindet man alle Punkte eines Zweiecks mit dem Kugelmittelpunkt, so entsteht ein Kugelkeil.

Der Rauminhalt des Kugelkeils ist proportional zu α , deshalb gilt $\frac{V_{\text{Kugelkeil}}}{V_{\text{Kugel}}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$

$$V_{\text{Kugelkeil}} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \text{oder wegen } 2\pi = 360^\circ \quad V_{\text{Kugelkeil}} = \frac{2}{3} r^3 \alpha$$

$$\text{oder auch } V_{\text{Kugelkeil}} = \frac{1}{3} F_{\text{Zweieck}} \cdot r.$$



Kugeldreieck

Drei Großkreise begrenzen im Allgemeinen acht Kugeldreiecke, davon sind je zwei punktsymmetrisch, also flächengleich. Für den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks gibt es eine verblüffend einfache Formel. Die acht Dreiecke ergeben zusammen die Kugeloberfläche

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} + \textcircled{8} = 4r^2\pi \quad \text{Kugeldreieck}$$

wegen $\textcircled{1} = \textcircled{5}$, $\textcircled{2} = \textcircled{6}$, $\textcircled{3} = \textcircled{7}$ und $\textcircled{4} = \textcircled{8}$

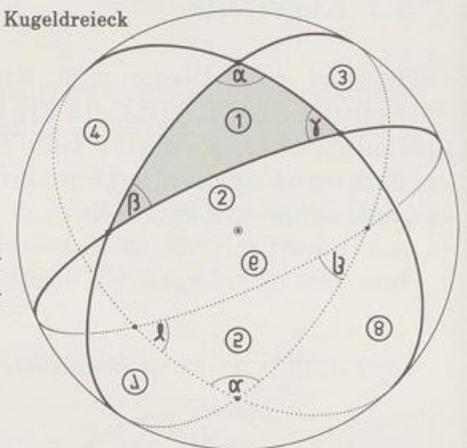
gilt $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} = 2r^2\pi$.

Zwei Kugeldreiecke mit gemeinsamer Seite bilden ein Kugelzweieck:

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} + \textcircled{2}) + (\textcircled{1} + \textcircled{3}) + (\textcircled{1} + \textcircled{4}) - \textcircled{1} - \textcircled{1} &= 2r^2\pi \\ 2r^2\alpha + 2r^2\beta + 2r^2\gamma - 2 \cdot \textcircled{1} &= 2r^2\pi \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} = r^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

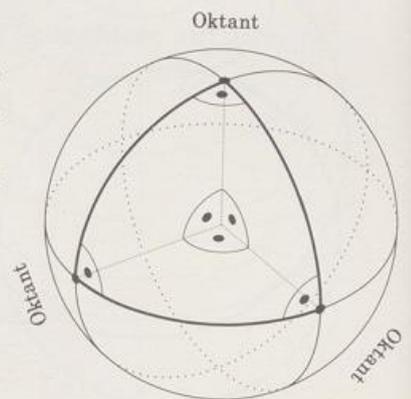
$$F_{\text{Kugeldreieck}} = r^2 (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)$$



Auf ein und derselben Kugel bestimmten allein die Winkel die Größe eines Kugeldreiecks. Weil Flächeninhalte positiv sind, muss die Winkelsumme in einem Kugeldreieck größer als 180° sein. Der Flächeninhalt ist sogar proportional zum Überschuss (Exzess) der Winkelsumme über 180° .

Als Beispiel berechnen wir den Inhalt eines Oktanten; das ist ein Kugeldreieck mit drei rechten Winkeln:

$$F_{\text{Oktant}} = r^2 (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 180^\circ) = r^2 \frac{\pi}{2} \quad \left(= \frac{1}{8} F_{\text{Kugel}} \right)$$



Kugeldreikant

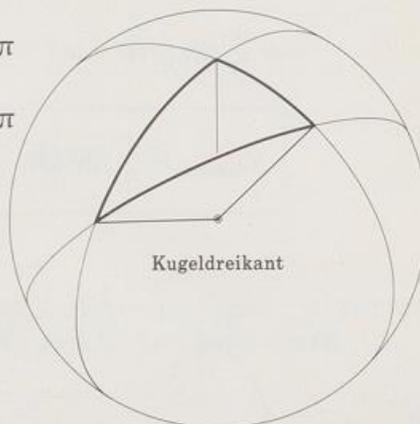
Verbindet man alle Punkte eines Kugeldreiecks mit dem Kugelmittelpunkt, so entsteht ein Kugel-Dreikant. Wir finden die Formel für sein Volumen mit der gleichen Überlegung wie oben bei der Berechnung des Inhalts von Kugeldreiecken. ①, ②, ③ ... bedeuten jetzt Dreikantvolumina.

$$(\textcircled{1} + \textcircled{2}) + (\textcircled{1} + \textcircled{3}) + (\textcircled{1} + \textcircled{4}) - \textcircled{1} - \textcircled{1} = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$\frac{2}{3} r^3 \alpha + \frac{2}{3} r^3 \beta + \frac{2}{3} r^3 \gamma - 2 \cdot \textcircled{1} = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{3} r^3 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

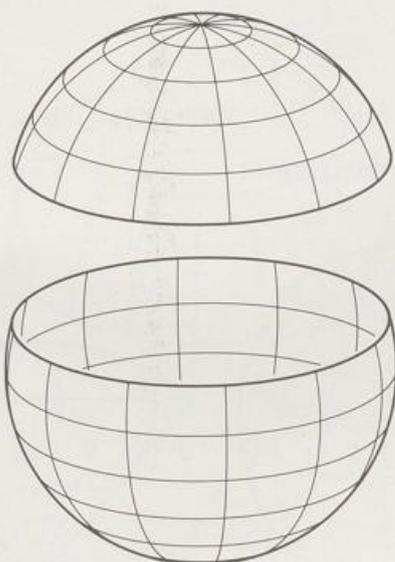
$$V_{\text{Kugeldreikant}} = \frac{1}{3} r^3 (\alpha + \beta + \gamma - \pi) = \frac{1}{3} F_{\text{Kugeldreieck}} \cdot r$$



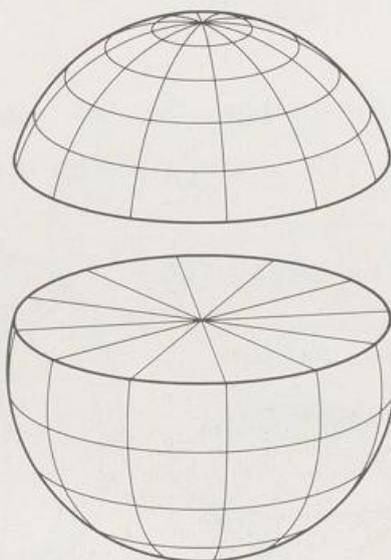
Der letzte Ausdruck im Kasten erinnert (zu Recht!) an die Formel fürs Pyramiden- bzw. Kegelvolumen.

Kalotte (Kugelhaube) und Kugelsegment (Kugelabschnitt)

Kugelhaube



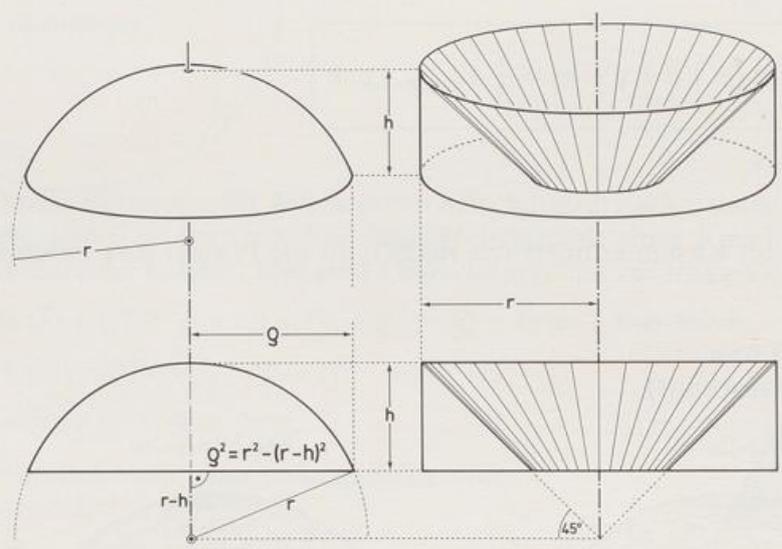
Kugelabschnitt



Schneidet eine Ebene eine Kugel, so entstehen zwei Kugelhauben. Jede Haube begrenzt zusammen mit der Schnittkreisfläche ein Kugelsegment. Wir bestimmen das Volumen des Segments mit der SEGNER-Methode.

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Segment}} &= V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegelstumpf}} \\
 &= r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h [r^2 + (r-h)r + (r-h)^2] \\
 &= \frac{1}{3} \pi h [3r^2 - r^2 - r^2 + rh - r^2 + 2rh - h^2] \\
 &= \frac{1}{3} \pi h [3rh - h^2]
 \end{aligned}$$

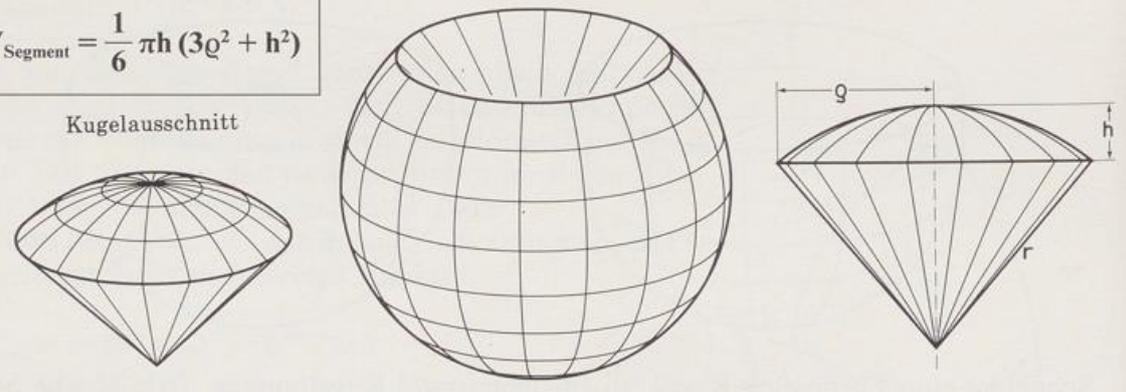
$$\boxed{V_{\text{Segment}} = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)} \quad (\diamond)$$



Wegen $g^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$ gilt $3g^2 = 6rh - 3h^2$ oder $3g^2 + h^2 = 6rh - 2h^2 = 2h(3r - h)$. $h(3r - h) = \frac{1}{2} (3g^2 + h^2)$ in (\diamond) eingesetzt, ergibt

$$\boxed{V_{\text{Segment}} = \frac{1}{6} \pi h (3g^2 + h^2)}$$

Kugelausschnitt



Ergänzt man den Kugelabschnitt mit einem Kegel, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt ist, so entsteht ein **Kugelsektor (Kugelausschnitt)**. Für sein Volumen gilt

$$V_{\text{Sektor}} = V_{\text{Segment}} + V_{\text{Kegel}}$$

$$= \frac{1}{3} h^2 \pi (3r - h) + \frac{1}{3} \varrho^2 \pi (r - h),$$

wegen $\varrho^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2$ ergibt sich

$$V_{\text{Sektor}} = \frac{1}{3} \pi [3rh^2 - h^3 + (2rh - h^2)(r - h)]$$

$$= \frac{1}{3} \pi h [3rh - h^2 + 2r^2 - 2rh - rh + h^2]$$

$$V_{\text{Sektor}} = \frac{2}{3} \pi h r^2$$

Mit dieser Formel bestimmen wir den Flächeninhalt einer Kalotte. Wir gehen so vor wie bei der Pyramiden-Methode zur Berechnung der Kugeloberfläche und bekommen

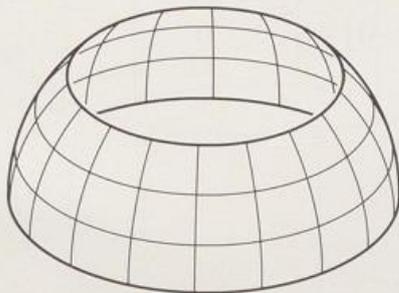
$$V_{\text{Sektor}} = \frac{1}{3} F_{\text{Haube}} \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^2 h, \quad \text{also}$$

$$F_{\text{Haube}} = 2r\pi h$$

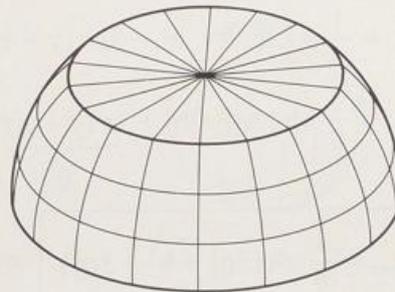
Kugelzone und Kugelschicht

Zwei parallele Ebenen schneiden aus einer Kugel eine Kugelzone aus. Die Zone und die beiden Schnittkreisflächen begrenzen eine Kugelschicht.

Kugelzone



Kugelschicht



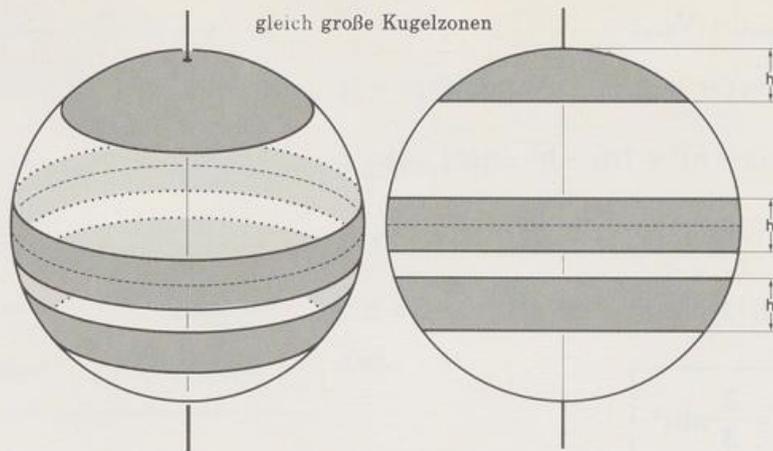
$$F_{\text{Zone}} = S_{\text{Kugel}} - F_{\text{Haube } x} - F_{\text{Haube } y}$$

$$= 4r^2\pi - 2rx\pi - 2ry\pi$$

$$= 2r\pi (2r - x - y)$$

$$F_{\text{Zone}} = 2r\pi h$$

Erstaunlicherweise hängt der Flächeninhalt einer Zone nur von ihrer Höhe und gar nicht von ihrer Lage auf der Kugel ab. Die Formel enthält auch den Sonderfall der Kugelhaube.



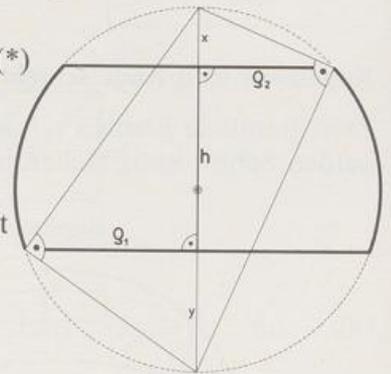
Die Herleitung der Formel fürs Volumen der Kugelschicht dagegen ist mühsam und trickreich. Vom Segment der Höhe $h + x$ schneiden wir das Segment der Höhe x ab: übrig bleibt die Schicht der Höhe h

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Schicht}} &= \frac{1}{6} \pi (h + x) [3\varrho_1^2 + (h + x)^2] - \frac{1}{6} \pi x (3\varrho_2^2 + x^2) \\
 &= \frac{1}{6} \pi [3\varrho_1^2 h + 3\varrho_1^2 x + h^3 + 3h^2 x + 3hx^2 + x^3 - 3\varrho_2^2 x - x^3] \\
 &= \frac{1}{6} \pi [3\varrho_1^2 h + h^3 + 3x(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) + 3hx(h + x)] \quad (*)
 \end{aligned}$$

Höhensatz: $\varrho_1^2 = (h + x)y$
 $\varrho_2^2 = (h + y)x$
 $\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = h(y - x)$ eingesetzt in (*) ergibt

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Schicht}} &= \frac{1}{6} \pi [3\varrho_1^2 h + h^3 + 3xh(y - x) + 3xh(h + x)] \\
 &= \frac{1}{6} \pi h [3\varrho_1^2 + h^2 + \underbrace{3x(y + h)}_{\varrho_2^2}]
 \end{aligned}$$

$$V_{\text{Schicht}} = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho_1^2 + h^2 + 3\varrho_2^2)$$



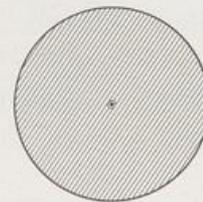
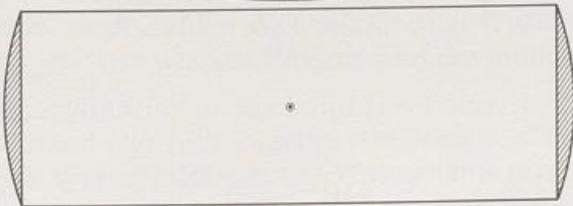
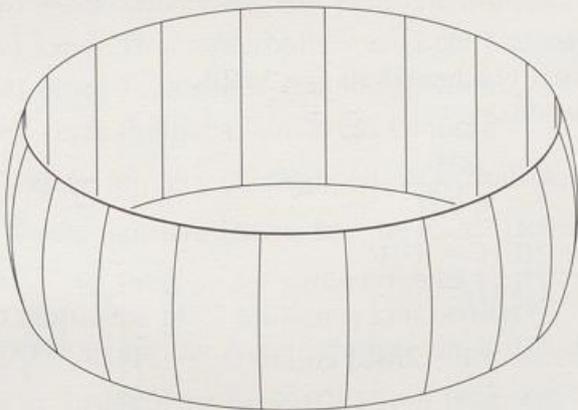
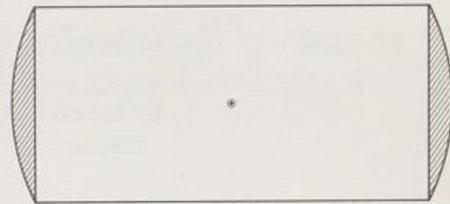
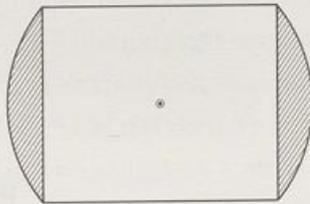
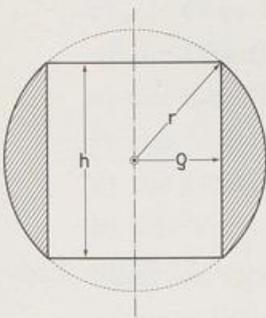
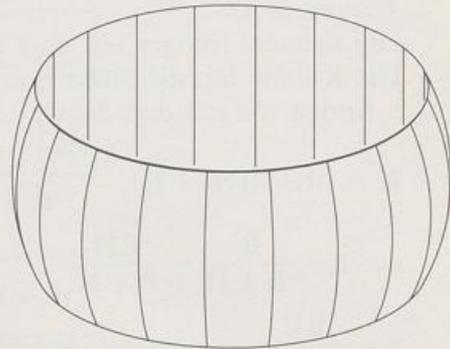
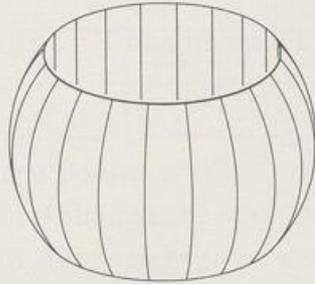
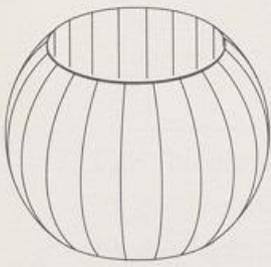
Zum Schluss wenden wir diese Formeln in zwei Beispielen an.

1. Eine kugelige Perle mit Radius r wird zentrisch so durchbohrt, dass der Restkörper die Höhe h hat. Berechne das Volumen des Restkörpers.
Den Restkörper stellen wir uns vor als Kugelschicht, aus der ein Zylinder herausgebohrt worden ist

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Rest}} &= V_{\text{Schicht}} - V_{\text{Zylinder}} \\
 &= \frac{1}{6} \pi h (6\varrho^2 + h^2) - \varrho^2 \pi h = \frac{1}{6} \pi h^3
 \end{aligned}$$

Der Kugelradius r kommt im Ergebnis überhaupt nicht vor! Das heißt, bei allen Kugeln haben gleich hohe Restkörper dasselbe Volumen. Im Grenzfall $h = 2r$ ist der »Restkörper« die Kugel selber, sein Volumen ist

$$\frac{4}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \pi = \frac{1}{6} \pi h^3$$



2. In der Höhe H überm Äquator umkreist eine Raumfähre die Erde (Erdradius $R = 6400$ km).

a) Wie viel Prozent der Erdoberfläche fotografiert eine Kamera?

b) Wie viel Prozent der Erdoberfläche sieht der Raumfahrer während seines Umlaufs?

Lösung zu a):

Die Kamera fotografiert eine Kalotte.

Die Kalotte hat die Höhe h und den Flächeninhalt $F = 2\pi Rh$.

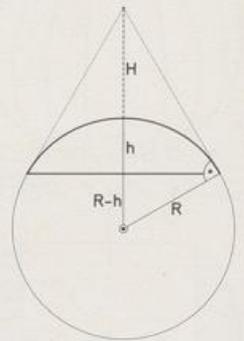
h finden wir mit dem Kathetensatz.

$$R^2 = (R - h)(R + H), \quad \frac{R^2}{R + H} = R - h$$

$$h = R - \frac{R^2}{R + H} = \frac{RH}{R + H}$$

$$h = \frac{RH}{R + H} \quad \text{eingesetzt in } F = 2\pi Rh \quad \text{ergibt}$$

$$F = 2\pi R \cdot \frac{RH}{R + H} = \underbrace{4R^2\pi}_{\text{Erdoberfläche}} \cdot \underbrace{\frac{H}{2(R + H)}}_{\text{Anteil}}$$



In $H = R$ (= 6400 km Höhe) fotografiert die Kamera $\frac{R}{2(R + R)} = \frac{1}{4} = 25\%$ der Erdoberfläche.

Lösung zu b):

Der Raumfahrer sieht eine Kugelzone.

Die Kugelzone hat die Höhe d und den Flächeninhalt $F = 2\pi Rd$.

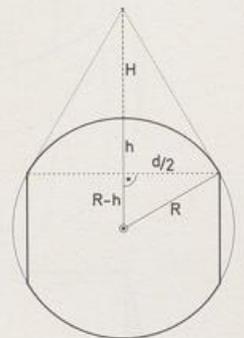
d finden wir mit dem Satz von PYTHAGORAS:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2, \quad h = \frac{RH}{R + H} \quad (\text{von a})$$

$$= \frac{2R^2H}{R + H} - \frac{R^2H^2}{(R + H)^2} = \frac{2R^3H + 2R^2H^2 - R^2H^2}{(R + H)^2}$$

$$d = \frac{2R}{R + H} \sqrt{H(2R + H)} \quad \text{eingesetzt in } F = 2\pi Rd \quad \text{ergibt}$$

$$F = \underbrace{4R^2\pi}_{\text{Erdoberfläche}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{H(2R + H)}}{R + H}}_{\text{Anteil}}$$



In $H = R$ (= 6400 km Höhe) sieht der Raumfahrer $\frac{\sqrt{3R^2}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 86,6\%$ der Erdoberfläche.

Aufgaben zu 4.1 und 4.2

1. Berechne die fehlenden Stücke einer Kugel (Durchmesser d):

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	1	10							
d			0.02	12 740					
V					20π	1	$2,25\pi$		
S								1	2π

2. Gib für die Kugel eine Formel an für
- das Volumen V in Abhängigkeit vom Durchmesser d
 - das Volumen V in Abhängigkeit von der Oberfläche S
 - die Oberfläche S in Abhängigkeit vom Durchmesser d
 - die Oberfläche S in Abhängigkeit vom Volumen V
 - die Oberfläche S in Abhängigkeit vom der maximalen Querschnittsfläche A
 - das Volumen V in Abhängigkeit von der maximalen Querschnittsfläche A
 - die Oberfläche S in Abhängigkeit vom Umfang u
 - das Volumen V in Abhängigkeit vom Umfang u .
3. Berechne Oberfläche und Volumen
- einer Erbse von 5 mm Durchmesser
 - einer Seifenblase von 7 cm Durchmesser
 - eines Tischtennisballs von 12 cm Umfang
 - eines Tennisballs von 30 cm Umfang
 - eines Fußballs von 70 cm Umfang.
4. Welche mittlere Dichte hat ein Golfball von 13 cm Umfang und 46 g Masse?
5. Welche mittlere Dichte hat die Erde? (Radius 6370 km, Masse $6 \cdot 10^{24}$ kg)
6. Wie viel Prozent der Erdoberfläche sind von den Meeren bedeckt, wenn die gesamte Landfläche 148,8 Millionen km^2 beträgt?
(Rechne mit der Äquatorlänge von 40075 km.)
7. Der Erdäquator ist 40075161 m lang, ein Meridian aber nur 40007818 m. Nimm jede dieser Zahlen als Umfang einer Kugel und berechne damit Oberfläche und Volumen. Um wie viel Prozent sind die größeren Werte größer als die kleineren?
8. Ein zylindrischer Kochtopf ($r = 15$ cm, $h = 12$ cm) ist dreiviertel mit Wasser gefüllt. Jemand legt fünf kugelige Tomaten von 5 cm Radius hinein. Wie hoch steht dann das Wasser oder wie viel Wasser läuft heraus?
9. 1000 Schrotkugeln verdrängen in einem Messzylinder 4 cm^3 Wasser. Wie groß ist der mittlere Durchmesser einer Schrotkugel?

10. 3333 Schrotkugeln von 3 mm Durchmesser werden zu einer Bleikugel verschmolzen. Welchen Durchmesser hat diese?
11. Wie viele Kugeln lassen sich aus einer Bleikugel von 8 cm Radius gießen, wenn ihr Radius
- die Hälfte
 - der vierte Teil
 - der achte Teil des ursprünglichen Radius ist?
12. In einem Würfel der Kantenlänge a liegen
- eine Kugel vom Durchmesser a
 - acht gleiche Kugeln vom Durchmesser $a/2$.
 - 27 gleiche Kugeln vom Durchmesser $a/3$
 - n^3 gleiche Kugeln vom Durchmesser a/n .
- Wie viel Prozent des Würfelvolumens nehmen die Kugeln ein?
13. Ein kugeliger Turmknopf von 1,12 m Durchmesser trägt eine 0,1 mm dicke Goldschicht. Wie viel Gramm Gold sind das? ($19,2 \text{ g/cm}^3$)
14. Eine Seifenblase von Außendurchmesser 8 cm ist aus einem Seifenlösungstropfen vom Volumen 2 mm^3 geblasen worden. Wie groß ist die Wanddicke?
15. Ein Basketball von 76 cm Umfang besteht aus 0,5 cm dickem Kunststoff der Dichte $\rho = 0,72 \text{ g/cm}^3$. Welche Masse hat der Ball?
- 16. Ein Hundertstel mm^3 Öl verbreitert sich auf einer Wasseroberfläche zu einem kreisförmigen Ölfleck von 13 cm Durchmesser. Welchen Durchmesser hat ein Ölmolekül, wenn man annimmt, dass die Moleküle nur nebeneinander liegen?
17. Eine Kugel mit $V = 4\pi^2/3$ wird von einer Ebene
- durch den Kugelmittelpunkt
 - im Abstand $\pi/2$ vom Kugelmittelpunkt geschnitten.
- Wie groß ist die Schnittfläche?
18. n gleich große Kugeln haben zusammen dasselbe Volumen wie eine große Kugel. Wie verhält sich die Oberfläche der großen Kugel zur Gesamtoberfläche der kleinen Kugeln?
19. Welchen Radius hat eine Kugel,
- deren Oberfläche dasselbe Maß hat wie der Rauminhalt
 - deren Oberfläche das doppelte Maß hat wie der Rauminhalt
 - deren Oberfläche das n -fache Maß hat wie der Rauminhalt?
 - Wir nehmen vereinfachend an:
Der Wärmehalt einer Kugel ist proportional ihrem Volumen, die Wärmeabgabe ist proportional ihrer Oberfläche. Welche von zwei verschieden großen Kugeln aus gleichem Material kühlt schneller aus?

- 20. Das Schwerfeld der Sonne zieht Teilchen an mit einer Kraft F_S , die proportional ist dem Teilchenvolumen. Der Strahlungsdruck der Sonne stößt dasselbe Teilchen ab mit einer Kraft F_D , die proportional ist dem Teilchenquerschnitt. Sind (kugelige) Teilchen denkbar, bei denen sich die Wirkungen von Schwerfeld und Strahlungsdruck aufheben?
- 21. Eine Kugel vom Radius r wird von einer Ebene in zwei Teile zerlegt. In jedem Kugelteil ist eine größtmögliche Kugel einbeschrieben. Die Inhalte der einbeschriebenen Kugeln sind zusammen $1/n$ des Volumens der großen Kugel. Welche Abstände haben die Kugelmittelpunkte von der Ebene? Wie muss die Ebene liegen, wenn die einbeschriebenen Kugeln zusammen ein möglichst kleines Volumen haben sollen?
- 22. Ein Kreis und ein Quadrat – beide flächengleich – rotieren so, dass eine Kugel und ein Zylinder entstehen. Wie verhalten sich
 - a) die Oberflächen
 - b) die Rauminhalte der Drehkörper?
- 23. Ein Kreis und ein Quadrat – beide umfangsgleich – rotieren so, dass eine Kugel und ein Zylinder entstehen. Wie verhalten sich
 - a) die Oberflächen
 - b) die Rauminhalte der Drehkörper?
- 24. Ein Würfel und eine Kugel haben dasselbe Volumen. Zeichne diese Figuren so, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen und eine Würfelfläche parallel ist zur Zeichenebene.
- 25. Ein Würfel und eine Kugel haben gleich große Oberflächen. Zeichne die Figuren so, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen und eine Würfelfläche parallel ist zur Zeichenebene.
- 26. Die Oberfläche eines Zylinders ist so groß wie die einer Kugel vom selben Radius. Welcher Körper hat das größere Volumen?
- 27. Ein Kegel mit Grundkreisradius r hat dasselbe Volumen wie eine Kugel vom selben Radius. Welcher Körper hat die größere Oberfläche?
- 28. Eine Viertelkugel (Radius R) hat dasselbe Volumen wie ein Zylinder mit $h = 9r$.
 - a) Berechne R in Abhängigkeit von r .
 - b) Wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper?
- 29. Eine geschälte Orange von 6 cm Radius besteht aus 16 gleichen Schnitzen. Berechne Volumen und Oberfläche eines Schnitzes.
- 30. Bei den Platonischen Körpern
 - geht die Umkugel (Volumen V_U , Oberfläche S_U) durch die Ecken,
 - berührt die Inkugel (Volumen V_I , Oberfläche S_I) die Flächen,
 - berührt die Kantenkugel (Volumen V_K , Oberfläche S_K) die Kanten.
 Berechne für Tetraeder, Würfel und Oktaeder die Verhältnisse
 - a) $V_U : V_I : V_K$ b) $S_U : S_I : S_K$.

- 31. Die platonischen Körper Tetraeder, Würfel und Oktaeder haben die Kantenlänge a . Wie verhalten sich
- die Volumina der Umkugeln von Tetraeder und Würfel
 - die Oberflächeninhalte der Umkugeln von Tetraeder und Würfel
 - die Volumina der Umkugeln von Tetraeder und Oktaeder
 - die Oberflächeninhalte der Umkugeln von Tetraeder und Oktaeder
 - die Volumina der Umkugeln von Würfel und Oktaeder
 - die Oberflächeninhalte der Umkugeln von Würfel und Oktaeder
 - die Volumina der Inkugeln von Tetraeder und Würfel
 - die Oberflächeninhalte der Inkugeln von Tetraeder und Würfel
 - die Volumina der Inkugeln von Tetraeder und Oktaeder
 - die Oberflächeninhalte der Inkugeln von Tetraeder und Oktaeder
 - die Volumina der Inkugeln von Würfel und Oktaeder
 - die Oberflächeninhalte der Inkugeln von Würfel und Oktaeder.
- 32. Einer Kugel (Radius r) ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Oberfläche halb so groß ist wie die der Kugel. Berechne Zylinderradius und Zylinderhöhe.
- 33. Einer Kugel mit Radius 1 ist ein Kegel einbeschrieben, dessen Oberfläche halb so groß ist wie die der Kugel. Berechne die Kegelhöhe h . Leite dazu für h die Gleichung $h^4 - 2h^3 + 4h^2 - 8h + 4 = 0$ her und suche durch Probieren mit dem Taschenrechner die beiden Näherungswerte für h .
34. Ein Zylinder von quadratischem Längsschnitt hat
- dasselbe Volumen
 - denselben Oberflächeninhalt
- wie eine Kugel mit Radius r . Berechne den Zylinderradius.
35. Einem Kegel mit $m = 2r$ ist eine Kugel einbeschrieben. Welchen Radius hat sie?
36. Einer Halbkugel ist ein Zylinder umbeschrieben und ein Kegel einbeschrieben. Wie verhalten sich die drei Volumina?
- 37. Die Mantellinie eines Kegels mit Radius r ist unter dem Winkel φ gegen die Grundfläche geneigt. Auf der Grundfläche liegt eine Kugel, sie berührt den Mantel. Auf ihr liegt wieder eine Kugel, auch sie berührt den Mantel usw. Rechne mit $\varphi = 45^\circ$ bzw. mit $\varphi = 60^\circ$.
- In welchem Verhältnis steht die Summe der Volumina der (unendlich vielen) Kugeln zum Kegelvolumen? (Betrachte die erste Kugel im Kegelstumpf!)
 - In welchem Verhältnis steht die Summe der Oberflächen der (unendlich vielen) Kugeln zum Kegelmantel? (Betrachte die erste Kugel im Kegelstumpf!)
 - Berechne Gesamtvolumen und Gesamtoberfläche aller einbeschriebenen Kugeln.

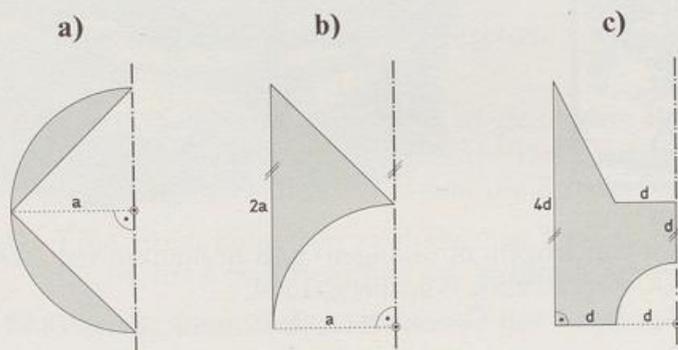
38. Die schraffierte Figur rotiert um die gepunktstrichelte Achse. Berechne Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers.

Der Schweizer Mathematiker Habakuk (Paul) GULDIN (St. Gallen 1577 bis 1643 Graz) hat 1641 in seinen ›Centrobaryca‹ die nach ihm benannten **Guldin'schen Regeln** aufgestellt:

- I. Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der rotierenden Fläche und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der rotierenden Fläche beschreibt.
- II. Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge des rotierenden Kurvenstücks und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt des rotierenden Kurvenstücks beschreibt.

Die gegebene Fläche (Kurve) muss ganz auf einer Seite der Drehachse liegen und darf mit der Drehachse nur einzelne Punkte gemeinsam haben.

Diese Regeln waren schon PAPPUS von Alexandria (um 320 n. Chr.) bekannt.



39. Rotiert ein Kreis mit Radius r um eine Achse, die in der Kreisebene liegt und den Kreis nicht schneidet, so entsteht ein Torus. Berechne Volumen und Oberfläche des Torus, wenn der Kreismittelpunkt von der Achse den Abstand a hat.
40. Ein gleichseitiges Dreieck der Höhe $h = 6$ rotiert um eine Achse; die Drehachse ist parallel zur Höhe und hat von der Höhe den Abstand 5. Berechne Volumen und Oberfläche des Drehkörpers.
41. Bestimme für das Dreieck ABC mit A (1 | 1), B(4 | 1) und C(1 | 5) die Koordinaten des
 a) Flächenschwerpunkts
 b) Kantenschwerpunkts.
42. Berechne den Abstand des Schwerpunkts vom zugehörigen Durchmesser für
 a) einen Halbkreisbogen
 b) eine Halbkreisfläche.
 (Tipp: Rotationskörper?)
43. Berechne mit Hilfe der Guldin'schen Regeln Volumen und Oberfläche eines Zylinders mit Radius r und Höhe h .



44. Zwei Bilder zeigen Darstellungen von Kugeln mit Längen- und Breitenkreisen. »Der Astronom« von Albrecht DÜRER, Holzschnitt, Nürnberg, 1504, »Ein Taschenspieler mit den Planeten« von GRANDVILLE, Zeichnung, Paris 1844. Vergleiche beide Darstellungen. Welche ist korrekt? Woran krankt die nicht korrekte?

Aufgaben zu 4.3

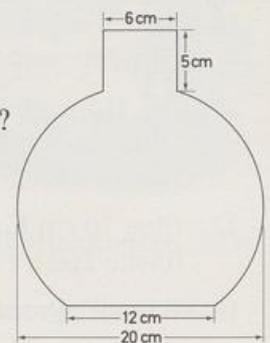
- Der Winkel α bestimmt ein Kugelzweieck mit der Fläche F , der zugehörige Kugelkeil hat das Volumen V . Berechne F und V für
 - $\alpha = 45^\circ$, $r = 1$
 - $\alpha = 270^\circ$, $r = 5$
 - $\alpha = \pi/3$, $r = 10$
- Berechne die Fläche eines Kugeldreiecks auf der Einheitskugel aus
 - $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 100^\circ$
 - $\alpha = \beta = \gamma = 100^\circ$
 - $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.
- Berechne die Volumina der Kugeldreikante von Aufgabe 2.
- Ein dreieckiges Gebiet auf der Erde (Erdradius 6370 km) habe die Fläche F . Berechne seine Winkelsumme für
 - $F = 1 \text{ km}^2$
 - $F = 100 \text{ km}^2$
 - $F = 1\,000\,000 \text{ km}^2$
- Berechne das Volumen eines Kugelsegments, wenn bekannt ist
 - $r = 1$, $h = \frac{1}{4}$
 - $r = 10$, $h = 3$
 - $r = h = 1$
 - $h = 1$, $\varrho = 10$
 - $h = 1$, $\varrho = 2$
 - $h = \varrho = 1$.

6. Berechne das Volumen V des Sektors und die Fläche F der Haube für
- a) $r = 1, h = \frac{1}{4}$ b) $r = h = 1$ c) $r = 2, h = 3$ (!).
7. Wie hoch ist eine Haube, wenn
- a) ihre Fläche ein Drittel der Kugeloberfläche beträgt
b) das Volumen des zugehörigen Sektors ein Drittel des Kugelvolumens beträgt?
8. Wie lauten die Formeln für das Volumen des Sektors bzw. die Fläche der Haube in Abhängigkeit von
- a) h und ϱ b) r und ϱ ?
9. Berechne die Fläche der Kugelzone für
- a) $r = 1, h = \frac{1}{4}$ b) $r = 1, h = 1/\pi$ c) $r = h = 1$.
10. Berechne das Volumen der Kugelschicht der Höhe 1, deren Begrenzungskreise die Durchmesser 5 und 6 haben.
11. Die Höhe einer Kugelschicht ist gleich dem Kugelradius, ihre beiden Begrenzungskreise haben zusammen dieselbe Fläche wie ein Großkreis der Kugel. Wie viel Prozent des Kugelvolumens nimmt die Schicht ein?
12. Eine 10 cm hohe, von zwei gleichen Kreisen begrenzte Kugelschicht hat die Zonenfläche $260\pi \text{ cm}^2$. Berechne das Volumen der Schicht.
13. Wie viel Prozent des Volumens einer Kugel nimmt ein Sektor ein, wenn
- a) die Haubenfläche gleich der Fläche eines Großkreises ist
b) die Gesamtoberfläche des Sektors gleich der Kugeloberfläche ist?
14. Ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel α rotiert um die Symmetrieachse. Berechne Oberfläche und Volumen des entstehenden Kugelsektors.
- a) $r = 10, \alpha = 60^\circ$ b) $r = 1, \alpha = 90^\circ$
15. Berechne den Radius r eines Kreises, der dieselbe Fläche hat wie eine Haube der Höhe h einer Kugel mit Radius R . Für welches h gilt $r = \sqrt{2} R$?
Wie groß (in Abhängigkeit von R) kann r höchstens werden?
16. Eine Kugel mit Radius r soll durch zwei ebene, parallele Schnitte so geteilt werden, dass die Oberfläche der Kugel gedrittelt wird. In welchen Abständen vom Kugelmittelpunkt liegen die Schnittebenen?
17. Eine Melone von 10 cm Radius wird durch drei parallele Schnitte in vier gleich hohe Stücke zerschnitten.
- a) Wie verhalten sich ihre Volumina?
b) Welche Oberfläche hat jedes Stück?
18. Ein kugelförmiger Heizöltank hat einen Innendurchmesser von zwei Meter.
- a) Wie viel Liter fasst der Tank?
b) Wie viel Liter passen noch in den Tank, wenn das Öl 70 cm hoch steht?

19. Welches Volumen schneidet ein Kegel ($h > 2r$, Öffnungswinkel 60°) aus einer Kugel mit Radius r , wenn die Spitze
- mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt
 - auf der Kugeloberfläche liegt und der Kugelmittelpunkt M auf der Kegelachse liegt?
- 20. Ein kegeliges Glas von 10 cm Höhe und 5 cm Radius ist bis zur halben Höhe voller Saft. Jemand wirft eine Kirsche von 1 cm Radius hinein, ohne dass was rauschwappt.
- Mach eine Zeichnung!
 - Wie groß ist die Entfernung des tiefsten Kirschpunkts vom Glasboden?
 - Wie hoch steht der Saft mit Kirsche?
 - Wie viel Saft ist unter der Kirsche?
 - Wie viel Saft muss man nachgießen, damit das Glas halb voll wird?

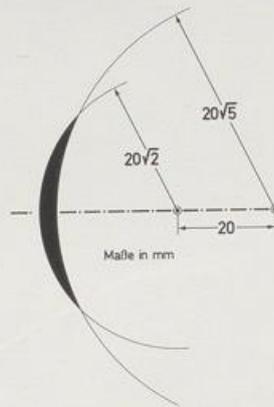
• 21. RUNDKOLBEN

- Wie viel Kubikzentimeter fasst der Rundkolben?
- Welche Glasfläche benetzt das Wasser, wenn er randvoll ist?

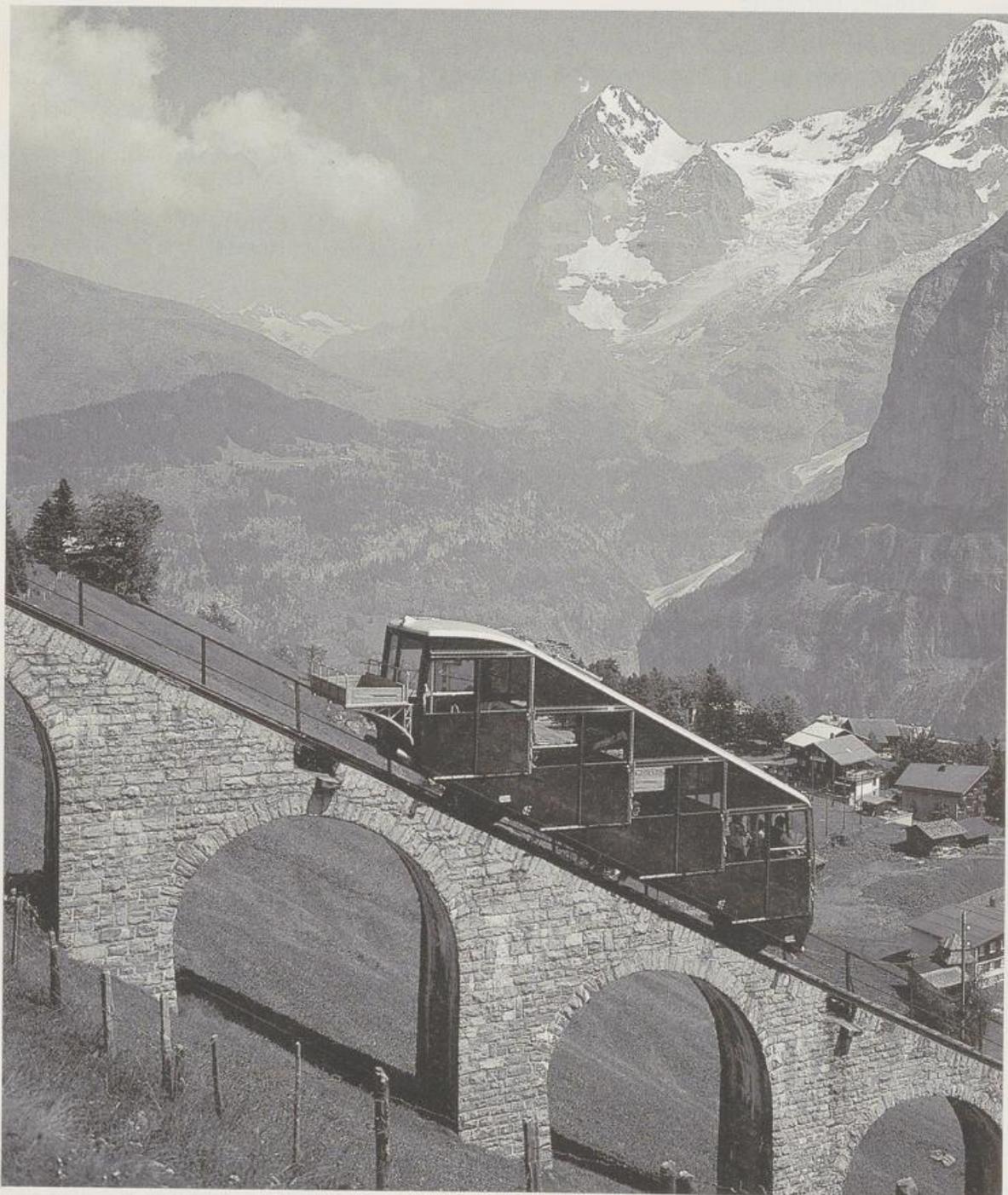


- 22. Ein Stehaufweiberl besteht aus einer Halbkugel (Radius r , Dichte ρ_H) mit aufgesetztem Kegel (Radius r , Höhe h , Dichte ρ_K). Der Schwerpunkt der Halbkugel hat vom Kugelmittelpunkt die Entfernung $0,375r$, des des Kegels $0,25h$.
- Was macht das Weiberl (bei seitlicher Auslenkung), wenn $\rho_H = \rho_K$ und $h = r\sqrt{3}$ ist?
 - Welche Beziehung besteht zwischen h , r , ρ_H und ρ_K , wenn das Weiberl aufsteht?
- 23. Man spreizt einen Zirkel so, dass Spitze und Mine die Entfernung r haben. Mit dieser Einstellung zeichnet man einen Kreis auf einer Kugel (Kugelradius $R > r$).
- Welchen Radius hat dieser Kreis?
 - In welchem Verhältnis teilt der Kreis die Kugeloberfläche?
 - In welchem Verhältnis teilt die Kreisfläche das Kugelvolumen?
- 24. Eine massive Holzkugel von 5 cm Radius schwimmt im Wasser. Die trockene Kugelhaube hat 8 cm Durchmesser. Welche Dichte hat das Holz?
25. Welche Fläche der Erdkugel ($R = 6370$ km) überblickt man in der Höhe von
- 2 m
 - 100 m
 - 3000 m?
26. Ein Sender soll ein Gebiet von $10\,000$ km² versorgen. Welche Höhe muss die Sendeanenne mindestens haben. (Erdradius $R = 6370$ km)?

27. Zwei Kugeln (Radius r) liegen so, dass jede ihren Mittelpunkt auf der andern hat. Wie groß sind Oberfläche und Volumen des gemeinsamen Raumteils?
28. Ein Seifenblasen-Pärchen bestehe aus zwei gleich großen Blasen von 3 cm Radius. Aus statischen Gründen bilden sich überall, wo sich drei Seifenhäute treffen, 120° -Winkel. Berechne
- den Flächeninhalt der Trennwand
 - den Inhalt der Pärchenoberfläche (ohne Trennwand!)
 - das Volumen des Pärchens.
29. Eine punktförmige Lichtquelle beleuchtet eine Kugel von 10 cm Radius. Kugelmittelpunkt und Lichtquelle haben die Entfernung
- 11 cm
 - 20 cm
 - 10 m.
- Wie viel Prozent der Kugeloberfläche ist im Licht?
30. KONKAVKONVEX
Die Linse einer Lesebrille ist von zwei Kugelflächen begrenzt. Welche Masse haben beide Gläser? (Glasdichte von $2,5 \text{ g/cm}^3$)



5. Kapitel Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

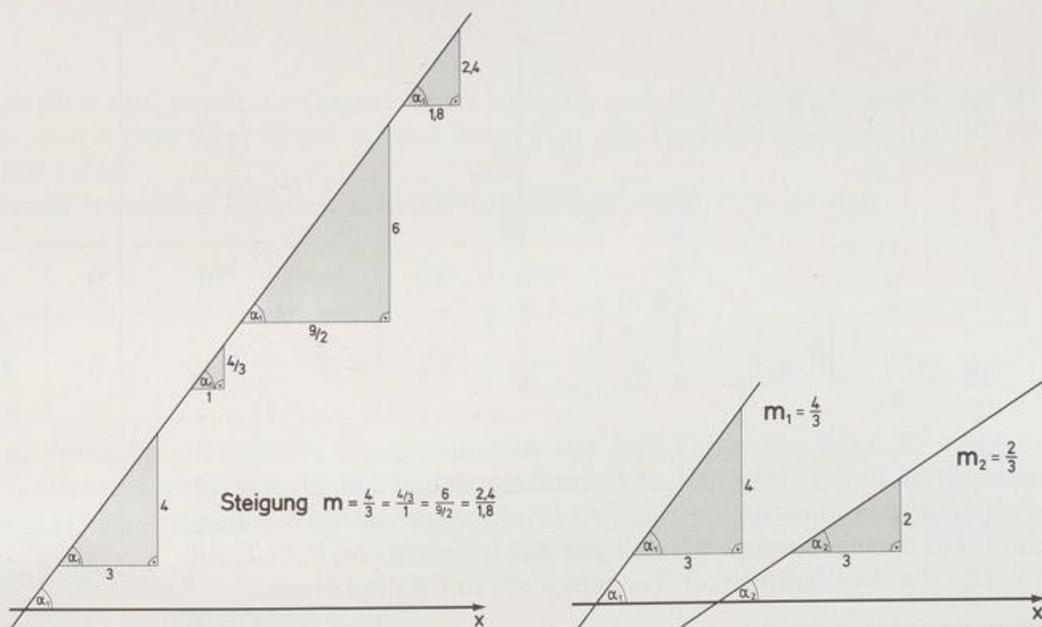


Zahnradbahn bei Mürren, im Hintergrund der Eiger

Bei vielen geometrischen Problemen sucht man die Längen von Seiten oder die Größe von Winkeln einer Figur, die durch gegebene Stücke festgelegt ist – zum Beispiel: Wie lang ist a und wie groß ist γ im Dreieck mit $b = 4$, $c = 6$ und $\alpha = 70^\circ$? Solche Aufgaben haben wir bisher durch Konstruktion gelöst. Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt dabei von der Zeichen- und Messgenauigkeit ab. Meistens kann man Strecken höchstens auf 0,5 mm und Winkel höchstens auf $0,5^\circ$ genau zeichnen und messen. Will man die Genauigkeit steigern, dann hilft nur noch rechnen. Der Strahlensatz und die Flächensätze fürs rechtwinklige Dreieck haben uns manchmal schon die Möglichkeit gegeben, Streckenlängen rechnerisch exakt zu bestimmen.

Die Trigonometrie ist der Zweig der Mathematik, der sich mit der Berechnung von Seiten und Winkeln im allgemeinen Dreieck befasst. Konstruktionen sind dann entbehrlich. Man löst eine Aufgabe algebraisch, das Ergebnis ist ein Rechenausdruck, eine algebraische Formel. Solche Formeln erlauben eine schnelle, sichere und beliebig genaue Berechnung der gesuchten Stücke. Die Trigonometrie ist eine unerlässliche Voraussetzung für viele Berechnungen in der Astronomie, der Landvermessung, der Navigation, im Bauwesen, im Maschinenbau und in der Elektrotechnik.

Das rechtwinklige Dreieck ist die Grundfigur der Trigonometrie. Mit ihm fangen wir an.



5.1 Tangens

In ähnlichen Dreiecken sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich. Beim Steigungsdreieck einer Gerade ($m > 0$) haben wir ein solches Verhältnis schon kennen gelernt: Den Quotienten von senkrechter und waagrechter Kathete haben wir Steigung m genannt. Je größer die Steigung ist, desto größer ist der Winkel α zwischen Gerade und x -Achse. Zu jedem Neigungswinkel α gehört eindeutig eine Steigung m , in der Trigonometrie nennen wir sie den Tangens von α , kurz $m = \tan \alpha$. Dieses Kathetenverhältnis verwenden wir auch in andern rechtwinkligen Dreiecken. Wir bezeichnen die Kathete am Scheitel von α als **Ankathete** (von α) und die gegenüberliegende als **Gegenkathete** (von α) und definieren:

Von einigen besonderen Winkeln finden wir leicht die exakten Tangenswerte:

Gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck: $\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$.

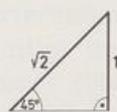
Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:

die eine Kathete ist 1,

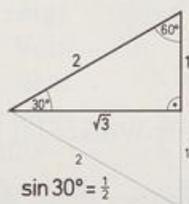
die andere Kathete ist nach Pythagoras

$$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Schrumpft α und damit die Gegenkathete auf null, so ergibt sich als Grenzfall $\tan 0^\circ = 0$. Nähert sich α dem Wert 90° , so wächst $\tan \alpha$ über alle Grenzen, das heißt, $\tan 90^\circ$ ist keine (endliche) Zahl.

Weil diese speziellen Tangenswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Andere Werte beschaffen wir uns gewöhnlich mit dem Taschenrechner. Arbeiten wir mit dem Gradmaß, dann muss der Rechner im DEG-Modus sein (DEGree = Grad). Man gibt den Winkelwert ohne das $^\circ$ -Symbol ein, die $\boxed{\tan}$ -Taste liefert dann den Tangenswert.

$$\tan 37,8^\circ \approx 0,78$$

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}} \boxed{37.8} \boxed{\tan}$

Anzeige: $\boxed{0.7756795}$

Umgekehrt finden wir mit dem Taschenrechner auch einen Winkel, dessen Tangens bekannt ist. Zuständig für die Umkehrung ist die $\boxed{\text{INV}}$ -Taste (INVers = umgekehrt).

$$\tan \varphi = 0,24; \varphi = ?$$

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}} \boxed{0.24} \boxed{\text{INV}} \boxed{\tan}$

Anzeige: $\boxed{13.49573328} \quad \varphi \approx 13,5^\circ$

Wir vereinbaren: Näherungswerte für Winkel geben wir auf Zehntelgrad gerundet an.

Arbeiten wir im Bogenmaß, dann muss der Rechner im RAD-Modus sein (RADius = Strahl).

$$\tan 0,83 \approx 1,09$$

Tastenfolge: **[RAD]** **[0.83]** **[tan]**

Anzeige: **[1.0934329]**

umgekehrt:

$$\tan \varphi = 2,71; \varphi = ?$$

Tastenfolge: **[RAD]** **[2.71]** **[INV]** **[tan]**

Anzeige: **[1.217293]** $\varphi = 1,22$

Wir vereinbaren: Näherungswerte für Winkel im Bogenmaß geben wir auf Hundertstel gerundet an.

Wie findet eigentlich der Taschenrechner diese Werte? Weil er nur die vier Grundrechenarten beherrscht, muss er mit einer Formel arbeiten, die $\tan x$ durch ein Polynom annähert, zum Beispiel

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

Hier muss x im Bogenmaß sein. Gibt man einen Wert im Gradmaß ein, dann wandelt ihn der Rechner vorher erst ins Bogenmaß um. Wir berechnen einen Näherungswert für $\tan 0,5$ und vergleichen ihn mit dem Knopfdruck-Wert des Rechners:

$$\tan 0,5 \approx 0,5462977 \quad (\text{Polynom vom Grad 9})$$

$$\tan 0,5 = 0,5463024 \dots \quad (\text{Knopfdruck-Wert})$$

Die Umkehrung des Tangens **[INV]** **[tan]** heißt in der Mathematik \arctan (Arkus Tangens). Der Rechner bewältigt sie mit der Formel

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots$$

Auch hier ist $\arctan x$ ein Bogenmaß-Wert. Wir berechnen einen Näherungswert für $\arctan 0,456$ und vergleichen ihn mit dem Knopfdruck-Wert des Rechners:

$$\arctan 0,456 \approx 0,427846 \quad (\text{Polynom vom Grad 9})$$

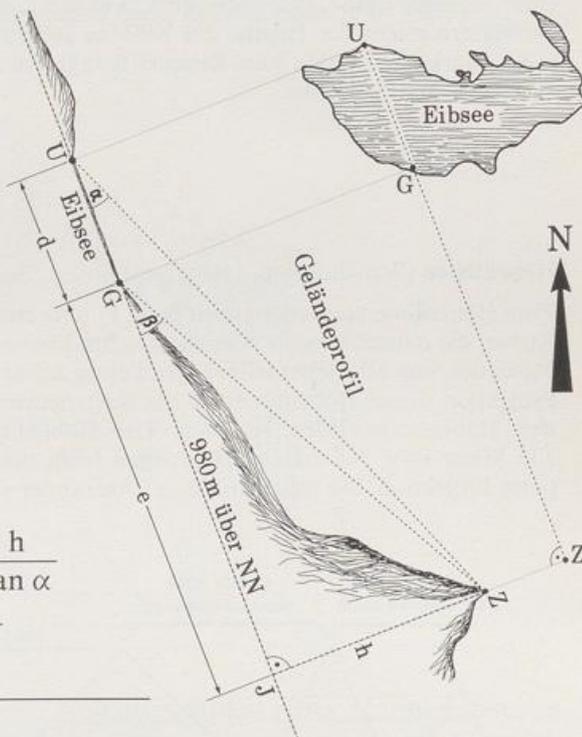
$$\arctan 0,456 = 0,427832 \dots \quad (\text{Knopfdruck-Wert})$$

Die letzte Formel klappt nur für x -Werte zwischen -1 und $+1$ und zwar um so besser, je näher der x -Wert bei null liegt.

Die Steilheit von Strecken gibt man mit der Steigung an, also dem Tangens des Neigungswinkels, in Prozent oder Promille. Die berühmt-berüchtigte Zirlerbergstraße hatte vor dem Umbau eine maximale Steigung von 24%, als größten Neigungswinkel also $13,5^\circ$. Wegen der vielen Unfälle hat man sie entschärft und auf eine Höchststeigung von 17% ($9,6^\circ$) abgeflacht. Im Folgenden sehen wir eine Übersicht über die üblichen Höchstwerte von Steigungen:

- Passstraße: 30 %
- Nebenstraße: 20 %
- Autobahn: 3 % (wegen langer Bremswege von Lastzügen bei Abwärtsfahrt)
- Eisenbahn: 3 % für Personenverkehr, 1 % für Personen- und Güterverkehr
- U-Bahn: 10 % (wegen Allradantrieb und wetterunabhängiger Schienenoberfläche)
- Zahnradbahn: 25 %, Idealwert (Zugspitzbahn, Jungfrau-Bahn)
48 % Höchstwert auf der Pilatus-Bahn (Schweiz)
- Kabelbahn: 20 % (San Francisco)
- Standseilbahn: 90 % (Großglockner-Gletscher-Bahn)
- Drahtseilbahn: 100 % und mehr

Ein Beispiel aus der Landvermessung zeigt, was der Tangens noch alles kann. Vom Punkt U am Ufer des Eibsees (980 m über NN) sieht man einen Berggipfel unter einem Neigungswinkel $\alpha = 22,23^\circ$. Vom gegenüberliegenden Uferpunkt G aus misst man den Neigungswinkel $\beta = 28,18^\circ$. Wie hoch liegt der Gipfel über NN, wenn die Messpunkte eine Standlinie von $\overline{UG} = 1150$ m Länge festlegen? (NN ist die Abkürzung für Normalnull, das ist der Meeresspiegel.)



Lösung: $\tan \alpha = \frac{h}{e+d}$ also I $e+d = \frac{h}{\tan \alpha}$
 $\tan \beta = \frac{h}{e}$ also II $e = \frac{h}{\tan \beta}$

$$\text{I-II} \quad d = \frac{h}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \beta}$$

$$h = \frac{d}{\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta}} = d \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

Messwerte einsetzen:

$$h = 1150 \text{ m} \cdot \frac{\tan 22,23^\circ \tan 28,18^\circ}{\tan 28,18^\circ - \tan 22,23^\circ} = 1982 \text{ m}$$

Der Berggipfel liegt $1982 \text{ m} + 980 \text{ m} = 2962 \text{ m}$ über Normalnull.

Für Wanderer und Reisende sind Landkarten das wichtigste Hilfsmittel, um sich in unbekannter Umgebung zurechtzufinden. So gibt es je nach Verwendungszweck Wanderkarten, Autokarten, Seekarten usw. Karten zeigen Landschaften im Grundriss. Alle Merkmale, die eine Landschaft prägen: Berge, Flüsse, Seen, Straßen und Ortschaften sollen gut erkennbar sein. Gewässer und Verkehrsnetze machen keine Schwierigkeiten: Weder dem Benutzer beim Studium der Karte noch dem Kartografen beim Entwerfen der

Karte, denn Flüsse, Küsten, Ufer, Straßen und Bahnlinien verlaufen im Wesentlichen zweidimensional, und zweidimensional ist ja der Grundriss, ist die Karte. Was der Grundriss aber nicht wiedergibt, das sind die Geländeformen: hoch oder tief, steil oder flach, Berg und Tal, also die Höhenunterschiede in der dritten Dimension. Die dritte Dimension auf dem ebenen Kartenblatt festzuhalten, dem Betrachter einen möglichst räumlichen, wirklichkeitsnahen Eindruck von Berg und Tal zu vermitteln, das war seit eh und je die größte Herausforderung an die Kartenzeichner. Erst im letzten Jahrhundert hat man diese Schwierigkeiten gemeistert. Heute verwenden die beiden wichtigsten Techniken Farben oder Höhenlinien zur Darstellung von Geländeformen.

Farben

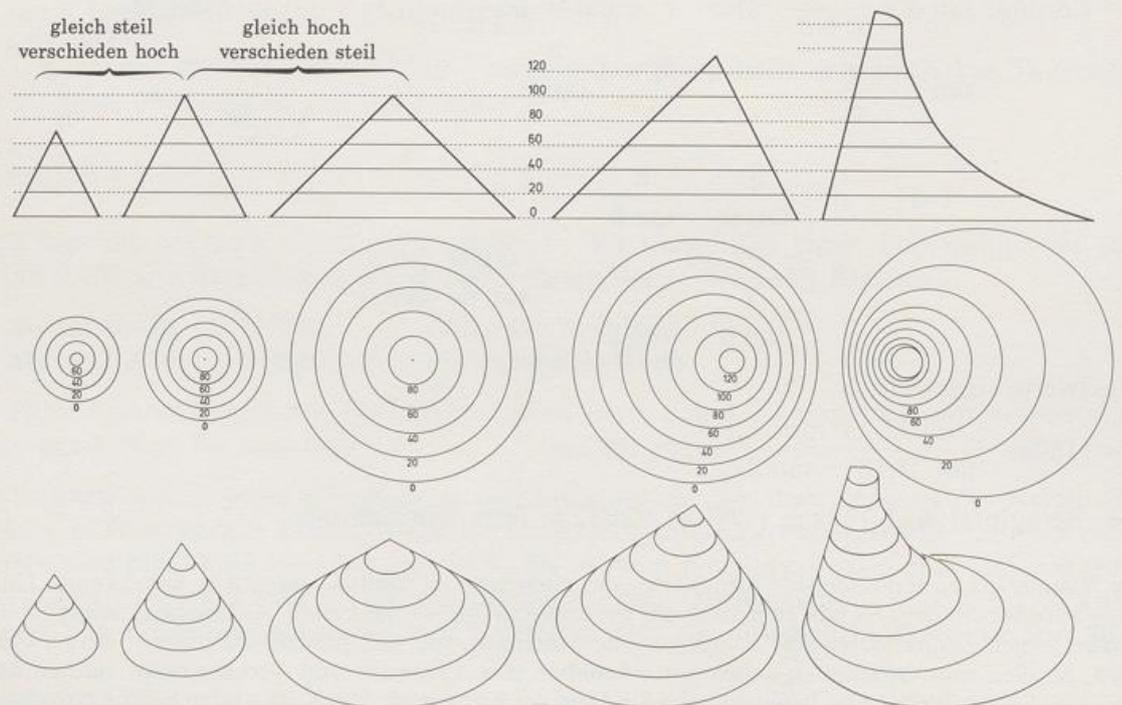
Das Gelände ist in Höhengschichten gegliedert. Jede Schicht ist mit einer eigenen Farbe gekennzeichnet. Für die Tiefenschichten in Gewässern reicht die Palette von hellblau (seicht) bis blauviolett (tief). Markante Punkte, zum Beispiel Berggipfel, sind mit Höhenzahlen (Koten) versehen.

Schicht (Meter)	Farbe
0– 100	Blaugrün
100– 200	Gelbgrün
200– 500	Gelb
500–1000	Hellbraun
1000–2000	Braun
2000–4000	Rotbraun
4000–...	Braunrot

(Zwischenstufen sind möglich)

Höhenlinien (Schichtlinien, Isohypsen)

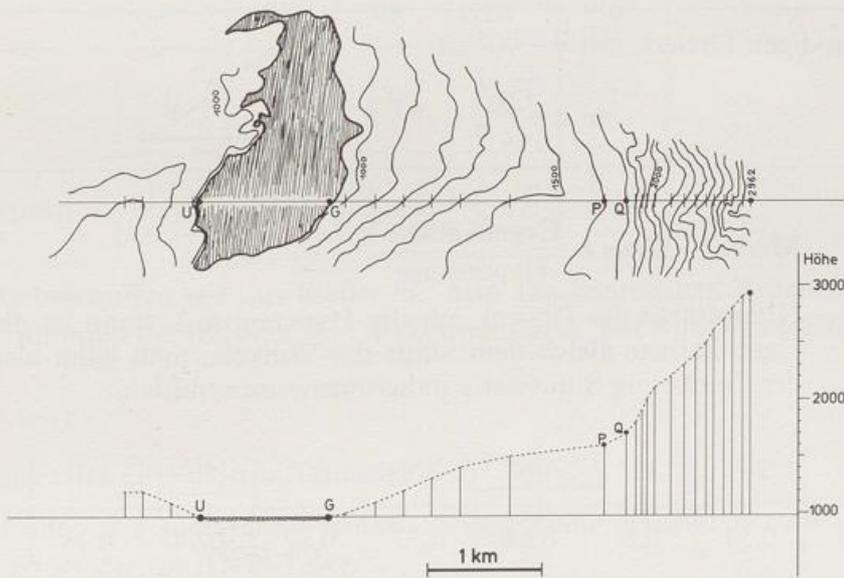
Eine Höhenlinie verbindet gleich hohe Punkte einer Geländefläche. Man kann sie sich auch vorstellen als Kurve, die entsteht, wenn eine waagrechte Ebene die Geländefläche schneidet. Die Höhenlinien sind die Schnittkurven der Geländefläche und einer Schar gleichabständiger, waagrechter Ebenen. Die senkrechte Projektion dieser Höhenlinien in die Kartenebene ergibt das Höhenlinienbild. Die Höhenlinien sind mit den Höhenliniennzahlen versehen. Die Höhenliniennzahl 200 beziehungsweise die Kote 200 bedeutet 200 Meter über Normalnull. Deswegen heißt die Höhenlinien-Darstellung in der Mathematik auch kotierte Projektion. Sie geht zurück auf Alexander von Humboldt, 1804.



Aus der Dichte der Höhenlinien schließt der Kartenleser zurück auf die Gestalt der Gelände­fläche: je enger, desto steiler – je weiter, desto flacher. Das Höhenlinienbild erlaubt es, ein Gelände­profil zu zeichnen (das ist der Verlauf des Geländes in einer senkrechten Ebene, siehe Bild mit Eibsee und Zugspitze S. 101). Das Gelände­profil gibt die verschiedenen Neigungswinkel in wahrer Größe wieder, es zeigt auch, ob es überhaupt möglich ist, vom Punkt G den Berggipfel optisch anzupeilen, ob also kein anderer Gipfel die Sicht behindert.

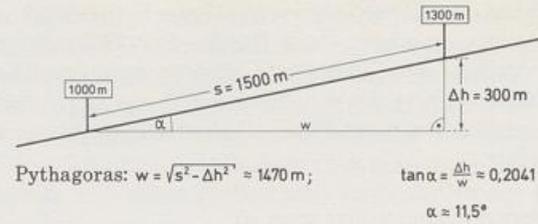
Ein Gelände­profil konstruiert man so:

Durch die waagrechte Grundlinie UG geht eine zur Karte senkrechte Ebene S. S schneidet die Gelände­fläche in der Kurve p, diese Schnittkurve p heißt Gelände­profil. Man schneidet UG mit den Höhenlinien; über den Schnittpunkten trägt man senkrecht zu UG die Höhenunterschiede an. Die Linie, die die Endpunkte verbindet, beschreibt näherungsweise den Verlauf des Geländes in dieser Schnittfläche, also das Gelände­profil und zwar um so besser, je kleiner der Unterschied benachbarter Höhenlinien ist.



Mit dem Tangens können wir leicht den mittleren Neigungswinkel eines Hangs zwischen zwei Orten P und Q bestimmen. Die waagrechte Ankathete w messen wir in der Karte ab (Maßstab beachten!), zum Beispiel $w = 190$ m. Die senkrechte Kathete s ist der Höhenunterschied, ihn zählt man an den Höhenlinien ab, zum Beispiel $s = 100$ m. Der mittlere Neigungswinkel ist dann $\arctan \frac{s}{w}$ oder im Beispiel $\arctan \frac{100}{190} \approx 27,8^\circ$.

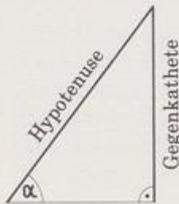
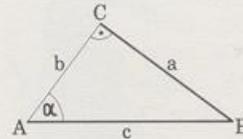
5.2 Sinus



An manchen Passstraßen zeigen Schilder die Höhe an. Hat man am Kilometerzähler die gefahrene Strecke s abgelesen, dann findet man auch mit diesen Werten den Neigungswinkel, siehe Bild. Will man den Neigungswinkel aus den gegebenen Werten direkt berechnen, dann braucht man einen Zusammenhang zwischen Winkel, Gegenkathete und Hypotenuse. Wir definieren:

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ ist:

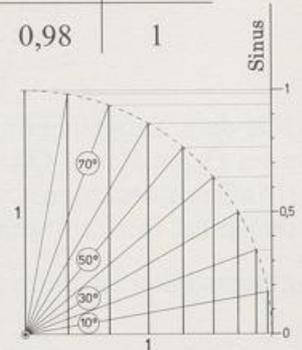
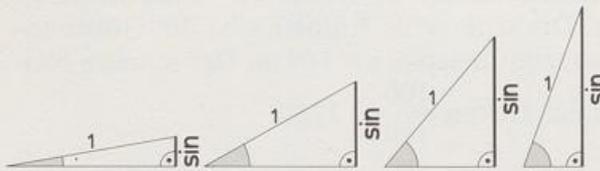
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



Merke: $\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Nimmt man ein Dreieck mit der Hypotenuse 1, dann ist die Länge der Gegenkathete gleich dem Sinus des Winkels; man kann also schon aus der Zeichnung Sinuswerte näherungsweise ermitteln:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \alpha$	0,17	0,34	0,5	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1

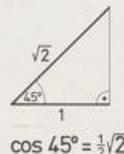


Weil die Gegenkathete immer kleiner ist als 1, ist der Sinus nicht größer als 1. Schrumpft α und damit die Gegenkathete auf 0, so ergibt sich als Grenzfall $\sin 0^\circ = 0$. Nähert sich α dem Wert 90° , dann nähert sich die Gegenkathete der Hypotenuse und ist im Grenzfall $\alpha = 90^\circ$ so lang wie sie. Deshalb legt man fest $\sin 90^\circ = 1$.

Von den drei Winkeln 30° , 45° und 60° finden wir leicht die exakten Sinuswerte:

Gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$



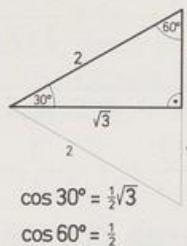
Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:

die eine Kathete ist 1,

die andre Kathete ist nach Pythagoras $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$



Weil diese speziellen Sinuswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1
Eselsbrücke	$\frac{1}{2} \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{4}$

Andere Werte beschaffen wir uns wieder mit dem Taschenrechner. Arbeiten wir mit dem Gradmaß, dann muss der Rechner im DEG-Modus sein. Die \sin -Taste liefert den Sinuswert.

$$\sin 37,8^\circ \approx 0,61$$

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{37.8}$ $\boxed{\sin}$ Anzeige: $\boxed{0.612907053}$

Umgekehrt finden wir auch einen Winkel, dessen Sinus bekannt ist. Zuständig für die Umkehrung ist wieder die INV -Taste.

$$\sin \varphi = 0,24; \quad \varphi = ?$$

Tastenfolge: $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{0,24}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\sin}$ Anzeige: $\boxed{13.88654036}$

$$\varphi = 13,9^\circ$$

Arbeiten wir im Bogenmaß, dann muss der Rechner im RAD-Modus sein.

$$\sin 0,83 = 0,74$$

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{0.83}$ $\boxed{\sin}$ Anzeige: $\boxed{0.737931371}$

und umgekehrt:

$$\sin \varphi = 0,51; \quad \varphi = ?$$

Tastenfolge: $\boxed{\text{RAD}}$ $\boxed{0.51}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\sin}$ Anzeige: $\boxed{0.53518479}$

$$\varphi = 0,54$$

Taschenrechner und Computer berechnen den Sinus und seine Umkehrung, den Arkus Sinus, mit Näherungspolynomen; x bzw. $\arcsin x$ ist der Winkel im Bogenmaß.

Beispiel:

$$\sin x = x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} x^9 - \dots \quad (x \text{ beliebig})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} x^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} x^9 + \dots \quad (|x| < 1)$$

Mit dem Sinus lassen sich Umfang und Fläche eines regelmäßigen Vielecks berechnen. Gegeben ist ein regelmäßiges Neuneck, das einem Kreis mit Radius r einbeschrieben ist. Gesucht sind Umfang u und Flächeninhalt F in Abhängigkeit von r sowie die Verhältnisse Vieleckumfang : Kreisumfang und Vieleckfläche : Kreisfläche.

Lösung: Weil das halbe Bestimmungsdreieck rechtwinklig ist, gilt $\sin 20^\circ = \frac{s/2}{r}$, also

$$s = 2r \sin 20^\circ$$

$$\text{der Umfang } u \text{ ist dann } u = 9s = 18r \sin 20^\circ.$$

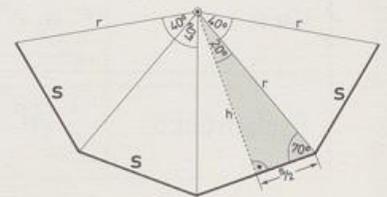
$$\text{Aus } \sin 70^\circ = \frac{h}{r} \text{ folgt } h = r \sin 70^\circ,$$

der Inhalt F ist dann

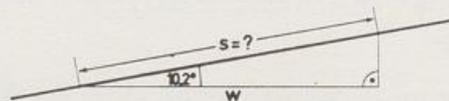
$$F = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \sin 20^\circ \cdot r \sin 70^\circ = 9r^2 \sin 20^\circ \sin 70^\circ.$$

$$\text{Umfangsverhältnis} = \frac{18r \sin 20^\circ}{2r\pi} = \frac{9 \sin 20^\circ}{\pi} \approx 98 \%$$

$$\text{Flächenverhältnis} = \frac{9r^2 \sin 20^\circ \sin 70^\circ}{r^2\pi} = \frac{9 \sin 20^\circ \sin 70^\circ}{\pi} \approx 92,1 \%$$



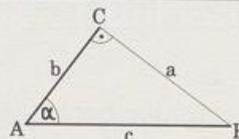
5.3 Kosinus

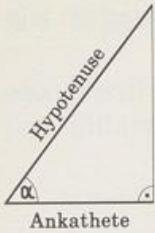


Eine Bergstraße hat laut Autokarte eine Steigung von 18 %, das heißt einen Neigungswinkel von $10,2^\circ$. Der Karte entnimmt man eine waagrechte Länge w von 4,8 km. Will man die wirkliche Streckenlänge s wissen, dann wäre es günstig, wenn man einen Zusammenhang zwischen Winkel, Ankathete und Hypotenuse hätte. Wir definieren ihn:

Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ ist:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

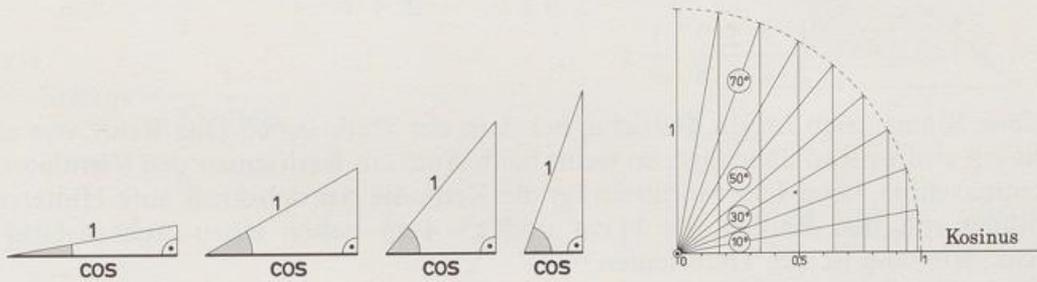




Merke: $\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Nimmt man ein Dreieck mit der Hypotenuse 1, dann ist die Länge der Ankathete gleich dem Kosinus des Winkels; man kann also schon aus der Zeichnung Kosinuswerte näherungsweise ermitteln:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos \alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17	0



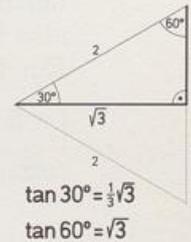
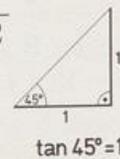
Weil die Ankathete immer kleiner ist als 1, ist der Kosinus nicht größer als 1. Wenn α immer kleiner wird, dann nähert sich die Ankathete der Hypotenuse und ist im Grenzfall $\alpha = 0^\circ$ so lang wie sie. Deshalb legt man fest, $\cos 0^\circ = 1$. Nähert sich α dem Wert 90° , dann schrumpft die Ankathete auf 0 und als Grenzfall ergibt sich $\cos 90^\circ = 0$.
Von den drei Winkeln 30° , 45° und 60° finden wir leicht die exakten Kosinuswerte:

Gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck: $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Halbes gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2:
die eine Kathete ist 1,

die andere Kathete ist nach Pythagoras $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.



Weil diese speziellen Kosinuswerte oft vorkommen, merkt man sie sich:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Eselsbrücke	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Andre Werte beschaffen wir uns wieder mit dem Taschenrechner. Das funktioniert so wie beim Sinus, bloß drückt man statt der $\boxed{\sin}$ -Taste jetzt die $\boxed{\cos}$ -Taste. Taschenrechner und Computer berechnen den Kosinus und seine Umkehrung, den Arkus Kosinus, mit Näherungspolynomen; x bzw. $\arccos x$ ist der Winkel im Bogenmaß.

Beispiel:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^8 - \dots \quad (x \text{ beliebig})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} x^7 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} x^9 - \dots \quad (|x| < 1)$$

Der offene Riementrieb ist ein Getriebe, bei dem ein Treibriemen eine Kraft von einem Rad auf ein anderes Rad überträgt. So treibt beim Auto ein Keilriemen den Ventilator und die Lichtmaschine, beim Fahrrad überträgt die Kette die Antriebskraft aufs Hinterrad. Zwei Räder mit den Radien $R = 11 \text{ cm}$ und $r = 4 \text{ cm}$ haben einen Achsabstand von $z = 17 \text{ cm}$. Wie lang ist der Treibriemen?

Lösung: Die Riemenlänge l setzt sich zusammen aus einem großen Bogen B , einem kleinen Bogen b und zwei Tangentenstücken t : $l = B + b + 2t$.

Der Winkel α ergibt sich aus $\sin \alpha = \frac{R-r}{z}$.

Für ein Tangentenstück t gilt $\frac{t}{z} = \cos \alpha$, also $t = z \cos \alpha$.

Der Bogen B gehört zum Mittelpunktswinkel $\pi + 2\alpha$, also $B = R(\pi + 2\alpha)$,

der Bogen b gehört zum Mittelpunktswinkel $\pi - 2\alpha$, also $b = r(\pi - 2\alpha)$.

Der Riemen hat die Länge

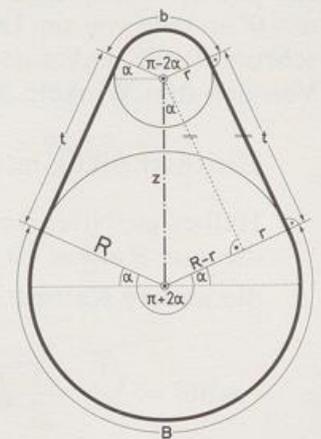
$$l = B + b + 2t = R(\pi + 2\alpha) + r(\pi - 2\alpha) + 2z \cos \alpha,$$

setzen wir die gegebenen Werte ein, so ergibt sich

$$\sin \alpha = \frac{11-4}{17} = \frac{7}{17}, \text{ also } \alpha = 0,4243 \dots \text{ (Bogenmaß!)}$$

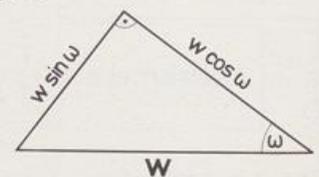
$$l = 43,89 \dots + 9,17 \dots + 30,98 \dots = 84,04 \dots$$

Der Riemen ist etwa 84 cm lang.



Weil Hypotenuse und ein anliegender Winkel die Katheten festlegen, bietet sich die Merkregel an:

Gegenkathete = Hypotenuse mal Sinus
Ankathete = Hypotenuse mal Kosinus



5.4 Das trigonometrische Sextett

Mit den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks lassen sich sechs Seitenverhältnisse bilden. Drei kennen wir schon, nämlich:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Die drei Neulinge sind davon die Kehrwerte:

$$\text{Kotangens} = \frac{1}{\text{Tangens}}$$

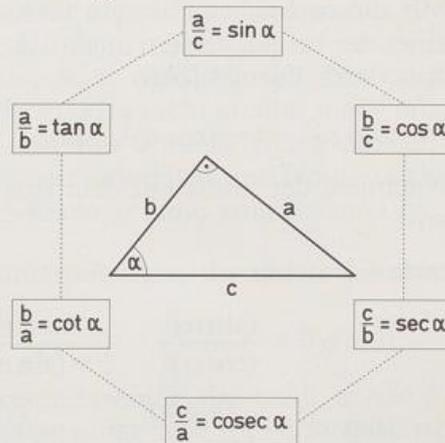
$$\text{Kosekans} = \frac{1}{\text{Sinus}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{Sekans} = \frac{1}{\text{Kosinus}}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$



Weil sich Kotangens, Kosekans und Sekans so einfach mit Tangens, Sinus und Kosinus ausdrücken lassen, verwendet man sie kaum. Auch wir werden künftig nur mit den drei wichtigen Verhältnissen Tangens, Sinus und Kosinus arbeiten; auch sie sind eng miteinander verwandt.

Zusammenhang zwischen Tangens, Sinus und Kosinus

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$$

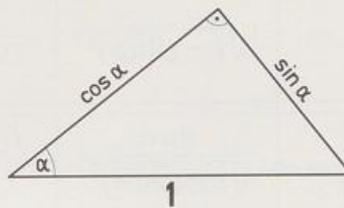
Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Trigonometrischer Pythagoras



Die Schreibung $(\sin \alpha)^2$ bedeutet $(\sin \alpha) \cdot (\sin \alpha)$. Aus Bequemlichkeit verwendet man jedoch leider oft eine »schnellere«, aber leicht missverständliche Abkürzung und schreibt $(\sin \alpha) \cdot (\sin \alpha) = \sin^2 \alpha$. Hält man sich aber an die Regeln, dann ist $\sin^2 \alpha = \sin(\sin \alpha)$. Entsprechend ist $\sin^{-1} \alpha = \arcsin \alpha$; \sin^{-1} ist also die Umkehrung von \sin , aber nicht der

Kehrwert $\frac{1}{\sin}$! Der Taschenrechner liefert $\sin^{-1} \alpha$ entweder über eine eigene Taste $\boxed{\sin^{-1}}$ oder mit der Tastenfolge $\boxed{\text{INV}} \boxed{\sin}$. Für $(\sin \alpha)^{-1} = \frac{1}{\sin \alpha}$ verlangt der Taschenrechner die Tastenfolge $\boxed{\sin} \boxed{1/x}$.

Mit diesen beiden Formeln lässt sich jedes der drei Verhältnisse \tan , \sin und \cos durch eines der beiden andern ausdrücken, zum Beispiel der Sinus durch Kosinus oder Tangens. Aus der 2. Formel folgt

$$(\sin \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2, \quad \text{also} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} \quad (\sin \alpha \geq 0)$$

Nachdem der Sinus mit dem Kosinus beschrieben ist, drücken wir ihn mit dem Tangens aus:

erste Formel quadrieren:

$$(\tan \alpha)^2 = \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{(\sin \alpha)^2}{1 - (\sin \alpha)^2} \quad (\alpha < 90^\circ)$$

$$(\tan \alpha)^2 = \frac{(\sin \alpha)^2}{1 - (\sin \alpha)^2} \quad \text{nach } \sin \alpha \text{ auflösen}$$

$$(\tan \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 (\tan \alpha)^2 = (\sin \alpha)^2$$

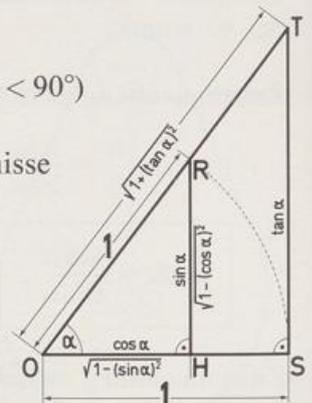
$$(\tan \alpha)^2 = (\sin \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 (\tan \alpha)^2$$

$$(\tan \alpha)^2 = (\sin \alpha)^2 [1 + (\tan \alpha)^2]$$

$$\frac{(\tan \alpha)^2}{1 + (\tan \alpha)^2} = (\sin \alpha)^2, \quad \text{also} \quad \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}} \quad (0^\circ \leq \alpha < 90^\circ)$$

Die Tabelle gibt einen Überblick über alle Verwandtschaftsverhältnisse von \sin , \cos und \tan .

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\sin \alpha$	☆	$\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2}$	☆	$\frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2}}$	$\frac{\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}}{\cos \alpha}$	☆



$$\triangle OHR \sim \triangle OST$$

$$\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}}$$

$$\frac{\cos \alpha}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2}} \\ \frac{\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}}{\cos \alpha} \end{aligned} \right\} = \frac{\tan \alpha}{1}$$

Diese sechs Beziehungen findet man auch mit einem Blick auf eine passende Figur. Die drei Wurzeln liefert uns Pythagoras, den Rest die Ähnlichkeit.

Mit diesen Formeln kann man zum Beispiel $\tan \alpha$ und $\sin \alpha$ exakt aus $\cos \alpha$ berechnen, ohne sich um den Winkel α zu kümmern:

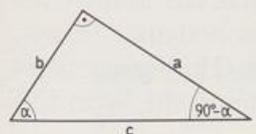
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}; \text{ es gilt } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \text{ und } \tan \alpha = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

Es gibt einige Winkel, deren sin-, cos- und tan-Werte rational sind, zum Beispiel $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\tan 45^\circ = 1$. Manchmal sind die Werte zwar irrational, aber wenigstens mit Wurzeln darstellbar, zum Beispiel $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$. Wählt man aber einen Winkel auf gut Glück, so wird sein sin-, cos- und tan-Wert im Normalfall eine transzendente Zahl sein (wie π), also nicht einmal mehr mit Wurzeln darstellbar sein. Der Taschenrechner arbeitet mit nur endlich vielen Stellen, kennt also keine irrationalen Zahlen, kann also nicht zwischen rationalen und irrationalen (oder sogar transzendenten) Werten unterscheiden. Unser Rechner kann zum Beispiel die

transzendente Zahl $\sin 25^\circ = \boxed{0,422618261}$ nicht mehr unterscheiden von der rationalen Zahl $\frac{9604}{22725} = \boxed{0,422618261}$.

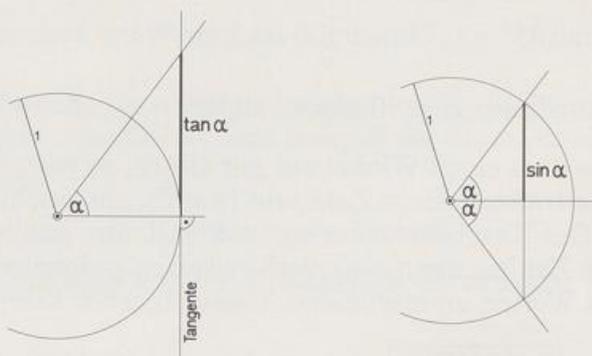
Ist γ im Dreieck ein rechter Winkel, dann sind α und β komplementär, das heißt, α und β ergänzen sich zu 90° , also $\alpha + \beta = 90^\circ$. α ist der Komplementwinkel von β und umgekehrt ist β der Komplementwinkel von α . Für Komplementwinkel gelten die **Komplementformeln**:



	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	}	also	$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$	
				$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
	$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	}	also	$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
				$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$	$\sin 22^\circ = \cos(90^\circ - 22^\circ) = \sin 68^\circ$
	$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a}$	}	also	$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\cot(90^\circ - \alpha)} = \frac{b}{a}$	$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$
				$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\cot(90^\circ - \alpha)} = \frac{b}{a}$	$\frac{1}{\tan 73^\circ} = \tan(90^\circ - 73^\circ) = \tan 17^\circ$
	$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{a}{b}$	}	also	$\cot(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} = \frac{a}{b}$	$\cot(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$
				$\cot(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} = \frac{a}{b}$	

Die Komplementformeln erklären auch die Vorsilbe »Ko« bei Kosinus, Kotangens und Kosekans, denn: Der Ko-Sinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Ko-Winkels. Entsprechendes gilt bei Tangens und Sekans.

Die Bezeichnungen Tangens und Sinus stammen aus dem Lateinischen. Am Einfachsten ist die Erklärung von Tangens. Die Schenkel des Winkels α schneiden aus der Tangente am Einheitskreis eine Strecke der Länge $\tan \alpha$ aus.



Der Sinus ist auf abenteuerliche Weise zu seinem Namen gekommen. Der indische Astronom und Mathematiker ARYABHATA bezeichnete die halbe Sehne des doppelten Winkels im Einheitskreis – also den Sinus des Winkels – mit *ardhajiva* oder auch kurz *jiva* (gesprochen dschiva). Die Araber, die einen Großteil ihrer Mathematik von den Indern gelernt haben, übernahmen das Sanskritwort *jiva* als Fremdwort ins Arabische. Weil die arabischen Buchstaben nur Konsonanten sind, besteht dieses Wort nur aus den beiden Buchstaben dsch und b: *dschb* (gesprochen dschiba). Doch es gibt auch ein arabisches Wort, das man genauso schreibt, aber anders spricht: *dschaib* und das bedeutet Busen. Bei der Übersetzung vom Arabischen ins Lateinische hielt man *dschiba* (Halbsehnenverhältnis) für *dschaib* (Busen) und übersetzte es mit *sinus*, *sinus* ist das lateinische Wort für Busen.

Aufgaben zu 5.1

1. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Gradmaß!)

	15°	1°	1'	89,9°					
tan α					$\sqrt{2} - 1$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Bogenmaß!)

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$		
tan x							1,55741	2 1990

3. Berechne Näherungswerte für $\tan x$ mit dem Näherungspolynom von Seite 100 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\tan}$ -Wert des Taschenrechners.

a) $x = 0,1$ b) $x = 1,1$ c) $x = 0,785$ d) $x = 30^\circ$

4. Berechne Näherungswerte für x mit dem Näherungspolynom von Seite 100 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{INV}} \boxed{\tan}$ -Wert des Taschenrechners.

a) $\tan x = 0,546$ b) $\tan x = 0,1$
 c) $\tan x = 3$ d) $\tan x = \pi$

5. Bestimme mit dem Taschenrechner.

a) $\tan 20^\circ + \tan 30^\circ - \tan (20^\circ + 30^\circ)$

b) $\tan 2^\circ + \tan 3^\circ - \tan (2^\circ + 3^\circ)$

c) $\tan 0,2^\circ + \tan 0,3^\circ - \tan (0,2^\circ + 0,3^\circ)$

d) $\frac{\tan 20^\circ + \tan 30^\circ}{\tan (20^\circ + 30^\circ)}$ e) $\frac{\tan 2^\circ + \tan 3^\circ}{\tan (2^\circ + 3^\circ)}$

f) $\frac{\tan 0,2^\circ + \tan 0,3^\circ}{\tan (0,2^\circ + 0,3^\circ)}$

6. Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\tan 30^\circ + \tan 30^\circ - \tan (30^\circ + 30^\circ)$

b) $\tan 45^\circ + \tan 45^\circ - \tan (45^\circ + 45^\circ)$

c) $\frac{2 \cdot \tan 30^\circ}{\tan (2 \cdot 30^\circ)}$

7. Bestimme α mit dem Taschenrechner.

a) $\tan \alpha - \sqrt{3} = 2$ b) $3 \tan \alpha = \frac{178}{257}$ c) $\frac{92}{\tan \alpha} = 369$

d) $\frac{1}{3} \tan 3\alpha = \frac{33}{38}$ e) $2 \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{352}{353}$ f) $\frac{177}{\tan \frac{\alpha}{2}} = 23^2$

8. Löse auf nach $\tan \alpha$ und berechne α ohne Taschenrechner.

a) $1 - \tan \alpha = 0$ b) $3 \tan \alpha - \sqrt{3} = 0$ c) $\sqrt{3} \tan \alpha - 3 = 0$

d) $(\sqrt{3} - \tan \alpha) \tan \alpha = 0$ e) $(\tan \alpha)^2 = \tan \alpha$

f) $\sqrt{3} \tan \alpha = (\tan \alpha)^2$ g) $3 (\tan \alpha)^2 + 3 = \sqrt{48} \tan \alpha$

h) $(\tan \alpha)^2 + \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) \tan \alpha$

9. Berechne die Neigungswinkel der Strecken, deren Steigungen auf Seite 101 angegeben sind.

10. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\gamma = 90^\circ$

α	15°	60°			89°	1°						
a	15		3	4	1	1	93	373	9	146	3542	294 269
b		1	4	3			373	93	4	65	1577	131 017

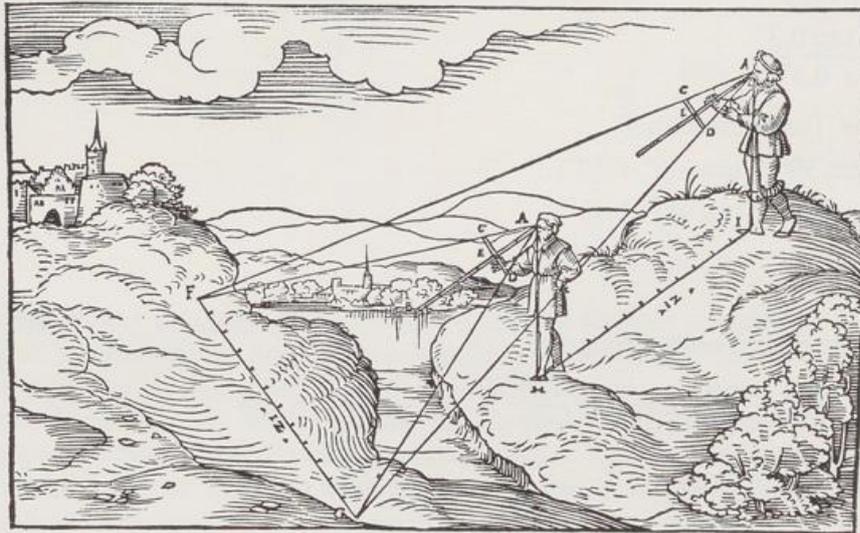
11. Eine Treppe soll einen Neigungswinkel von 32° bekommen. Die Stufen sind 15 cm hoch. Berechne die Stufenbreite.

12. JAKOBSTAB

Der Jakobstab ist ein einfaches Gerät zum Messen von Winkeln. Er ist um 1300 erfunden worden und war im Mittelalter ein viel gebrauchter Winkelmesser in Astronomie, Seefahrt und Landvermessung. Er besteht aus einem Längsstab mit Skala;

auf diesem lässt sich ein dazu senkrechter Querstab bekannter Länge verschieben. Man peilt das Ziel von einem Ende des Längsstabs aus so an, dass es genau zwischen den Enden des Querstabs liegt.

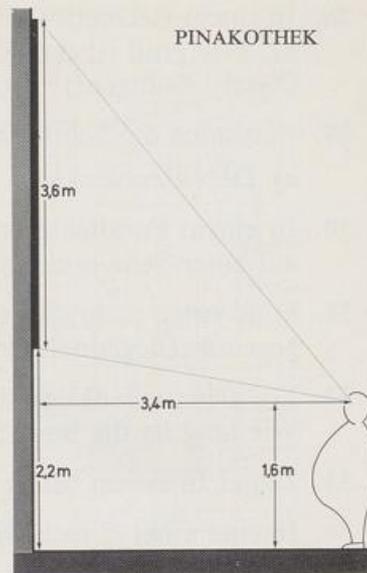
Beschreibe, wie man damit die Größe eines Winkels findet, und wende die Methoden an auf die Messwerte: Länge des Querstabs 30 cm, Abstand des Querstabs vom Auge 1,42 m.



13. Eine Fichte wirft einen 30 m langen Schatten; die Sonnenstrahlen sind 35° gegen die Waagrechte geneigt. Wie hoch ist die Fichte?
14. Unter **Mittagshöhe μ der Sonne** versteht man den größten Neigungswinkel der Sonnenstrahlen an einem Tag. Die Mittagshöhe erreicht ihren größten Wert zur Sonnenwende am 21. Juni mit $113,5^\circ - \varphi$ und ihren kleinsten Wert zur Sonnenwende am 22. Dezember mit $66,5^\circ - \varphi$; der Winkel φ ist die geografische Breite des betreffenden Orts.
Schlage φ deines Wohnorts nach und berechne die kleinste und größte Länge eines Schattens, den ein 1,80 m langer Mensch mittags in deinem Wohnort wirft. In welcher geografischen Breite wirft man am 21. Juni mittags keinen Schatten?
15. Unter welchem Neigungswinkel treffen Sonnenstrahlen auf, wenn ein senkrechter Pfahl einen Schatten wirft, der
 - a) doppelt so lang
 - b) halb so lang
 wie der Pfahl ist?
16. Die Höhe h der unteren Grenze einer Wolke über einem Flughafen kann man so finden: Ein Scheinwerfer strahlt sein Licht senkrecht nach oben. In der Entfernung d vom Scheinwerfer sieht man den Lichtfleck unterm Neigungswinkel α .
Drücke h allgemein aus mit d und α .

17. PINAKOTHEK

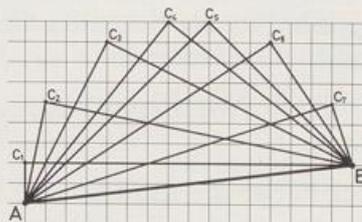
- a) Unter welchem Blickwinkel β_1 schaut Pummel aufs Bild?
- b) Unter welchem Blickwinkel β_2 betrachtet Pummel das Gemälde, wenn der untere Bildrand nur 1 m überm Boden ist?



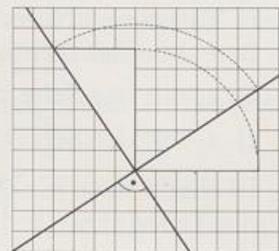
18. Den höchsten deutschen Kirchturm (162 m) hat das Ulmer Münster. In welcher Entfernung erscheint die Turmspitze unter einem Höhenwinkel von 13° ?
19. LEONARDOS Mona Lisa sitzt auf dem Schiefen Turm zu Pisa. Sie staunt und schweigt, der Turm ist ja um $4,6^\circ$ geneigt, sie schaut aus 55 m Höh herunter und lächelt nicht gerade munter, während sie darüber nachdenkt, wie weit sie von der Vertikale weghängt. So lächelt sie ewig und findet nicht, weils ihr an GEO 10 gebricht.
20. 5 mm dicke Regentropfen fallen mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 8 m/s. Unter welchem Winkel klatschen sie auf die Fensterscheiben eines mit 79,2 km/h fahrenden Zugs?
(Der Klatschwinkel ist 0° , wenn der Zug steht.)
21. In einer Karte (1 : 25 000) liegen die Höhenlinien mit den Koten 700 und 800 im Abstand von 9 mm. Welchen Neigungswinkel hat der Hang?
22. Ein Hang hat einen Neigungswinkel von $8,5^\circ$. Welchen Abstand haben die Höhenlinien mit den Koten 500 und 600 in einer Karte mit dem Maßstab 1 : 10 000?
23. In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Katheten die Längen $a = 12$ und $b = 5$. Berechne den Winkel, den die Seitenhalbierende
 - a) s_a mit der Seite a
 - b) s_b mit der Seite b
 - c) s_c mit der Seite c einschließt.
24. In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Katheten die Längen 5 und 12. Berechne die Teilwinkel, in die die Höhe den rechten Winkel zerlegt.
25. Die Diagonalen einer Raute haben die Längen 178 und 771. Bestimme die Winkel der Raute.
26. Eine Raute mit einem Winkel von 10° hat einen Flächeninhalt von 102. Wie lang sind die Diagonalen?
27. Ein 3,5 m hoher Bahndamm hat ein achsensymmetrisches Trapez als Querschnitt. Der Damm ist mit 10 m oben halb so breit wie unten. Bestimme den Böschungswinkel.

28. In einem Rechteck schneiden sich die Diagonalen unter 52° , eine Seite hat die Länge 82. Wie groß ist der Flächeninhalt?
(Zwei Lösungen!)
29. Bestimme die Schnittwinkel der Diagonalen eines
a) DIN-Rechtecks b) Goldenen Rechtecks.
30. In einem Parallelogramm misst ein Winkel 18° , eine Diagonale der Länge 13 steht auf einer Seite senkrecht. Bestimme die Fläche.
- 31. Falte einen rechteckigen Papierstreifen mit den Seitenlängen 3 und 17 so, dass sich gegenüberliegende Ecken decken. Welchen Winkel bilden Knick und Seite?
32. Ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Spitzenwinkel 64° hat den Flächeninhalt 40. Wie lang ist die Basis?
33. Zeige: In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1$.
34. In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind p und q die Hypotenusenabschnitte.
Zeige: $\tan \alpha = \sqrt{\frac{p}{q}}$
- 35. a) Ein regelmäßiges n-Eck habe den Inkreisradius 1. Drücke Umfang und Flächeninhalt mit dem Tangens des Mittelpunktswinkels aus und berechne die Verhältnisse Umfang(n-Eck)/Umfang(Inkreis) und Fläche(n-Eck)/(Inkreis).
 $n \in \{3, 5, 8\}$
- b) Ein regelmäßiges n-Eck habe den Inkreisradius 1. Drücke Umfang und Flächeninhalt allgemein mit dem Tangens des Mittelpunktswinkels aus und berechne mit dem Taschenrechner näherungsweise die Verhältnisse Umfang(n-Eck)/Umfang(Inkreis) und Fläche(n-Eck)/Fläche(Inkreis) für $n \in \{45, 90, 180, 360\}$.
36. THALES
[AB] ist die gemeinsame Seite von sieben rechtwinkligen Dreiecken. Bestimme die Winkel α_1 bis α_7 .

THALES



RECHTE WINKEL IM GITTER



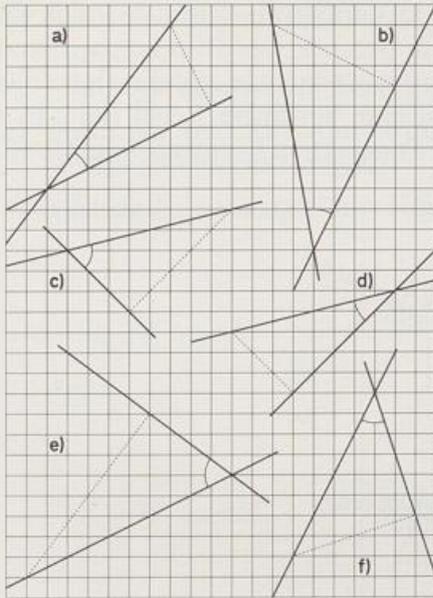
37. RECHTE WINKEL IM GITTER

Wie kannst du zu einer Gerade, die durch Gitterpunkte geht, allein mit dem Lineal ein Lot zeichnen?

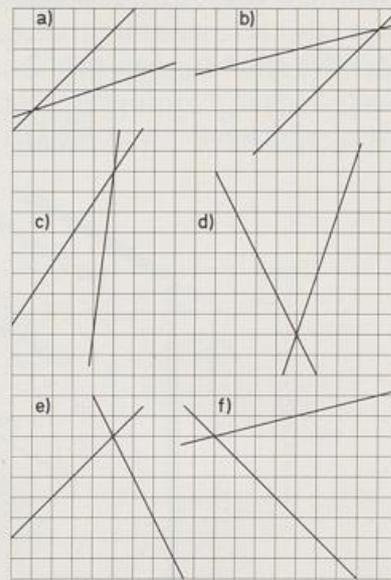
38. SCHNITTWINKEL I

Alle Strecken gehen durch Gitterpunkte und schneiden sich in Gitterpunkten. Berechne die Schnittwinkel einmal als Kombination zweier Neigungswinkel und einmal direkt mit der gestrichelten Hilfsstrecke (Lot).

SCHNITTWINKEL I



SCHNITTWINKEL II



39. SCHNITTWINKEL II

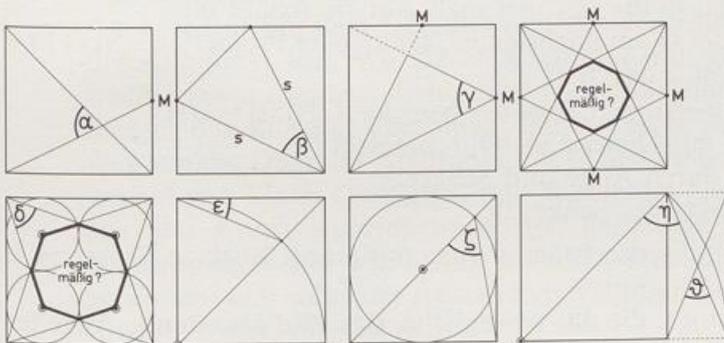
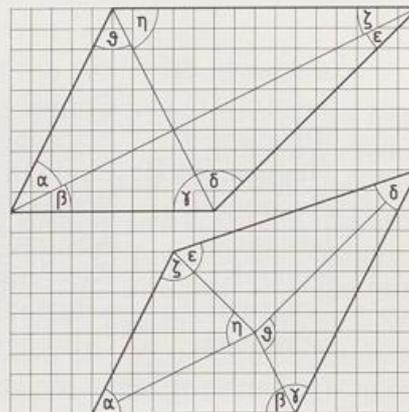
Alle Strecken gehen durch Gitterpunkte und schneiden sich in Gitterpunkten. Berechne die Schnittwinkel.

40. Bestimme die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem eine Kathete
 a) das arithmetische Mittel
 b) das geometrische Mittel der beiden andern Seiten ist.

41. TRAPEZWINKEL

Bestimme die Winkel α bis ϑ . (Rechte Winkel!)

TRAPEZWINKEL

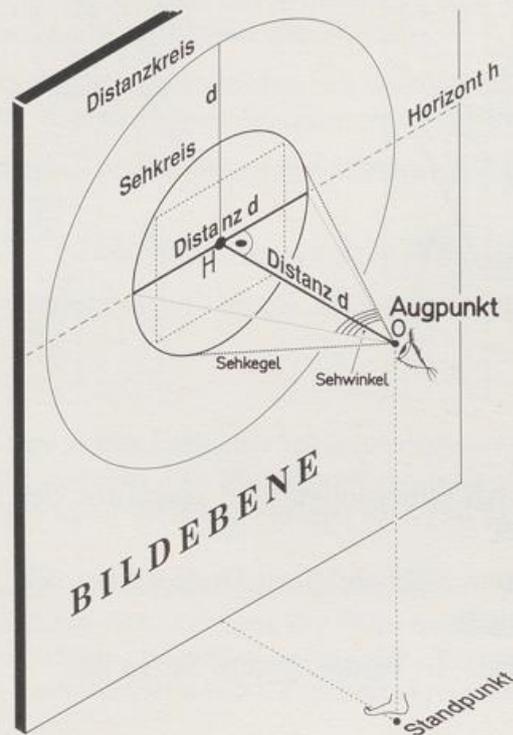


42. QUADRATWINKEL

In jeder Aufgabe ist ein Quadrat der Seitenlänge a die Ausgangsfigur – fürs Nachzeichnen sind 6 cm ratsam. Bestimme die Winkel α bis ϑ . (Rechte Winkel im Gitter lassen grüßen!)

43. SEHWINKEL

Will man eine Ansicht zeichnen oder malen, in der Strecken und Winkel vorkommen, also Häuser und Straßen, so wird man ein perspektives Bild konstruieren. Perspektive Bilder geben den Raum so naturgetreu wieder wie Fotografien (das sind auch perspektive Bilder), solange man sich an eine bewährte Regel hält. In dieser Faustregel kommen einige Grundbegriffe der Perspektive (Zentralprojektion) vor:



- Augpunkt O:** Ort des Maler- oder Betrachterauges oder Kameraobjektivs
Sehstrahl: Gerade durch O
Bildebene π : Zeichenebene; in ihr zeichnet man, auf sie schaut man
Hauptpunkt H: Punkt in π , der O am nächsten ist, senkrechte Projektion von O in π
Horizont h: Waagrechte in π durch H
Distanz d: Abstand Bild–Auge, Länge der Strecke [OH]: $d = \overline{OH}$
Sehkreis: Kreis um H mit Distanz als Durchmesser
Sehkegel: Sehstrahlen durch Auge und Sehkreis
Sehwinkel: Öffnungswinkel des Sehkegels

Im Sehkegel liegen die Dinge, die das (starre) Auge mit einem Blick in Richtung H noch wahrnimmt.

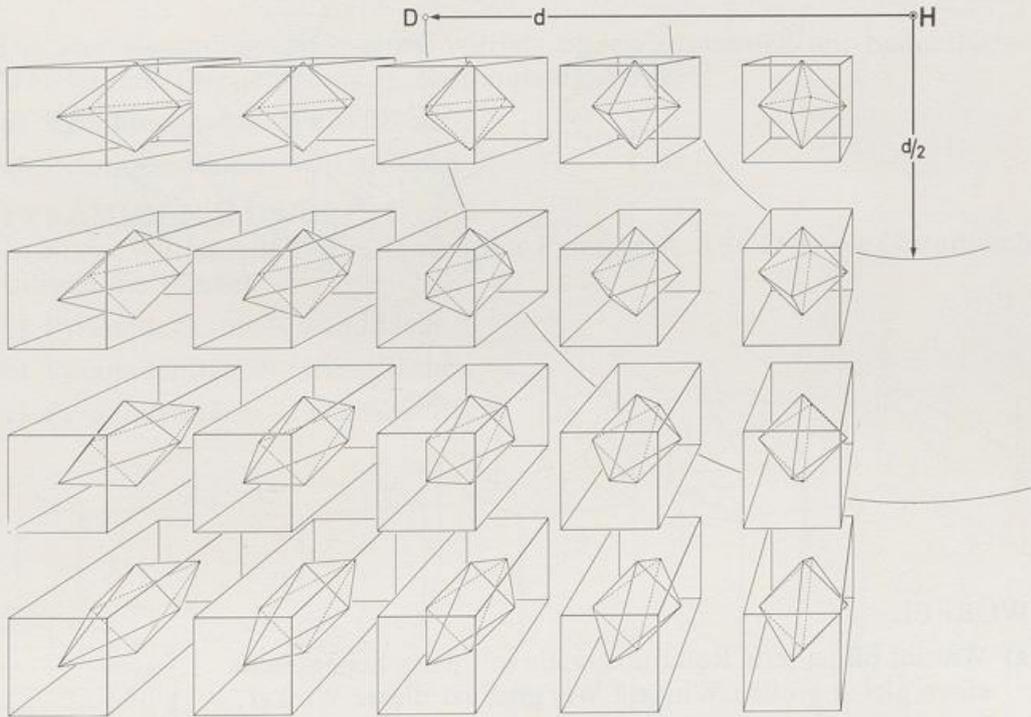
Im Distanzkegel liegen die Dinge, die das bewegliche, das Bild abtastende Auge bei starrer Kopfhaltung noch wahrnimmt.

Faustregel: Der Bildinhalt soll im Sehkreis liegen.

Die Distanz soll mindestens 25 cm sein.

Beim Fotografieren bedeutet die Distanz d die Brennweite f des Objektivs und der Sehwinkel den Aufnahmewinkel des Objektivs.

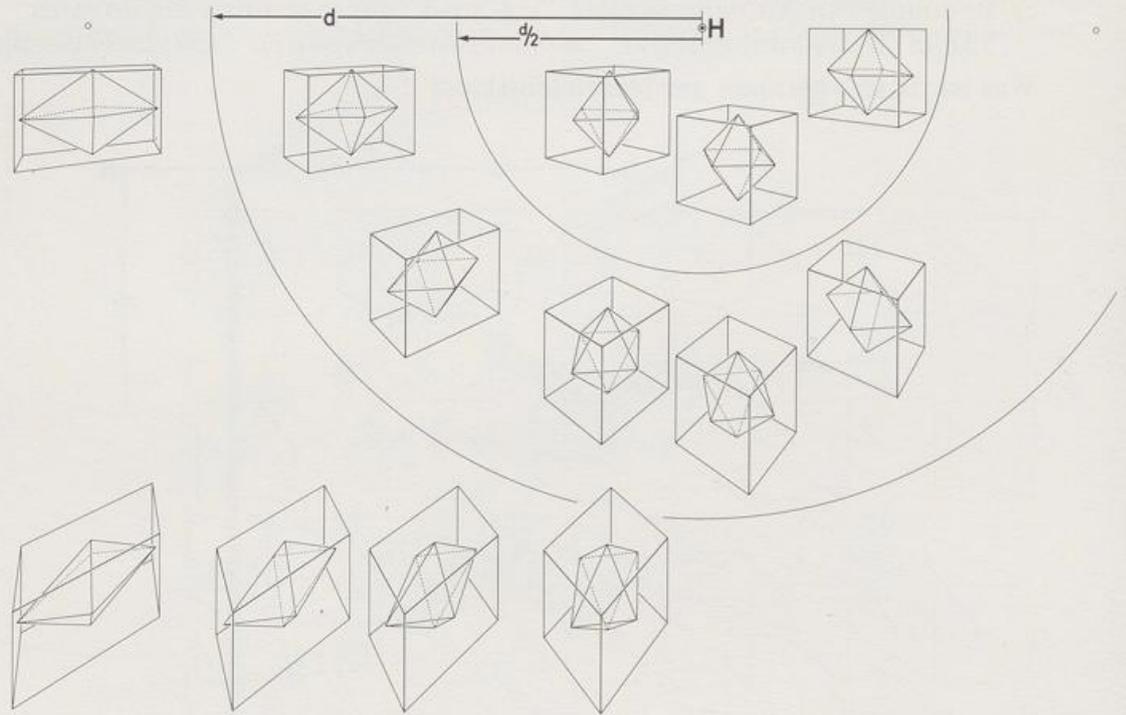
- a) Bestimme den Schwinkel im Bild Seite 118.
- b) Bestimme den Aufnahmewinkel für Kleinbildkameras (24×36) mit den Brennweiten
35 mm (Weitwinkelobjektiv), 50 mm (Normalobjektiv), 300 mm (Teleobjektiv)
- c) Bestimme den Aufnahmewinkel für 6×6 -Kameras mit den Brennweiten
50 mm (Weitwinkelobjektiv), 80 mm (Normalobjektiv), 500 mm (Teleobjektiv)
- Was ist da so »normal« am Normalobjektiv?



Mit dem Hauptpunkt H und der Distanz d legt der Zeichner die Perspektive fest, der Fotograf mit dem Objektiv und der Vergrößerung. Damit liegt in beiden Fällen der Augpunkt fest. Wo dieser Augpunkt nun genau **vorn** Bild liegt, weiß der Betrachter zwar meistens nicht, doch rein gefühlsmäßig sucht er sich einen Standort so, dass er das Bild gut überblickt, unbewusst bringt er so sein Auge in die Nähe des Augpunkts. Denn im Augpunkt hat er den besten Blick aufs Bild, hier sind die Sehwinkel von Maler (Fotograf) und Betrachter gleich. Wenn das Bild nach den »Regeln der Kunst«, sprich Faustregel hergestellt worden ist: Kein Bildteil ist vom Hauptpunkt weiter weg als die halbe Distanz, dann ist der richtige Standort schnell gefunden; und sollte der Abstand vom Bild größer sein, wirds kaum als störend empfunden – das Auge ist geduldig.

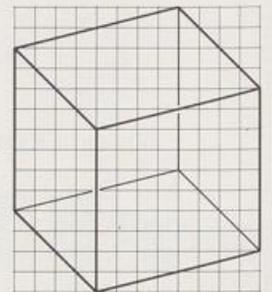
Aber die Geduld des Auges hat ihre Grenzen – und die liegen außerhalb des Distanzkreises: Je weiter Bildteile über den Sehkreis hinausragen, je mehr also der Sehbzw. Aufnahmewinkel die 50° -Grenze überschreitet, desto weniger natürlich, desto verzerrter wirken sie. Das liegt daran, dass der Betrachter von seiner Sehgewohnheit nicht abgeht und seinen Blickwinkel von 50° beibehält. Weitwinkelaufnahmen wir-

ken um so verzerrter, je kleiner die Brennweite ist. Doch keine Weitwinkelaufnahme ist verzerrt, kein perspektives Bild ist je verzerrt: Sobald nämlich der Betrachter das Auge im Augpunkt hat, muss er es zwar rollen, um alles zu erfassen, aber was er dann sieht, ist nicht verzerrt.



44. WÜRFEL

- Warum bildet jede Raumdiagonale mit jeder Seitenfläche einen gleich großen Winkel? Wie groß ist dieser Winkel?
- Warum schneidet jede Raumdiagonale eine andere in einem gleich großen Winkel? Wie groß ist dieser Winkel?

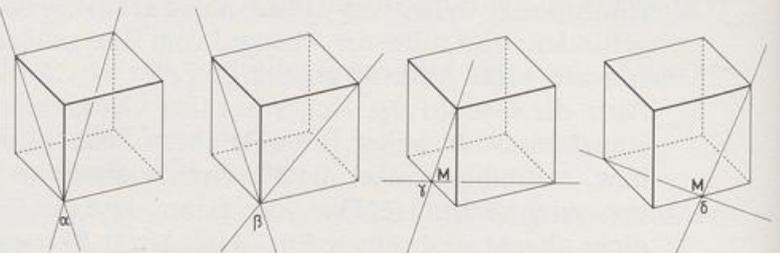


45. Welchen Winkel bilden die Seitenflächen eines regelmäßigen

- Tetraeders
- Oktaeders?

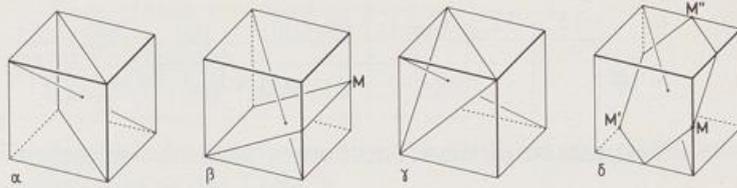
46. WINKEL IM WÜRFEL I

Bestimme die Winkel α bis δ .



• 47. WINKEL IM WÜRFEL II

Bestimme die Winkel α bis δ (zwischen der Raumdiagonale und der Fläche im Würfel).



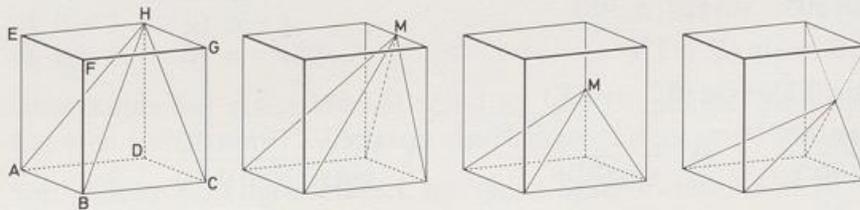
48. Die vier Raumdiagonalen eines Würfels bilden zusammen mit Seitenflächen des Würfels eine Doppelpyramide. Bestimme die Winkel

- Pyramidenkante–Würfel­fläche
- Pyramidenfläche–Würfel­fläche.

• 49. PYRAMIDEN IM WÜRFEL

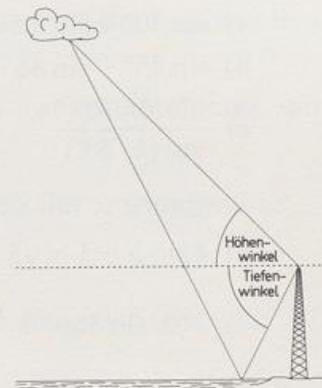
In einem Würfel $ABCDEFGH$ sind vier Pyramiden. $ABCD$ ist die Grundfläche. Bestimme die Winkel

- Pyramidenkante–Grundfläche
- Pyramidenfläche–Grundfläche
- Pyramidenfläche–Pyramidenfläche



• 50. WOLKENHÖHE

Von einem 70 m hohen Turm sieht man eine Wolke unter dem Höhenwinkel 45° und ihr Spiegelbild im See unter dem Tiefenwinkel von 50° . Wie hoch schwebt die Wolke überm See?



Aufgaben zu 5.2

1. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Gradmaß!)

α	15°	37°	1°	$1'$	$89,9$				
$\sin \alpha$						$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Bogenmaß!)

x	1	$0,1$	$0,0123$	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$			
$\sin x$							$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$

3. Berechne Näherungswerte für $\sin x$ mit dem Näherungspolynom von Seite 106 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\sin}$ -Wert des Taschenrechners.

a) $x = 0,1$ b) $x = 1,1$ c) $x = 0,785$ d) $x = 30^\circ$

4. Berechne Näherungswerte für x mit dem Näherungspolynom von Seite 106 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{INV}} \boxed{\sin}$ -Wert des Taschenrechners.

a) $\sin x = 0,546$

b) $\sin x = 0,1$

c) $\sin x = 0,3$

5. Bestimme mit dem Taschenrechner.

a) $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ - \sin (20^\circ + 30^\circ)$

b) $\sin 2^\circ + \sin 3^\circ - \sin (2^\circ + 3^\circ)$

c) $\sin 0,2^\circ + \sin 0,3^\circ - \sin (0,2^\circ + 0,3^\circ)$

d) $\frac{\sin 20^\circ + \sin 30^\circ}{\sin (20^\circ + 30^\circ)}$ e) $\frac{\sin 2^\circ + \sin 3^\circ}{\sin (2^\circ + 3^\circ)}$ f) $\frac{\sin 0,2^\circ + \sin 0,3^\circ}{\sin (0,2^\circ + 0,3^\circ)}$

6. Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\sin 30^\circ + \sin 30^\circ - \sin (30^\circ + 30^\circ)$

b) $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ - \sin (45^\circ + 45^\circ)$

c) $\frac{2 \cdot \sin 30^\circ}{\sin (2 \cdot 30^\circ)}$

7. Bestimme α mit dem Taschenrechner.

a) $4 \sin \alpha + 1 = \sqrt{5}$ b) $4 \sin 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$

c) $2\sqrt{2} \sin 3\alpha - 1 = \sqrt{3}$ d) $\frac{1 - \sqrt{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{6}$

8. Löse auf nach $\sin \alpha$ und berechne α ohne Taschenrechner.

a) $1 - 2 \sin \alpha = 0$ b) $2 \sin \alpha - \sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{2} \sin \alpha - 1 = 0$ d) $(\sqrt{2} - \sin \alpha) \sin \alpha = 0$

e) $(\sin \alpha)^2 = \sin \alpha$ f) $2(\sin \alpha)^2 = \sin \alpha$

g) $2(\sin \alpha)^2 + 1 = 3 \sin \alpha$ h) $(2 \sin \alpha)^2 + \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2}) \sin \alpha$

9. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\gamma = 90^\circ$

α	15°	60°		1°	89°				
a	15		3	1	1	239	191	489 061	560 123
c		1	5			638	1001	564 719	579 882

10. Das obere Ende einer 5 m langen Leiter erreicht an einer Hauswand eine Höhe von 4,5 m. Wie groß ist der Neigungswinkel der Leiter?

11. Eine Leiter bildet mit einer Hauswand einen Winkel von 20° , das untere Ende der Leiter ist 20 dm von der Hauswand entfernt. Wie lang ist die Leiter?

12. Im Deutschen Museum hängt ein 60 m langes Pendel. Jeden Tag wird es 140 cm waagrecht ausgelenkt. Berechne den Auslenkwinkel und die maximale Hubhöhe des Schwerpunkts.

• 13. Zeige: In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC gilt

$$\text{a) } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{2c}} \quad \text{b) } \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{2c}} .$$

14. Ein regelmäßiges n-Eck habe den Umkreisradius 1. Drücke Umfang und Flächeninhalt mit dem Sinus des Mittelpunktswinkels aus und berechne die Verhältnisse Umfang(n-Eck)/Umfang(Kreis) und Fläche(n-Eck)/Fläche(Kreis).

- a) $n = 3$ b) $n = 5$
 c) $n = 8$ d) $n = 180$

15. Eine Raute hat einen Winkel von 100° , die Diagonale, die diesen Winkel halbiert, hat eine Länge von 7. Wie groß sind Inkreisradius und Flächeninhalt der Raute?

16. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Spitzenwinkel von 30° und einen Umfang von 30. Wie groß sind Basis und Flächeninhalt?

17. In einem Kreis mit Radius 8 misst der zu einer Sehne gehörende Mittelpunktswinkel 144° . Wie lang ist die Sehne?

18. Der Einheitskreis sei Inkreis eines achsensymmetrischen Tangententrapezes, eine Basis habe die Länge 1.

- a) Wie groß ist ein Basiswinkel?
 b) Wie lang sind die Schenkel?
 c) Wie lang ist die andere Basis?

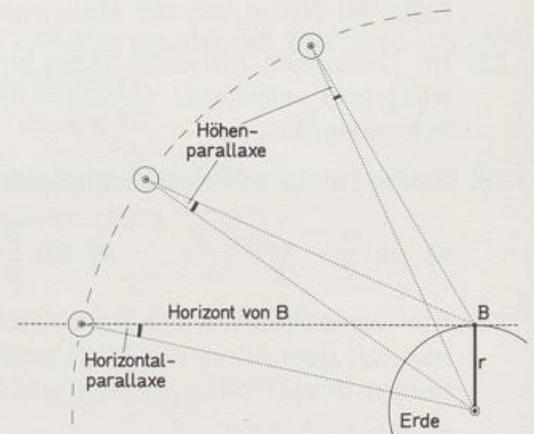
19. In einem Rechteck haben die Diagonalen die Länge 25 und schneiden sich unter 50° . Wie lang sind die Seiten?

20. Ein Kreissektor mit Mittelpunktswinkel μ und Radius m wird zum Mantel eines Kreiskegels gebogen.

- a) Berechne den Öffnungswinkel ω des Kegels für $\mu \in \{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$.
 b) Welchen Mittelpunktswinkel μ muss der Sektor haben, wenn der Öffnungswinkel ω Größen aus $\{60^\circ, 90^\circ, 120^\circ\}$ annehmen soll?

21. Vor dir liegen eine Kugel und eine Kreisscheibe, beide vom Durchmesser 1 m. Die Entfernung Auge–Mittelpunkt ist jeweils 1 m.
- Unter welchem Sehwinkel erscheint die Kugel?
 - Unter welchem Sehwinkel erscheint die Scheibe, wenn du senkrecht draufschaust?
22. Ein Tischtennisball von 4 cm Durchmesser rollt in einen Trichter mit einem Öffnungswinkel von 50° . Wie weit sind Trichterspitze und Ballmitte voneinander entfernt?

23. Unter **Höhen-Parallaxe** eines Himmelskörpers versteht man den Winkel φ , unter dem der Erdradius R ($= 6370$ km) vom Zentrum Z des Körpers aus erscheint. Sie ist null, wenn der Körper genau überm Beobachter B »im Zenit von B « steht, und hat ihren größten Wert, wenn der Körper im Horizont des Beobachters ist; deswegen heißt der Maximalwert der Höhen-Parallaxe **Horizontalparallaxe**. Die Horizontalparallaxe ist ein Maß für die Entfernung Erde–Gestirn, sie ist um so kleiner, je größer die Entfernung ist. Der Mond hat $57'$, die Sonne $8,80''$ Horizontalparallaxe. Bestimme die Entfernungen Erde–Mond und Erde–Sonne. Die Entfernung Erde–Sonne ist eine astronomische Längeneinheit, abgekürzt 1 AE.



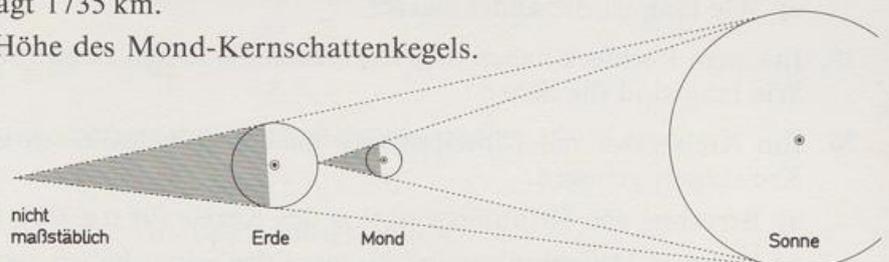
• 24. KERNSCHATTEN

Unter Abstand zweier Himmelskörper versteht man die Entfernung der Mittelpunkte. Die Sonne hat einen Radius von $696\,000$ km, der Abstand Erde–Sonne beträgt ungefähr 149 Millionen Kilometer. Der Erdradius ist 6370 km. Die Erde wirft einen Kernschatten, der weit ins Weltall reicht. Der Kernschatten der Erde ist das Gebiet, in das kein Sonnenlicht dringt.

- Berechne Öffnungswinkel und Höhe des Kernschattenkegels der Erde.

Auch der Mond wirft einen Kernschatten. Wo der Kernschatten des Mondes die Erde trifft, ist eine totale Sonnenfinsternis. Mond und Erde haben $384\,000$ km Abstand, der Mondradius beträgt 1735 km.

- Berechne die Höhe des Mond-Kernschattenkegels.



25. Welchen Winkel bildet die Höhe in einem regelmäßigen Tetraeder

- mit einer Seitenfläche
- mit einer Kante?

Aufgaben zu 5.3

1. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Gradmaß!)

α	15°	37°	1°	$1'$	$89,9^\circ$				
$\cos \alpha$						$\frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}$

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die fehlenden Werte (Winkel im Bogenmaß!)

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$			
$\cos x$							$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$

3. Berechne Näherungswerte für $\cos x$ mit dem Näherungspolynom von Seite 108 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\cos}$ -Wert des Taschenrechners.

a) $x = 0,1$ b) $x = 1,1$ c) $x = 0,785$ d) $x = 30^\circ$

4. Berechne Näherungswerte für x mit dem Näherungspolynom von Seite 108 und vergleiche sie mit dem $\boxed{\text{INV}} \boxed{\cos}$ -Wert des Taschenrechners.

a) $\cos x = 0,546$ b) $\cos x = 0,1$ c) $\cos x = 0,3$

5. Bestimme mit dem Taschenrechner

a) $\cos 20^\circ + \cos 30^\circ - \cos (20^\circ + 30^\circ)$

b) $\cos 2^\circ + \cos 3^\circ - \cos (2^\circ + 3^\circ)$

c) $\cos 0,2^\circ + \cos 0,3^\circ - \cos (0,2^\circ + 0,3^\circ)$

d) $\frac{\cos 20^\circ + \cos 30^\circ}{\cos (20^\circ + 30^\circ)}$ e) $\frac{\cos 2^\circ + \cos 3^\circ}{\cos (2^\circ + 3^\circ)}$

f) $\frac{\cos 0,2^\circ + \cos 0,3^\circ}{\cos (0,2^\circ + 0,3^\circ)}$

6. Berechne ohne Taschenrechner

a) $\cos 30^\circ + \cos 30^\circ - \cos (30^\circ + 30^\circ)$

b) $\cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \cos (45^\circ + 45^\circ)$

c) $\frac{2 \cdot \cos 30^\circ}{\cos (21 \cdot 30^\circ)}$

7. Bestimme α mit dem Taschenrechner.

a) $4 \cos \alpha + 1 = \sqrt{5}$ b) $4 \cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$

c) $2 \sqrt{2} \cos 3\alpha - 1 = \sqrt{3}$ d) $\frac{1 - \sqrt{2} \cos \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{6}$

8. Löse auf nach $\cos \alpha$ und berechne α ohne Taschenrechner.

a) $1 - 2 \cos \alpha = 0$ b) $2 \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{2} \cos \alpha - 1 = 0$ d) $(\sqrt{2} - \cos \alpha) \cos \alpha = 0$

e) $(\cos \alpha)^2 = \cos \alpha$ f) $2(\cos \alpha)^2 = \cos \alpha$

g) $2(\cos \alpha)^2 + 1 = 3 \cos \alpha$ h) $(2 \cos \alpha)^2 + \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2}) \cos \alpha$

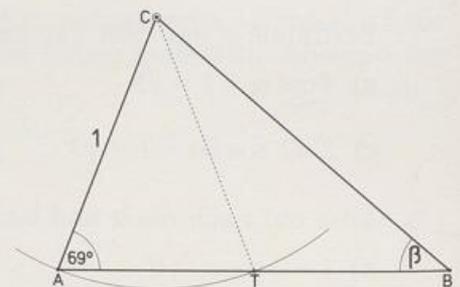
9. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\gamma = 90^\circ$

α	15°	60°		1°	89°				
b	15		3	1	1	239	191	489 061	560 123
c		1	5			638	1001	564 719	579 882

- 10. Zeige: In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC gilt

$$\text{a) } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c+b}{2c}} \quad \text{b) } \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c+a}{2c}}$$

11. In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC ist $b = 2\sqrt{13}$ und der zugehörige Hypotenusenabschnitt $q = 4$. Berechne der Reihe nach α , a und p.
12. Zeige: Im spitzwinkligen Dreieck ABC hat das Höhenfußpunkt-Dreieck die Seitenlängen $a \cos \alpha$, $b \cos \beta$ und $c \cos \gamma$.
13. Mainz liegt auf dem 50. Breitengrad. Wie viel Prozent des Erdumfangs muss man zurücklegen, wenn man auf diesem Breitenkreis die Erde umrundet? (Erdradius 6370 km)
- 14. Neapel und New York liegen ziemlich genau auf dem 41. Breitengrad. Neapel hat etwa die geografische Länge 14° Ost, New York 74° West. Wie weit ist es von Neapel nach New York
- auf dem Breitenkreis
 - durch einen geraden Tunnel
 - auf dem Großkreis?
15. Ein Haus mit gleichschenkligen Satteldach ist 10 m breit (von Dachrinne zu Dachrinne) und 20 m lang. Wie groß ist die Dachfläche bei einer Neigung von 50° ?
16. PROJEKTIONSSATZ
Zeige: In einem beliebigen Dreieck ist $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$.
Wie lauten die entsprechenden Ausdrücke für die andern Seiten?
17. ABSCHNITT
- a) Berechne Basis und Fläche des Dreiecks ATC.
 - b) Wie groß muss β sein, damit CT die Dreiecksfläche halbiert?



- 18. GEKREUZTER RIEMENTRIEB

Kreuzt man den Riemen, so laufen die Räder gegensinnig. Berechne die Riemenlänge für die Räder im Beispiel auf Seite 108.

• 19. PROJEKTIONSSATZ IM RAUM

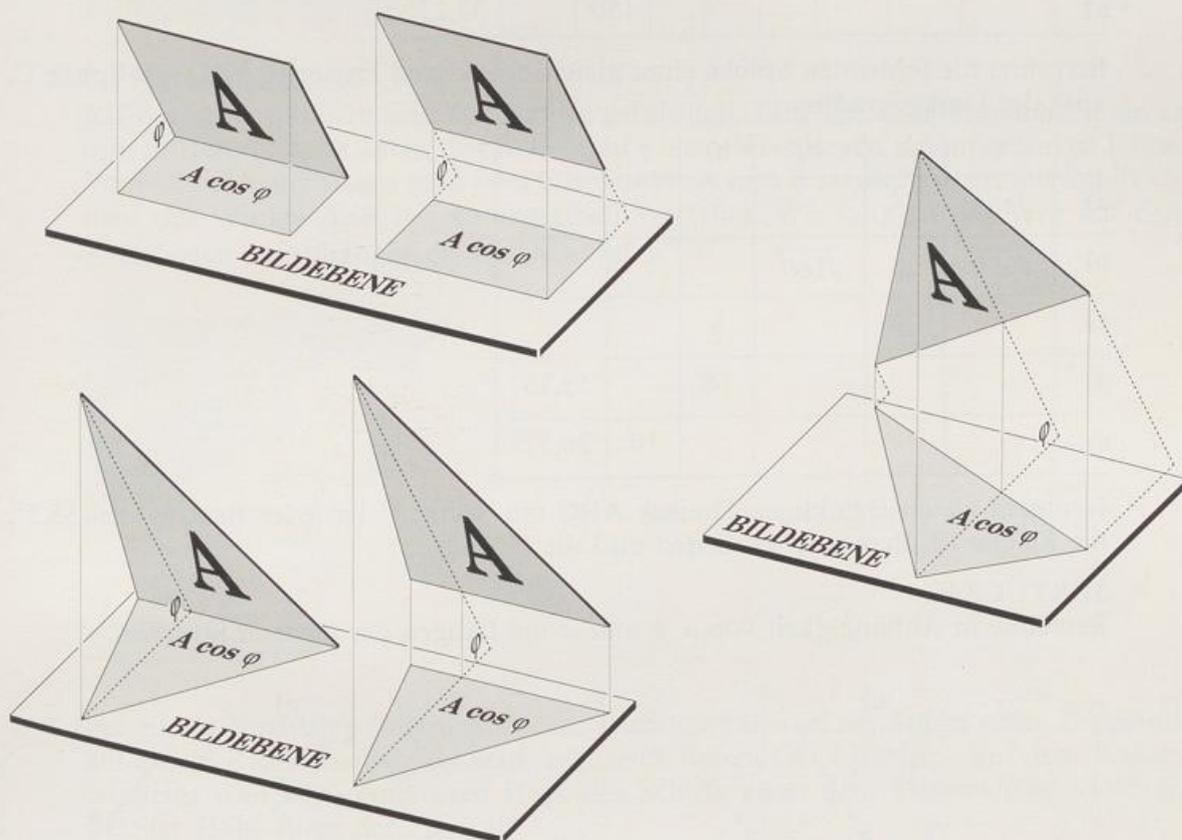
Bei der senkrechten Projektion einer Strecke auf eine Gerade multipliziert sich die Länge mit dem Kosinus des Neigungswinkels.

Ein entsprechender Satz gilt im Raum:

Bei der senkrechten Projektion eines Dreiecks auf eine Ebene (Bildebene) multipliziert sich der Flächeninhalt mit dem Kosinus des Winkels φ zwischen der Bildebene und der Dreiecksebene.

Zeige das in drei Schritten:

- Bei einem Rechteck vom Flächeninhalt A ist eine Seite parallel zur Bildebene; eine andere Seite ist unter φ gegen die Bildebene geneigt. Dann gilt für den Flächeninhalt A' der senkrechten Projektion: $A' = A \cos \varphi$.
- Bei einem Dreieck vom Flächeninhalt A ist eine Seite parallel zur Bildebene; die zugehörige Höhe ist unter φ gegen die Bildebene geneigt. Dann gilt für den Flächeninhalt A' der senkrechten Projektion: $A' = A \cos \varphi$.
- Beweise den oben formulierten Projektionssatz.



- 20. $ABCS$ ist eine dreiseitige Pyramide. Die Grundfläche ABC hat den Inhalt G , die drei Seitenflächen haben die Inhalte K , L und M . Sie bilden mit der Grundfläche die Winkel κ , λ und μ . Diese Winkel können auch stumpf sein!

Zeige: $G = K \cos \kappa + L \cos \lambda + M \cos \mu$

Verwende den Projektionssatz von Aufgabe 19. Denk dran, dass die Projektion der Spitze nicht in der Grundfläche liegen muss.

Aufgaben zu 5.1/2/3

1. Berechne die fehlenden Stücke des bei C rechtwinkligen Dreiecks

	a	b	c	h	p	q	F	α	β
a)	12	5							
b)		1,05	1,37						
c)	$\sqrt{13}$			3					
d)		$\sqrt{5}$				2			
e)	2,5				2				
f)					9		15		
g)	24							$9,5^\circ$	
h)							150		$53,13^\circ$

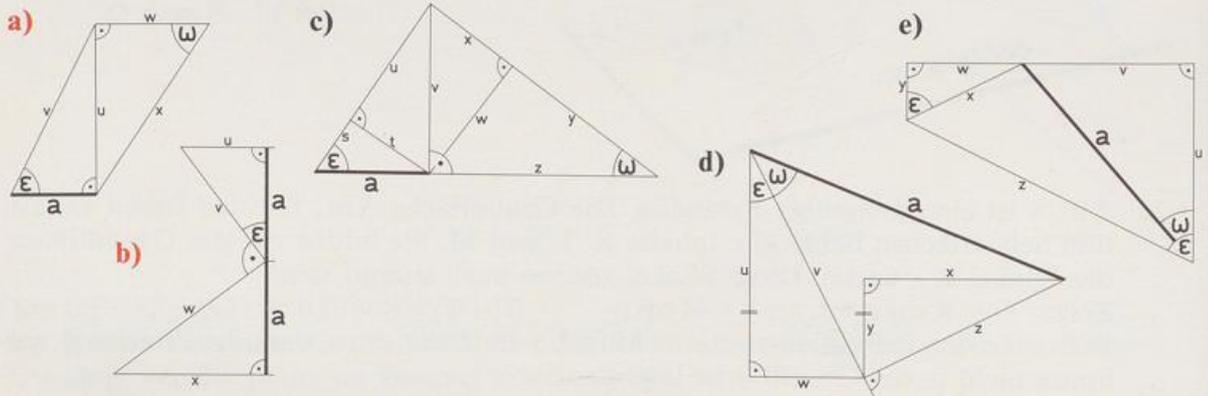
2. Berechne die fehlenden Stücke eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit Spitze C. r ist der Umkreisradius.

	a	c	h_a	h_c	r	α
a)	$\sqrt{468}$	24				
b)	$\sqrt{200}$		$\sqrt{160}$			
c)		24		8		
d)				16		$53,13^\circ$
e)					10	$26,57^\circ$

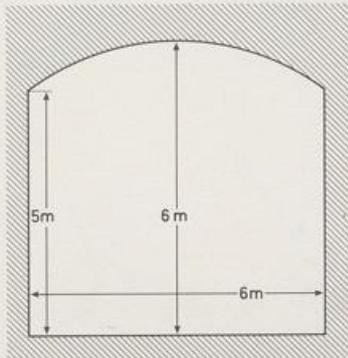
3. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit Spitze C ist jeder Basiswinkel $58,5^\circ$, die Fläche 12. Berechne die Seiten und die Höhen.

4. 3EXTÜCKE

Berechne in Abhängigkeit von a, ϵ und ω die Längen der übrigen Strecken.

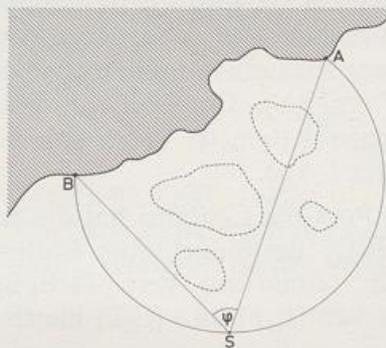


5. Bei einer Raute ist der Inkreisradius 10 und eine Diagonale 40. Berechne ihren Umfang und ihre Winkel.
6. GEWÖLBE
Die Decke eines Raums von 6 m Breite und 10 m Tiefe ist zylindrisch gewölbt. Berechne ihren Flächeninhalt.



7. GEFAHRENKREIS

Riffe und Sandbänke sind für Schiffe gefährlich. Eine einfache Möglichkeit sie zu umschiffen, besteht darin das Schiff auf einem Kreisbogen drumherum zu leiten: Vom Schiff S aus visiert man zwei Uferpunkte A und B an und steuert das Schiff so, dass der Winkel ASB immer denselben Wert hat. Wie lang ist der Weg auf dem Kreisbogen in Abhängigkeit von \overline{AB} und φ ?

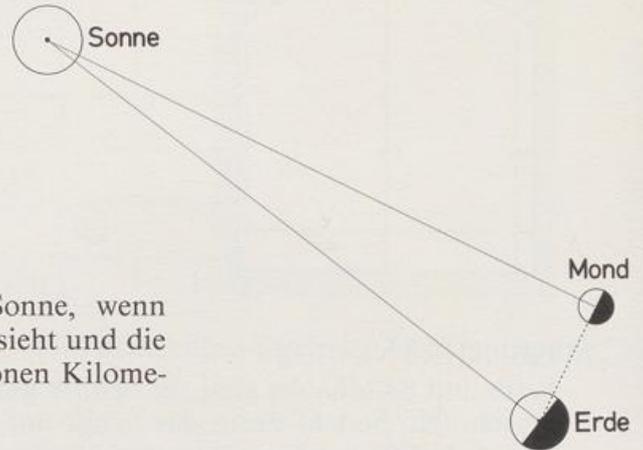


8. Bei einem Nachtflug überm Bodensee leuchtet man von der Spitze eines Zeppelins mit einem Richtscheinwerfer senkrecht nach unten. Der Lichtfleck auf dem Wasser erscheint vom 80 m entfernten Heck des Schiffs unter dem Tiefenwinkel $81,4^\circ$. In welcher Höhe fliegt der Zeppelin?
9. Bei einem Flugzeug ist in 10 km Höhe das Triebwerk ausgefallen. Der Pilot versucht eine Notlandung aus dem Gleitflug. Er liest die Geschwindigkeiten ab: 200 km/h gegen Grund und 8 m/s im Sinken. Wie groß ist der Gleitwinkel? Welche Entfernung über Grund legt die Maschine zurück?

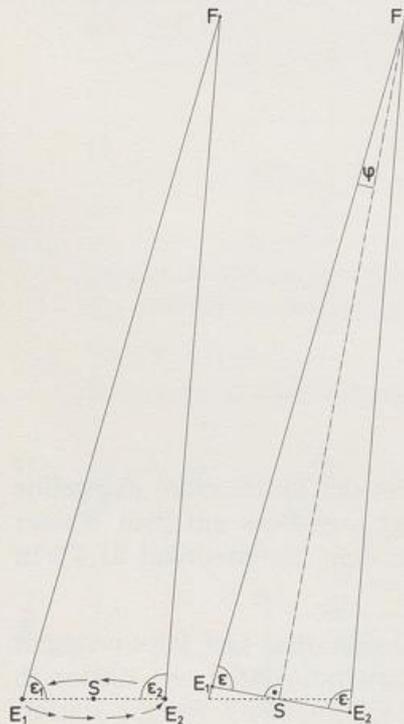
- 10. Das Auflösungsvermögen des Auges entspricht einem Blickwinkel von etwa $1'$ unter Normalbedingungen (Sonnenschein und klare Luft).
 - a) In welcher Entfernung erkennt man gerade noch einen 1 cm großen Gegenstand?
 - b) Wie groß muss ein Gegenstand mindestens sein, damit man ihn in 100 m Entfernung gerade noch sieht?
 - c) In welcher Entfernung treffen sich scheinbar die Schienen (Abstand 1435 mm) eines geraden Gleises?

11. HALBMOND

Zum Zeitpunkt des Halbmonds misst jemand den Winkel Mond – Erde – Sonne $89,85^\circ$. Welche Entfernung haben Sonne und Erde, wenn der Abstand Erde – Mond 384 400 km beträgt?



- 12. Berechne den Durchmesser der Sonne, wenn man ihn von der Erde aus unter $31'$ sieht und die Entfernung Sonne – Erde 150 Millionen Kilometer beträgt?



13. FIXSTERNENTFERNUNG

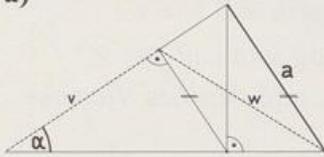
Man misst den Winkel Fixstern – Erde – Sonne (ϵ_1) und nach einem halben Jahr wieder (ϵ_2). Als **Jahresparallaxe** φ des Fixsterns bezeichnet man den Winkel $0,5 (180^\circ - \epsilon_1 - \epsilon_2)$. Der Erdbahnradius beträgt 150 Millionen Kilometer (1 Astronomische Einheit, abgekürzt 1 AE).

- a) Der Fixstern Proxima Centauri hat die Jahresparallaxe $0,765''$. Bestimme seine Entfernung von der Erde. Nimm zur Vereinfachung an, dass die Strecken $[E_1F]$ und $[E_2F]$ gleich lang sind.
- b) Wie weit kann man so trigonometrisch messen, wenn die mittleren Fehler der Sternparallaxen $0,016''$ betragen? (Mess- und Fehlerstrecken sind dann gleich lang.)
- c) 1 parsec (Parallaxensekunde) ist eine weitere astronomische Längeneinheit. Sie gehört zur Jahresparallaxe von $1''$. Wie viel Kilometer misst ein 1 parsec?

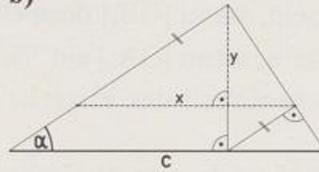
14. DREIECKSTRECKEN

Gegeben sind die dick gezeichneten Stücke. Berechne die gestrichelten Strecken.

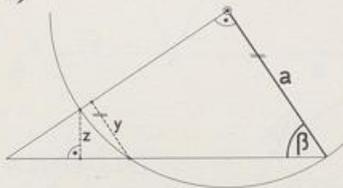
a)



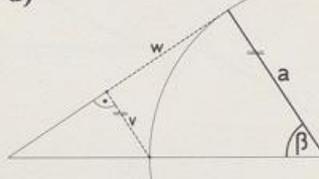
b)



c)

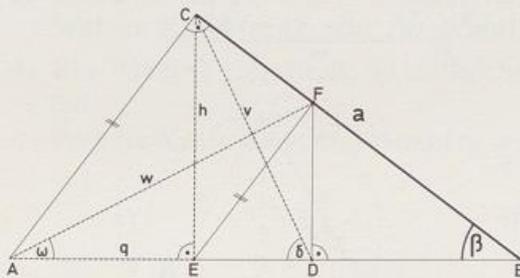


d)



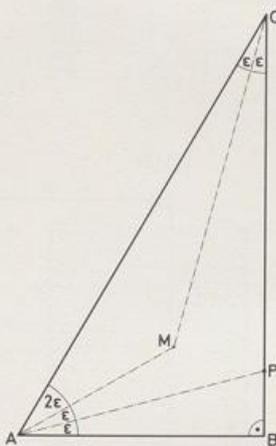
15. DREIECKMESSUNG

Gegeben $\beta = 37^\circ$ und $a = 10$. Berechne h , q , v und w sowie die Winkel ω , δ und den Schnittwinkel von v und w .



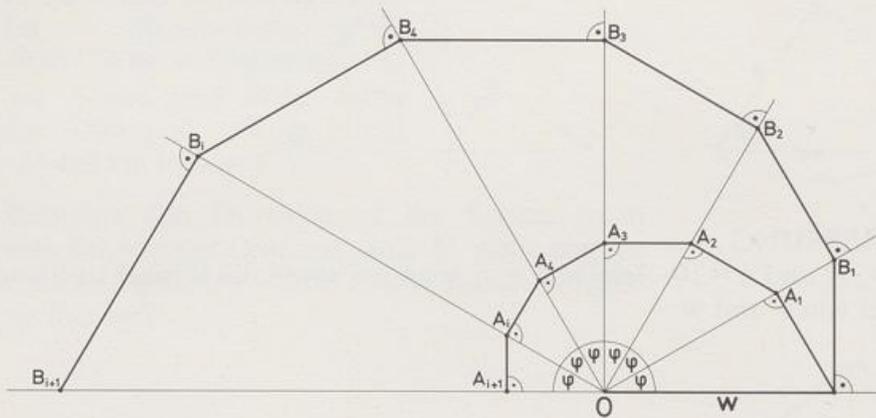
• 16. WINKELTEILUNG

Die Strecke $[AB]$ hat die Länge l . Berechne die Längen der Strecken $[AM]$, $[SM]$ und $[MP]$. Wie groß ist der Winkel CMP ?



• 17. WINKELSCHNECKE

- Berechne allgemein in Abhängigkeit von w und φ die Längen der Strecken $[OA_1]$, $[OA_2]$ und $[OA_i]$ sowie $[OB_1]$, $[OB_2]$ und $[OB_i]$.
- Wie groß muss φ sein, wenn $[OB_4]$ doppelt so lang sein soll wie w ?
- Wie groß muss φ sein, wenn $[OA_4]$ ein Viertel so lang sein soll wie w ?
- Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $A_1B_1B_2A_2$ und den des Vierecks $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$.
- Warum haben die Vierecke von **d)** Umkreise, wie groß sind die Radien?

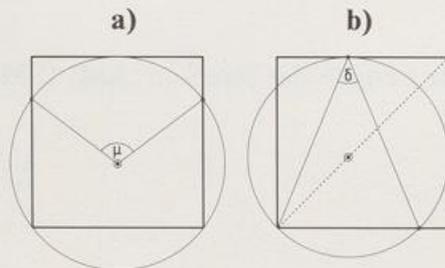
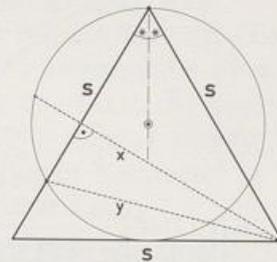


• 18. GLEICHSEITIG

Berechne x und y in Abhängigkeit von s .

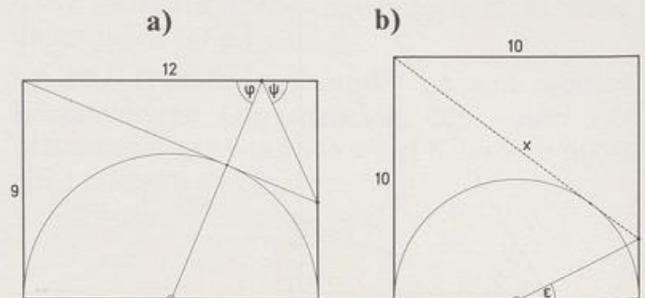
19. KREIS & QUADRAT

Berechne den bezeichneten Winkel.



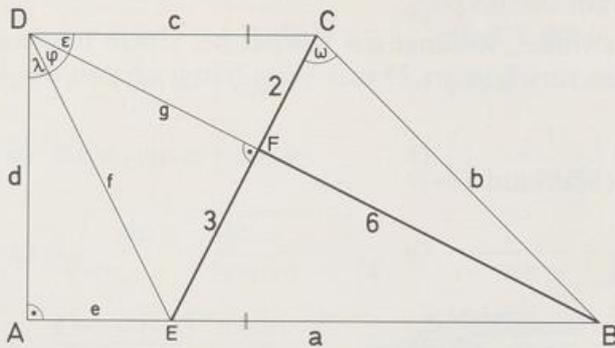
20. HALBKREISLICH

- Berechne φ und ψ im Rechteck.
- Berechne x und ε im Quadrat.



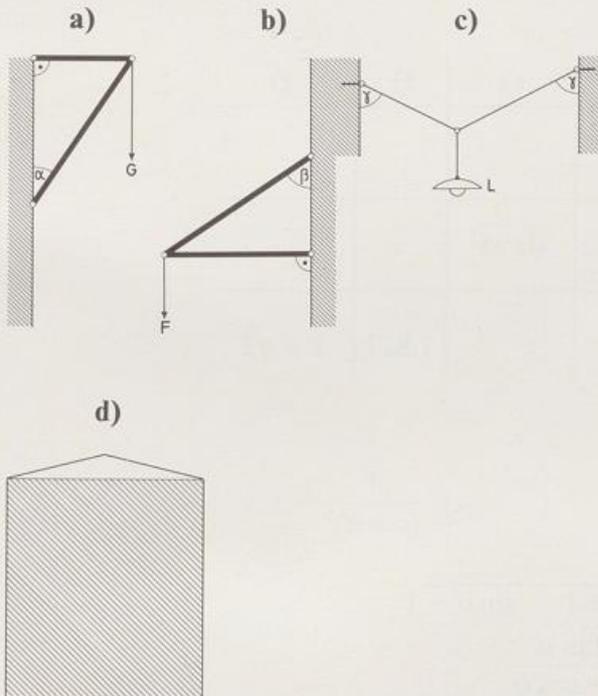
21. TRAPEZLICH

Berechne die bezeichneten Strecken und Winkel.



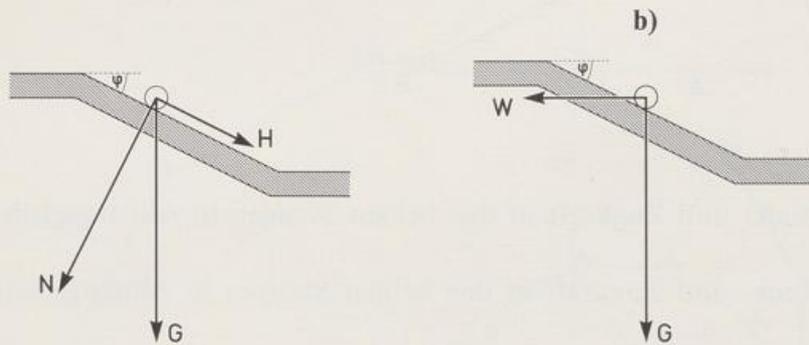
22. KRÄFTIG

- Berechne Druck- und Zugkraft in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G und α .
- Berechne Druck- und Zugkraft in den beiden Stangen in Abhängigkeit von F und β .
- Berechne die Seilkräfte in Abhängigkeit von γ und vom Lampengewicht L . Welche Kraft (senkrecht zur Wand) zieht an den Halterungen?
- Ein Paket (80 cm breit, 90 cm hoch) wird an einem 342 cm langen Spagat gehalten. Welche Kraft muss er aushalten, wenn das Paket 10 kg Masse hat?



23. SCHIEFEBENE

- a) Berechne Hangabtrieb H und Normalkraft N in Abhängigkeit von φ und G .
 b) Welche waagrechte Kraft W hält die Kugel?
 c) Vergrößert man den Neigungswinkel, so fängt ein Körper bei einem bestimmten Winkelwert φ_0 zu rollen oder zu rutschen an. Dieser Wert hängt ab von der Haftreibungszahl μ .
 Zeige: $\mu = \tan \varphi_0$
 Wie groß ist φ_0 für $\mu = 0,027$ (Stahl auf Eis)?



24. Im Deutschen Museum hängt ein 60 m langes Pendel von 40 kg Masse. Welche Kraft (waagrecht) braucht man um es 140 cm waagrecht auszulenken?

Aufgaben zu 5.4

1. Bestimme die fehlenden Werte

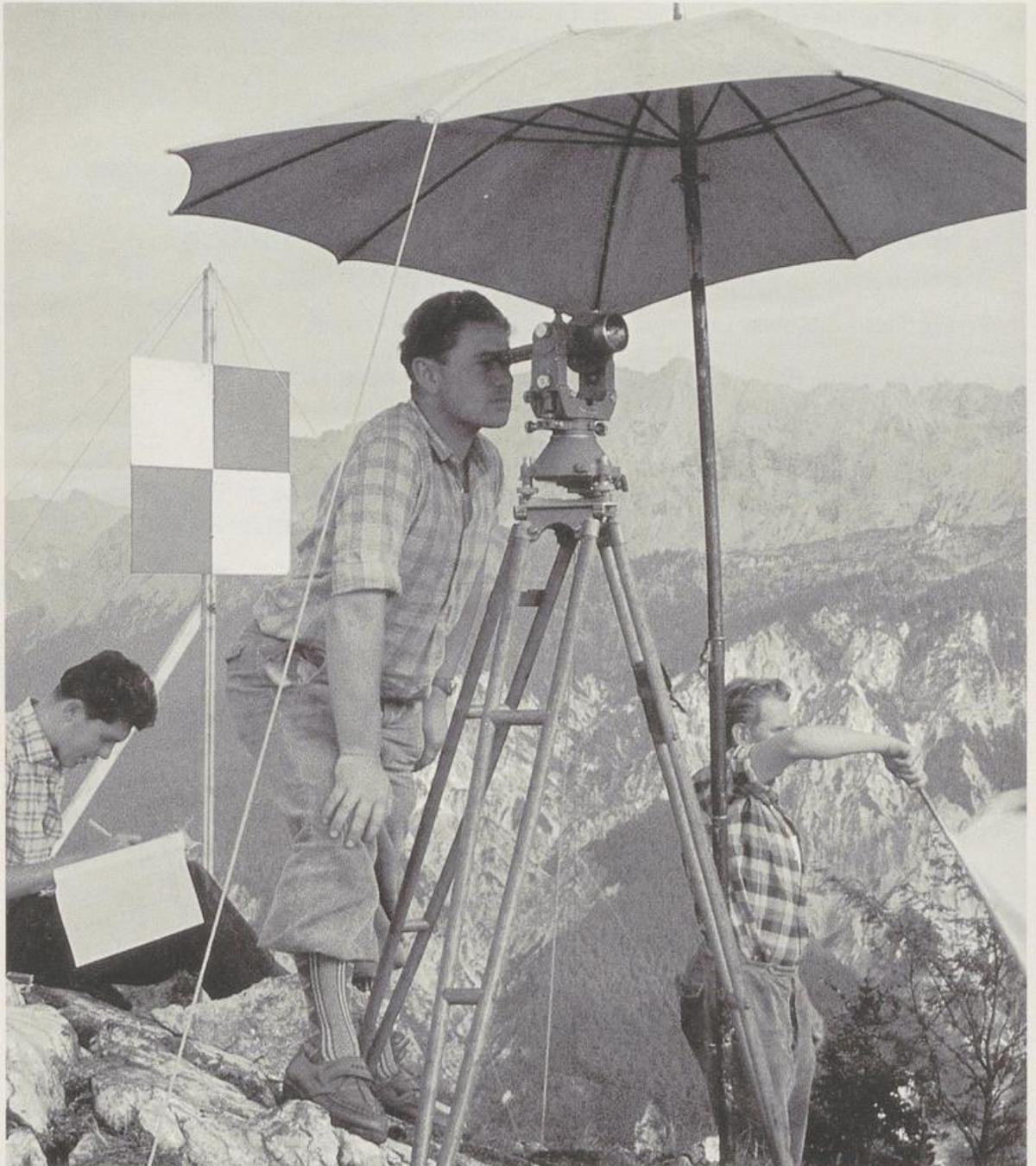
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin \alpha$	0,6	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{0,5}$			
$\cos \alpha$			$\frac{5}{12}$		$\sqrt{0,75}$		
$\tan \alpha$						1,827	$2 + \sqrt{3}$

Vereinfache

2. a) $\tan \alpha \cdot \cos \alpha$ b) $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$ c) $\frac{1}{(\cos \alpha)^2} - 1$
 d) $\frac{(\sin \alpha)^2}{1 - \cos \alpha}$ e) $\frac{1}{\sin \alpha + 1} - \frac{1}{\sin \alpha - 1}$
 f) $\frac{\tan \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ g) $\frac{1 + \tan \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

3. a) $\sqrt{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \cos \alpha}$ b) $\sqrt{\sin \alpha + 1} \sqrt{\sin \alpha - 1}$ (!)
- c) $\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ d) $\sqrt{\frac{8}{1 + \cos \alpha} + \frac{8}{1 - \cos \alpha}}$
4. a) $[1 + (\tan \alpha)^2] \cos \alpha$ b) $(\sin \alpha)^4 - (\cos \alpha)^4$
- c) $\tan \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha$ d) $\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)$
5. a) $\sqrt{\frac{\sin \alpha - \tan \alpha}{(\cos \alpha - 1) \sin \alpha}}$ b) $\frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{(\cos \alpha)^2}$
- c) $\frac{(1 - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2}$ d) $\frac{1 - [(\sin \alpha)^4 + (\cos \alpha)^4]}{(\cos \alpha)^4}$
6. a) $2(1 + \cos \alpha) - (\sin \alpha)^2$ b) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$
- c) $\sin \alpha \cdot (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^3$ d) $(2 \cos \alpha)^2 + 12 \sin \alpha - 13$
7. Forme so um, dass im Ergebnis nicht $90^\circ - \alpha$ vorkommt.
- a) $\tan \alpha \cdot \tan (90^\circ - \alpha)$ b) $\frac{1}{\tan (90^\circ - \alpha)} + \tan \alpha$
- c) $\sqrt{1 + [\tan (90^\circ - \alpha)]^2}$ d) $\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \tan (90^\circ - \alpha)$
- e) $\frac{\cos (90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}$

6. Kapitel Trigonometrie für beliebige Winkel



Winkelmessung mit dem Theodolit im Gebirge

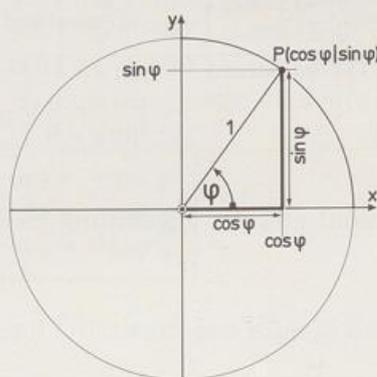
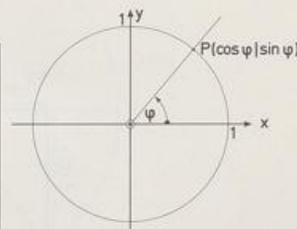
6.1 Trigonometrie am Einheitskreis

Trigonometrie treibt man nicht nur mit spitzen Winkeln. Weil man auch negative Winkelmaße und Winkel über 360° zulässt, arbeitet man mit dem Drehwinkel. Drehwinkel veranschaulicht man am Besten am Einheitskreis. Zur Erinnerung: Winkel zählen wir negativ bei Rechtsdrehung (Uhrzeigersinn!) und positiv bei Linksdrehung (Gegenuhrzeigersinn!). Wir werden \sin , \cos und \tan neu definieren, freilich aber so, dass sich für spitze Winkel dasselbe ergibt wie bisher. Dazu brauchen wir den Einheitskreis um den Ursprung eines Koordinatensystems. Den Drehwinkel messen wir von der positiven x-Achse aus. Schneidet der zweite Schenkel von Winkel φ den Einheitskreis in Punkt P, dann definieren wir:

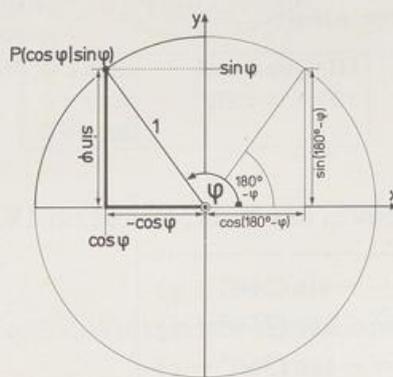
Definition

$\cos \varphi$ ist der x-Wert von P } $P(\cos \varphi | \sin \varphi)$
 $\sin \varphi$ ist der y-Wert von P }

$\tan \varphi$ ist der Quotient von y- und x-Wert, also $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$.



I. Quadrant $\sin \varphi > 0$
 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ $\cos \varphi > 0$
 $\tan \varphi > 0$



II. Quadrant $\sin \varphi > 0$
 $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ $\cos \varphi < 0$
 $\tan \varphi < 0$

Wir unterscheiden die Fälle:

$0^\circ < \varphi < 90^\circ$, das heißt, P liegt im I. Quadranten; die neue Definition liefert dasselbe wie die alte.

$90^\circ < \varphi < 180^\circ$, das heißt, P liegt im II. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin (180^\circ - \varphi) \\ \cos \varphi &= -\cos (180^\circ - \varphi) \\ \tan \varphi &= -\tan (180^\circ - \varphi) \end{aligned}$$

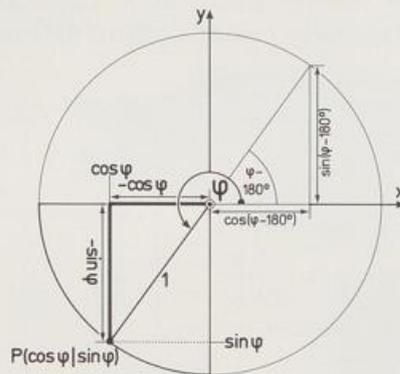
zum Beispiel $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$

Beachte: Streckenlängen (Maßpfeile!) sind positiv (zum Beispiel $-\cos \varphi > 0$), Koordinaten dagegen können auch negativ sein (zum Beispiel $\cos \varphi < 0$).

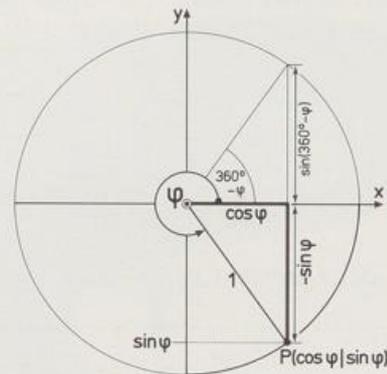
$180^\circ < \varphi < 270^\circ$, das heißt, P liegt im III. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= -\sin(\varphi - 180^\circ) \\ \cos \varphi &= -\cos(\varphi - 180^\circ) \\ \tan \varphi &= \tan(\varphi - 180^\circ) \end{aligned}$$

zum Beispiel $\cos 240^\circ = -\cos(240^\circ - 180^\circ) = -\cos 60^\circ = -0,5$



III. Quadrant	$\sin \varphi < 0$
$180^\circ < \varphi < 270^\circ$	$\cos \varphi < 0$
	$\tan \varphi > 0$



IV. Quadrant	$\sin \varphi < 0$
$270^\circ < \varphi < 360^\circ$	$\cos \varphi > 0$
	$\tan \varphi < 0$

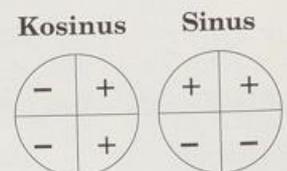
$270^\circ < \varphi < 360^\circ$, das heißt, P liegt im IV. Quadranten; aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= -\sin(360^\circ - \varphi) \\ \cos \varphi &= \cos(360^\circ - \varphi) \\ \tan \varphi &= -\tan(360^\circ - \varphi) \end{aligned}$$

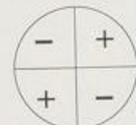
zum Beispiel $\tan 315^\circ = -\tan(360^\circ - 315^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

$\varphi \in \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$, das heißt, P liegt auf den Koordinatenachsen; an den vier Zeichnungen überlegen wir uns:

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	nicht def.	0	nicht def.	0



Tangens



Die drei Kreise zeigen die Vorzeichen der Quadranten.

Die Fülle der Formeln ist halb so wild! Im Ernstfall geht man so vor:

- Der Quadrant liefert das Vorzeichen.
- Als neuen (spitzen) Winkel $\hat{\varphi}$ nehmen wir den Unterschied zwischen φ und 180° bzw. zwischen φ und 360° .

Beispiel: $\cos 243^\circ = ?$ III. Quadrant, also Vorzeichen »-«

243° liegt näher bei 180° als bei 360° , also ist $\hat{\varphi} = 63^\circ$ der Unterschied zwischen 243° und 180°

$$\cos 243^\circ = -\cos 63^\circ$$

Weil zusätzliche Voldrehungen – linksrum oder rechtsrum – zum selben Bild führen, gilt:

$$\sin 1470^\circ = \sin (1470^\circ - 4 \cdot 360^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$$

$\sin \varphi = \sin (\varphi - z \cdot 360^\circ)$
$\cos \varphi = -\cos (\varphi - z \cdot 360^\circ)$
$\tan \varphi = -\tan (\varphi - z \cdot 360^\circ) \quad z \in \mathbb{Z}$

Jetzt werden wir auch mit negativen Winkeln fertig:

$$\cos (-30^\circ) = \cos (-30^\circ + 360^\circ) = \cos 330^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

Wir kombinieren diese Formeln:

$$\sin (-\varphi) = \sin (-\varphi + 360^\circ) = \sin (360^\circ - \varphi) = -\sin \varphi$$

$$\cos (-\varphi) = \cos (-\varphi + 360^\circ) = \cos (360^\circ - \varphi) = \cos \varphi$$

$$\tan (-\varphi) = \tan (-\varphi + 360^\circ) = \tan (360^\circ - \varphi) = -\tan \varphi$$

zusammengefasst

$\sin (-\varphi) = -\sin \varphi$
$\cos (-\varphi) = \cos \varphi$
$\tan (-\varphi) = -\tan \varphi$

Die bisherigen Überlegungen zeigen, dass verschiedene Winkel denselben Sinuswert haben können:

$$\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \sin 420^\circ = \sin 480^\circ = \sin (-240^\circ) = \sin (-300^\circ) = \sin (-600^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

Also hat die Gleichung $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ unendlich viele Lösungen:

$$\dots, -600^\circ, -300^\circ, -240^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 420^\circ, 480^\circ, \dots$$

Übersichtlich geordnet sind das die beiden Serien

$$60^\circ + z \cdot 360^\circ \quad \text{und} \quad 120^\circ + z \cdot 360^\circ, \quad \text{wobei } z \in \mathbb{Z}$$

Es genügt also, die Lösungen im Intervall $[0^\circ; 360^\circ[$ zu suchen, denn hier liegen die entscheidenden Winkel. Die restlichen Winkel ergeben sich durch Addition ganzer Vielfacher von 36° . Der Summand $z \cdot 360^\circ$ bringt nichts wesentlich Neues.

Die Gleichung $\cos \alpha = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$ lösen wir so:

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$\hat{\alpha} = 45^\circ$ ist der zugehörige spitze Winkel

Welche beiden Quadranten nun in Frage kommen, hängt vom Vorzeichen ab; weil der gegebene Kosinus negativ ist, sind es der II. und III. Quadrant.

$$\text{II. Quadrant: } \alpha_1 = 180^\circ - \hat{\alpha} = 135^\circ$$

$$\text{III. Quadrant: } \alpha_2 = 180^\circ + \hat{\alpha} = 225^\circ$$

Die vollständige Lösung lautet:

$$\alpha_{1z} = 135^\circ + z \cdot 360^\circ, \quad \alpha_{2z} = 225^\circ + z \cdot 360^\circ, \quad z \in \mathbb{Z}$$

Der Taschenrechner gibt höchstens eine Lösung an. Sie liegt beim Kosinus im I. oder II. Quadranten $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$, beim Sinus und Tangens im I. oder »-I.« Quadranten $(-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$.

Beispiel: $\tan \alpha = -0,7$

$$\alpha^* = -35,0^\circ \quad (\text{gerundeter Wert des Taschenrechners})$$

$$\hat{\alpha} = 35,0^\circ$$

Der Tangens ist negativ im II. und IV. Quadranten

$$\text{II. Quadrant: } \alpha_1 = 180^\circ - \hat{\alpha} = 145,0^\circ$$

$$\text{IV. Quadrant: } \alpha_2 = 360^\circ - \hat{\alpha} = 325,0^\circ$$

Die vollständige Lösung lautet:

$$\alpha_{1z} = 145^\circ + z \cdot 360^\circ, \quad \alpha_{2z} = 325^\circ + z \cdot 360^\circ, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Am Schluss des vorigen Kapitels haben wir Formeln zusammengestellt, die die Zusammenhänge zwischen \sin , \cos und \tan eines Winkels im ersten Quadranten wiedergeben. Bis aufs Vorzeichen gelten diese Formeln in allen Quadranten. Der Quadrant legt das Vorzeichen fest. Kennt man den Quadranten nicht, muss man Fallunterscheidungen machen. Beispiele:

1. Quadrant bekannt $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ und α im II. Quadranten

$$\text{dann ist } \sin \alpha \text{ positiv und es gilt } \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{dann ist } \cos \alpha \text{ negativ und es gilt } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}} = -\frac{4}{5}$$

2. Quadrant unbekannt $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

dann liegt α im II. oder III. Quadranten.

$$\text{Liegt } \alpha \text{ im II. Quadranten, dann gilt } \sin \alpha = +\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = \frac{4}{5}$$

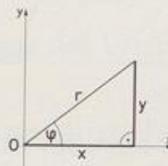
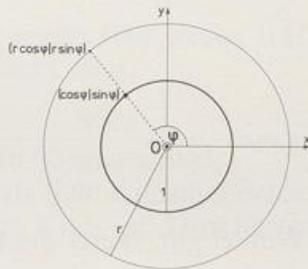
$$\text{und } \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Liegt } \alpha \text{ im III. Quadranten, dann gilt } \sin \alpha = -\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{und } \tan \alpha = -\frac{\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$$

Polarkoordinaten

Wir haben $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ kennen gelernt als die x - und y -Werte des Punkts auf dem Einheitskreis in Richtung φ . Durch eine zentrische Streckung mit Zentrum O und Streckfaktor r erreichen wir jeden Punkt in Richtung φ . Ein Punkt P in Richtung φ , der von O die Entfernung r hat, hat demnach die Koordinaten $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$. r und φ legen seine Lage genauso eindeutig fest wie x und y . Man kann also auch r und φ als Koordinaten verwenden. Sie heißen **Polarkoordinaten** des Punkts. Der Punkt O , von dem aus man die Entfernung misst, heißt **Pol**; die Achse, gegen die man die Richtung misst, heißt **Polarachse**, das ist bei uns die positive x -Achse. Zwischen den Polarkoordinaten und den kartesischen Koordinaten bestehen folgende Zusammenhänge:



$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad (r \geq 0, 0^\circ \leq \varphi < 360^\circ) \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

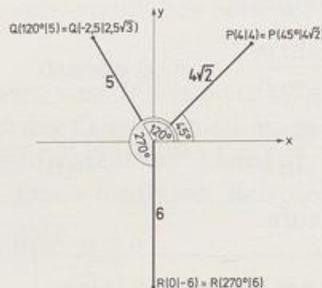
Sind r und φ gegeben, dann ergeben sich x und y sofort eindeutig. Sind aber x und y gegeben, dann muss man aus den Vorzeichen zuerst auf den Quadranten schließen, um φ eindeutig festzulegen; r ergibt sich immer eindeutig. Beim Pol $O(0|0)$ ist φ beliebig. Ist $x = 0$ und y positiv, dann ist $\varphi = 90^\circ$. Ist $x = 0$ und y negativ, dann ist $\varphi = 270^\circ$.

Beispiele:

$$P(4|4) = P(45^\circ | 4\sqrt{2}),$$

$$Q(120^\circ | 5) = Q(-2,5 | 2,5\sqrt{3}),$$

$$R(0 | -6) = R(270^\circ | 6).$$



Manchmal sind Polarkoordinaten zweckmäßiger als die kartesischen Koordinaten. Zum Beispiel beim Wandern nach Kompass: »Geh vom Tümpel 3 km in Richtung SSW, dann bist du bei der Polizei.«

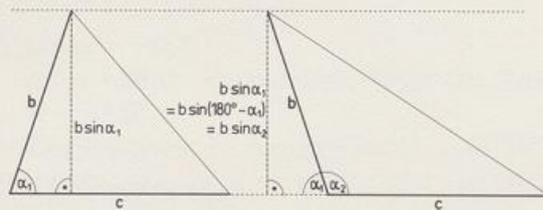
6.2 Berechnungen am allgemeinen Dreieck

Trigonometrie heißt Dreiecksmessung, sie beschränkt sich nicht auf rechtwinklige Dreiecke. So, wie man ein Dreieck aus drei gegebenen Stücken konstruiert, so berechnet man die restlichen Stücke trigonometrisch. Zuerst leiten wir eine neue Flächenformel her.

Wegen $h_c = b \cdot \sin \alpha$ beziehungsweise

$$h_c = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = b \cdot \sin \alpha \text{ gilt für den}$$

$$\text{Flächeninhalt } F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \alpha$$



Weil Entsprechendes auch für die andern beiden Winkel gilt, lautet die Flächenformel

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

In Worten: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des Zwischenwinkels.

Dividiert man durch gemeinsame Faktoren, so ergibt sich zum Beispiel:

$$\frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{und ebenso}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

zusammengefasst zum

$$\text{Sinussatz} \quad a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

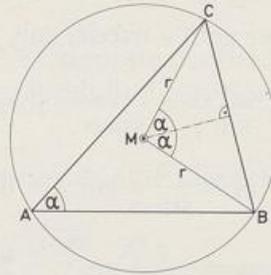
In Worten: Im Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinuswerte der Gegenwinkel.
anders formuliert

$$\text{Sinussatz} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

In Worten: Im Dreieck ist der Quotient von Seite und Sinus des Gegenwinkels konstant.

Diese Konstante hängt vom Dreieck ab und hat sogar eine einfache geometrische Bedeutung. Machen wir uns das an einem Dreieck und seinem Umkreis klar! Der Mittelpunktswinkel BMC ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel BAC. Deshalb lesen wir ab

$$\sin \alpha = \frac{a/2}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2r$$

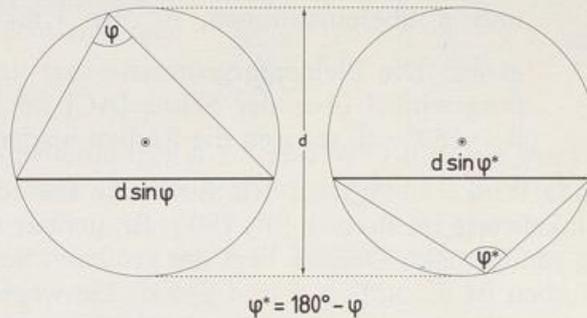


Diese Beziehung ergibt sich wegen $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ auch, wenn der Mittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt.

Die Konstante $\frac{\text{Seite}}{\sin(\text{Gegenwinkel})}$ hat sich als Durchmesser des Umkreises entpuppt. Das kann man auch als Sehnenformel deuten: Ist s eine Sehne im Kreis mit Durchmesser d und φ ein zugehöriger Umfangswinkel, dann gilt

Sehnenformel

$$s = d \sin \varphi$$



Wegen $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ gilt diese Formel auch, wenn der Scheitel des Umfangswinkels auf dem kürzeren Kreisbogen liegt.

Mit dem Sinussatz lassen sich Dreiecke berechnen, von denen zwei Winkel und eine Seite (WWS, WSW) beziehungsweise zwei Seiten und der Gegenwinkel einer Seite (SsW, sSW) bekannt sind. Ist der gegebene Winkel der Gegenwinkel der kleineren Seite, so ergeben sich (wie bei der Konstruktion) zwei Lösungen. Dazu nun zwei Beispiele:

1. Beispiel: Im Dreieck ABC ist $\alpha = 25^\circ$, $a = 4$ und $b = 6$.

Wie groß sind, c , β und γ ?

Aus $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}$ folgt $\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha$,

Werte eingesetzt: $\sin \alpha = 0,63392\dots$

Der Taschenrechner liefert $\hat{\beta} = 39,3^\circ$.

Sinnvolle Werte sind

$$\beta_1 = 39,3^\circ \quad \text{und} \quad \beta_2 = 180^\circ - 39,3^\circ = 140,7^\circ$$

(Dreieckswinkel sind kleiner als 180° .)

Aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich

$$\gamma_1 = 180^\circ - 39,3^\circ - 25^\circ = 115,7^\circ$$

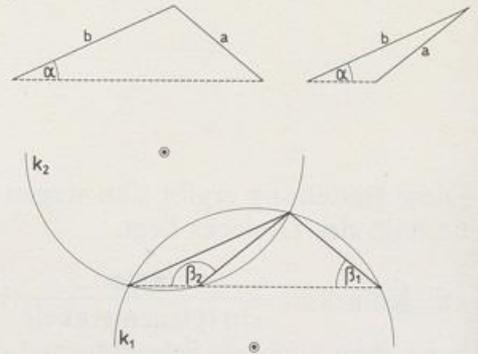
$$\text{und } \gamma_2 = 180^\circ - 140,7^\circ - 25^\circ = 14,3^\circ.$$

Weiter geht's wieder mit dem Sinussatz.

$$\text{aus } \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ folgt } c = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma;$$

$$c_1 = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma_1 = 8,5$$

$$c_2 = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma_2 = 2,3.$$



Im Bild sehen wir die beiden Lösungsdreiecke. Weil die Lösungsdreiecke in α und a übereinstimmen, ist der Umkreisdurchmesser $d = \frac{a}{\sin \alpha}$ jedesmal gleich. Die Elementargeometrie sagt uns auch warum: β_1 und β_2 sind Umfangswinkel über der Sehne [AC] im Kreis k_1 beziehungsweise k_2 . Wegen $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ müssen die Radien beider Kreise gleich sein.

Wenn man Winkel ($\neq 90^\circ$) mit dem Sinussatz ausrechnet, so ergeben sich zunächst immer zwei Winkelwerte im Bereich $[0^\circ; 180^\circ]$. Brauchbar sind aber nur Ergebnisse, die der Bedingung genügen: Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber. Im Beispiel oben ist $b > a$, $\beta_1 > \alpha$ und $\beta_2 > \alpha$. Deswegen sind beide Ergebnisse auch Lösungen.

Jetzt vertauschen wir die Längen von a und b .

2. Beispiel: Im Dreieck ABC ist $\alpha = 25^\circ$, $a = 6$ und $b = 4$.

Wie groß sind c , β und γ ?

$$\text{Aus } \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \text{ folgt } \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha, \text{ Werte eingesetzt: } \sin \beta = 0,28174\dots$$

Der Taschenrechner liefert $\hat{\beta} = 16,4^\circ$.

Mögliche Werte sind $\beta_1 = 16,4^\circ$ und $\beta_2 = 180^\circ - 16,4^\circ = 163,6^\circ$.

Wegen $b < a$ muss aber $\beta < \alpha$ sein, und das ist nur für β_1 der Fall! (Dies sieht man auch durch Kontrolle der Innenwinkelsumme.)

Also gibt es nur die Lösung $\beta_1 = \beta = 16,4^\circ$.

Aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich $\gamma = 180^\circ - 16,4^\circ - 25^\circ = 138,6^\circ$

$$\text{Aus } \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ folgt } c = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma = 9,4.$$

Wenn von einem Dreieck die drei Seiten (SSS) oder zwei Seiten und der Zwischenwinkel (SWS) bekannt sind, dann findet man die restlichen Stücke mit dem Sinussatz nur mit großem Aufwand. In solchen Fällen springt der Kosinussatz ein.

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

In Worten: Das Quadrat einer Seite ist so groß wie die Quadrate der beiden andern Seiten zusammen – vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten und des Kosinus ihres Zwischenwinkels.

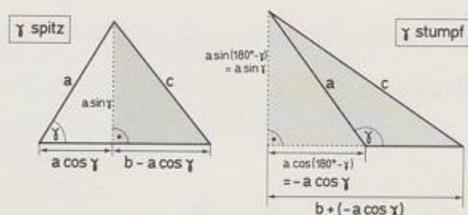
Beweis: Der Satz von PYTHAGORAS ergibt jeweils für das dunkle Dreieck

$$c^2 = (a \cdot \sin \gamma)^2 + (b - a \cdot \cos \gamma)^2$$

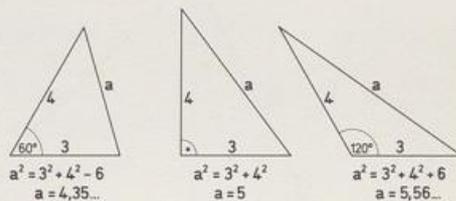
$$= a^2 (\sin \gamma)^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 (\cos \gamma)^2$$

$$= a^2 \underbrace{[(\sin \gamma)^2 + (\cos \gamma)^2]}_1 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

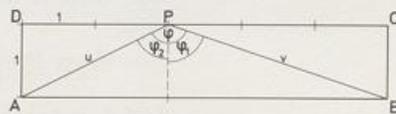


Der Kosinussatz ist eng verwandt mit dem Satz von PYTHAGORAS, er ist der »Pythagoras für allgemeine Dreiecke«. Für $\gamma = 90^\circ$ entsteht Pythagoras in alter Pracht! Für $\gamma \neq 90^\circ$ korrigiert der Summand $-2ab \cos \gamma$ den Unterschied zum rechtwinkligen Dreieck.



Beispiel: Im Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $a = 5$ und $b = 1$ liegt ein Punkt P auf Seite [CD] im Abstand 2 von Ecke D. Wie groß ist der Winkel $\varphi = \sphericalangle APB$?

Wir lesen ab: $\tan \varphi_1 = 3$, also $\varphi_1 \approx 71,6^\circ$
 $\tan \varphi_2 = 2$, also $\varphi_2 \approx 63,4^\circ$
 $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \approx 135^\circ$



Ist φ exakt 135° ?

Entlocken wir dem Taschenrechner mehr Dezimalen

$\varphi_1 = 71,565051177 \dots^\circ$
 $\varphi_2 = 63,434948822 \dots^\circ$, so ergibt sich
 $\varphi = 134,999999999 \dots^\circ$

Mit einem Rechner finden wir die Antwort nicht – auch nicht mit einem Großrechner! Wir wissen nämlich nicht, was nach der letzten angezeigten Dezimale noch kommt.

Da hilft nur noch der Kosinussatz.

Nach Pythagoras ist $u = \sqrt{5}$ und $v = \sqrt{10}$.
 Im Dreieck ABP gilt $5^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi$, also

$$\cos \varphi = \frac{5 + 10 - 25}{2 \sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{-10}{2 \cdot 5 \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$$

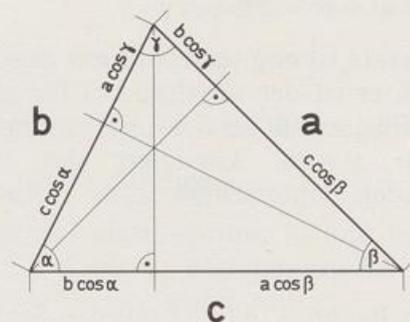
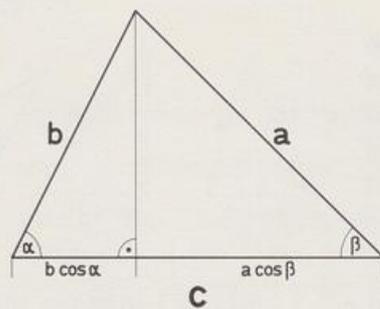
$\hat{\varphi} = 45^\circ$, φ ist exakt gleich 135° .

Der Kosinus taucht immer dann auf, wenn um die senkrechte Projektion von Strecken geht. Bilden eine Gerade (oder Ebene) und eine Strecke s den Winkel φ , dann hat die senkrechte Projektion von s auf die Gerade die Länge $s \cos \varphi$.



In einem Dreieck projizieren wir zwei Seiten senkrecht auf die dritte; es ergibt sich der **Projektionssatz**

$$\begin{aligned} c &= a \cos \beta + b \cos \alpha \\ b &= a \cos \gamma + c \cos \alpha \\ a &= b \cos \gamma + c \cos \beta \end{aligned}$$



Der Projektionssatz gilt auch, wenn die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt.

Mit dem Projektionssatz ist der Kosinussatz im Nu hergeleitet:

$$\begin{array}{l} c = a \cos \beta + b \cos \alpha \quad \| \cdot (-c) \Rightarrow -c^2 = \quad \quad \quad -ac \cos \beta - bc \cos \alpha \\ b = a \cos \gamma + c \cos \alpha \quad \| \cdot (-b) \Rightarrow -b^2 = -ab \cos \gamma \quad \quad \quad -bc \cos \alpha \\ a = b \cos \gamma + c \cos \beta \quad \| \cdot a \quad \Rightarrow \quad \quad \quad a^2 = ab \cos \gamma + ac \cos \beta \end{array} \quad +$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 &= \quad \quad \quad -2bc \cos \alpha \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

Mit $c \cos \alpha = b_c$ (Projektion von c auf b) geht der Kosinussatz über in $a^2 = b^2 + c^2 - 2bb_c$, das ist der verallgemeinerte Pythagoras – vielleicht hast du ihn in der 9. Klasse kennen gelernt.

Aufgaben zu 6.1

- Was kannst du über die Lage der Punkte $P(r \cos \varphi | r \sin \varphi)$ sagen?
- Der Punkt P liegt auf dem Einheitskreis. Bestimme die fehlende Koordinate.

a) $P\left(\frac{1}{2} y\right)$	b) $P\left(x -\frac{1}{2} \sqrt{2}\right)$	c) $P\left(-\frac{1}{2} \sqrt{3} y\right)$
d) $P(\cos 90^\circ y)$	e) $P(x \sin 135^\circ)$	f) $P\left(x -\frac{1}{2}\right)$
g) $P(\cos 135^\circ y)$	h) $P(x -1)$	
- Berechne durch Zurückführung auf spitze Winkel:

a) $\sin 120^\circ$	b) $\cos 150^\circ$	c) $\tan 135^\circ$
d) $\sin 315^\circ$	d) $\cos 360^\circ$	f) $\tan 330^\circ$
g) $\sin 240^\circ$	h) $\cos 225^\circ$	i) $\tan 210^\circ$
j) $\sin 330^\circ$	k) $\cos 300^\circ$	l) $\tan 360^\circ$
m) $\sin 225^\circ$	n) $\tan 315^\circ$	o) $\cos 240^\circ$
- Berechne durch Zurückführung auf spitze Winkel:

a) $\sin 1110^\circ$	b) $\cos 1110^\circ$	c) $\tan 1110^\circ$
d) $\sin 36045^\circ$	e) $\cos 36045^\circ$	f) $\tan 36045^\circ$
g) $\sin 100\pi$	h) $\cos 100\pi$	i) $\tan 100\pi$
j) $\sin\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$	k) $\cos\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$	l) $\tan\left(-\frac{201}{4}\pi\right)$
- Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in \mathbb{R}$ im Grad- und Bogenmaß:

a) $\sin \varphi = -1$	b) $\cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$	c) $\tan \varphi = 1$
d) $\sin \varphi = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$	e) $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$	f) $\tan \varphi = -\sqrt{3}$
g) $\sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$	h) $\cos \varphi = 1$	i) $\tan \varphi = -\frac{1}{3} \sqrt{3}$
j) $\cos \varphi = -1$	k) $\cos \varphi = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$	l) $\tan \varphi = -1$
- Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in [0; 2\pi[$:

a) $\sin \varphi = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$	b) $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$	c) $\tan \varphi = -\frac{1}{3} \sqrt{3}$
d) $\sin \varphi = 1$	e) $\cos \varphi = -1$	f) $\tan \varphi = 1$
g) $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$	h) $\cos \varphi = \frac{1}{1} \sqrt{2}$	i) $\tan \varphi = -\sqrt{3}$
j) $\sin(-\varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$	k) $\cos(\pi - \varphi) = \frac{1}{1} \sqrt{3}$	l) $\tan(-\varphi) = \frac{1}{1} \sqrt{3}$

7. Berechne $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ]$ auf $0,1^\circ$ genau:

- a) $\sin \varphi = 0,8$ b) $\cos \varphi = -0,95$ c) $\tan \varphi = 4$
d) $\sin \varphi = -0,2$ e) $\cos \varphi = 0,6$ c) $\tan \varphi = -1,7$

8. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für $\varphi \in [0; 2\pi[$:

- a) $6(\sin \varphi)^2 + \sin \varphi = 4 \sin \varphi$
b) $(\sin \varphi - \sqrt{3})(2 \cdot \cos \varphi - \sqrt{2}) = 0$
c) $2(\sin \varphi)^2 = 3 + 3 \cos \varphi$
d) $(\tan \varphi)^2 = 3$
e) $(\sin \varphi - 1) \tan \varphi = -\frac{1}{4} \cos \varphi$

9. Berechne $\tan \varphi$, wenn

- a) $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ und φ spitz ist
b) $\cos \varphi = -\frac{5}{13}$ und $\varphi \in [90^\circ; 180^\circ]$ ist.

10. Berechne $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, wenn $\tan \varphi = \frac{3}{4}$ und φ spitz ist.

11. Berechne für den spitzen Winkel φ , den $\cos \varphi$ und $\tan \varphi$, wenn gilt

- a) $\sin \varphi = \frac{40}{41}$ b) $\sin \varphi = \frac{3}{5}$.

12. α , β und γ sind die Innenwinkel eines Dreiecks. Vereinfache:

- a) $\sin \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
b) $\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2$
c) $\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta + \gamma}{2}$
d) $\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2 + \tan \frac{\gamma}{2} \cdot \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$

13. α , β , γ und δ sind die Innenwinkel einer Raute. Vereinfache:

- a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta$
b) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta$

14. Berechne (Fallunterscheidung) für $z \in \mathbb{Z}$:

- a) $\sin\left(z \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\cos(z\pi)$ c) $\tan\left(z \frac{\pi}{3}\right)$

15. Bestimme die fehlenden Werte (Fallunterscheidungen!)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin \alpha$	0,6	$-\frac{1}{2}$		$-\sqrt{0,5}$			
$\cos \alpha$			$\frac{5}{12}$		$-\sqrt{0,75}$		
$\tan \alpha$						-1,827	$2 + \sqrt{3}$

16. Auf Seite 110 siehst du eine Tabelle, in der die Verwandtschaftsverhältnisse von \sin , \cos und \tan für einen Winkel des I. Quadranten dargestellt sind. Mache die analoge Tabelle für einen Winkel des

a) II. Quadranten b) III. Quadranten c) IV. Quadranten

17. Berechne die kartesischen Koordinaten

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
r	6	0,6	10	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$	0
φ	30°	135°	240°	π	$0,75\pi$	$\frac{1}{2}$	1

18. Berechne die Polarkoordinaten

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
x	3	12	-15	-7	1	$\sqrt{3}$	0
y	4	-5	8	-24	1	-1	1

19. Berechne die Polarkoordinaten der Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks im Einheitskreis mit Startecke (1|0) für

a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 6$ d) $n = 17$.

• 20. Zeichne punktweise die Kurve, deren Punkte der Gleichung genügen

a) $r = 5$ b) $\varphi = 210^\circ$ c) $r = \varphi$ d) $r = 5 \sin \varphi$ e) $r = \frac{5}{\sin \varphi}$.

Aufgaben zu 6.2

Berechnungen

1. Berechne die fehlenden Winkel und Seitenlängen im Dreieck ABC

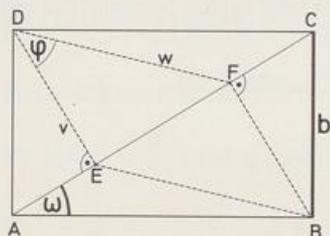
a) $c = 6$, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 65^\circ$ b) $c = 9$, $a = 7$, $\gamma = 110^\circ$

c) $a = 5$, $b = 8$, $\alpha = 30^\circ$ d) $c = 6$, $b = 3\sqrt{3}$, $\beta = 60^\circ$

2. Berechne die fehlenden Winkel und Seitenlängen im Dreieck ABC.
- a) $c = 10$, $b = 6$, $\alpha = 40^\circ$ b) $c = 8$, $b = 5$, $a = 6$
 c) $a = 16,5$, $b = 22$, $c = 27,5$ d) $a = 8$, $b = 4\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$
3. Berechne die restlichen Stücke und den Flächeninhalt vom Dreieck ABC.
- a) $r = 8$, $\beta = 73^\circ$, $\alpha = 44^\circ$ (r ist Umkreisradius)
 b) $c = 6$, $h_a = 5$, $\gamma = 73^\circ$

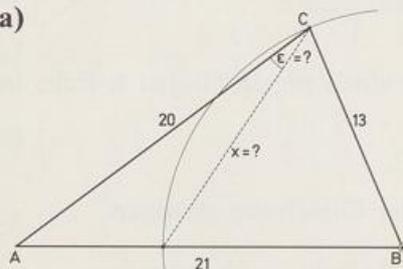
4. RECHTECK

Vom Rechteck ABCD sind b und ω bekannt.

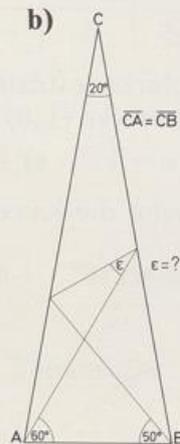


- a) Drücke den Flächeninhalt des Rechtecks mit b und ω aus.
 b) Drücke die Seiten und den Flächeninhalt des Parallelogramms EBFD mit b und ω aus.
 c) Berechne φ , falls $\omega = 31,75^\circ$ ist.
 d) Bei welchem Seitenverhältnis $b : a$ des Rechtecks ist $\varphi = 45^\circ$? (Tip: Ersetze \sin und \cos durch Seitenverhältnisse.)

5. a)



b)

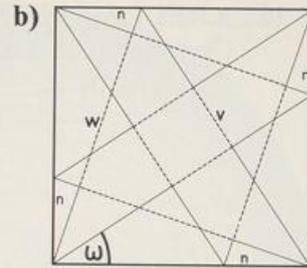
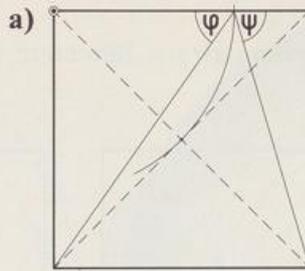


6. Wie lautet der Sinussatz für
- a) ein bei C rechtwinkliges Dreieck?
 b) ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze C?
7. In einem Parallelogramm ABCD ist $a = 7$, $d = 4$ und $\alpha = 55^\circ$. Wie lang sind die Diagonalen?
8. In einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ ist $a = 10$, $b = 5$, $c = 4$ und $d = 6$. Wie groß sind die Innenwinkel?

9. QUADRATE

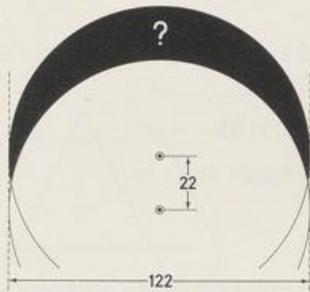
Beide Quadrate haben die Seitenlänge 1.

- a) Berechne φ und ψ .
- b) Gegeben ist ω .

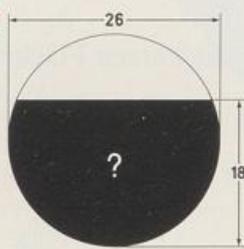


- α) Berechne v und w in Abhängigkeit von ω .
- β) Warum sind die gestrichelten Figuren Quadrate?
- γ) Wie groß ist ω , wenn die gestrichelten Quadrate flächengleich sind?

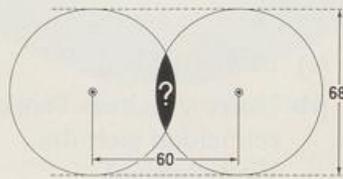
10. a)



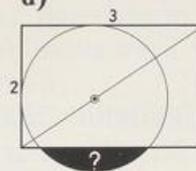
b)



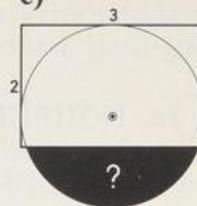
c)



d)



e)



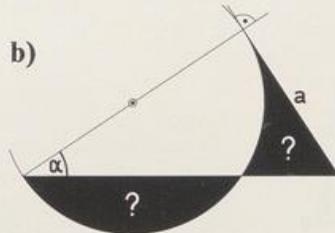
11. KREIS & DREIECK

Berechne die Inhalte der schwarzen Flächenstücke aus den angegebenen Seiten und Winkeln.

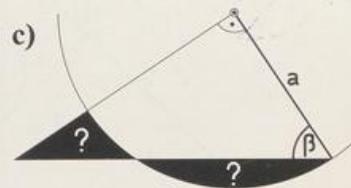
a)



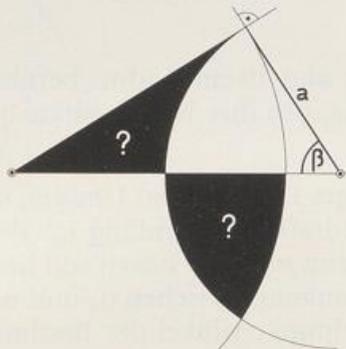
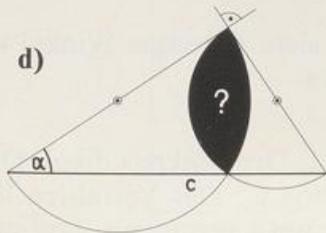
b)



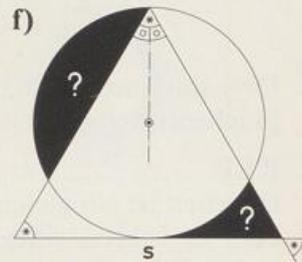
c)



d)

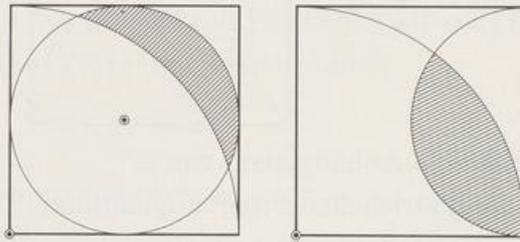


f)



12. KREIS & QUADRAT

Gegeben sind die Einheitsquadrate. Berechne Inhalt und Umfang der schraffierten Flächenstücke.

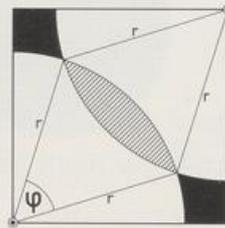


13. FLÄCHENGLEICH

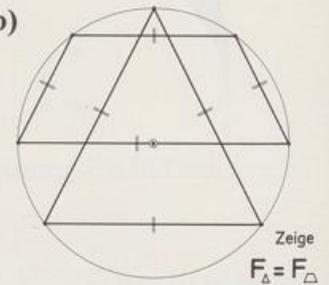
a) Im Quadrat sind die beiden schwarzen Flächenstücke zusammen so groß wie das schraffierte Linsenstück,

α) Bestimme φ .

β) Unter welchem Winkel σ schneiden sich die Viertelkreise?

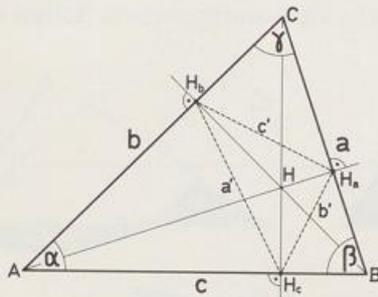


b)



14. HÖHENFUSSPUNKT-DREIECK

Berechne die Seitenlängen, Winkelmaße und den Flächeninhalt des Höhenfußpunkt-Dreiecks aus a , b , c , α , β und γ .

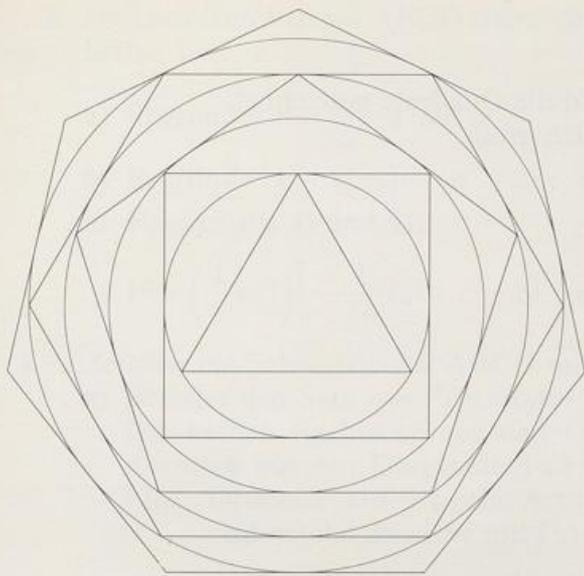


15. Drei Bälle mit 6 cm, 8 cm und 10 cm Radius berühren sich. Berechne Winkel und Flächeninhalt des Dreiecks, das ihre Mittelpunkte bilden.

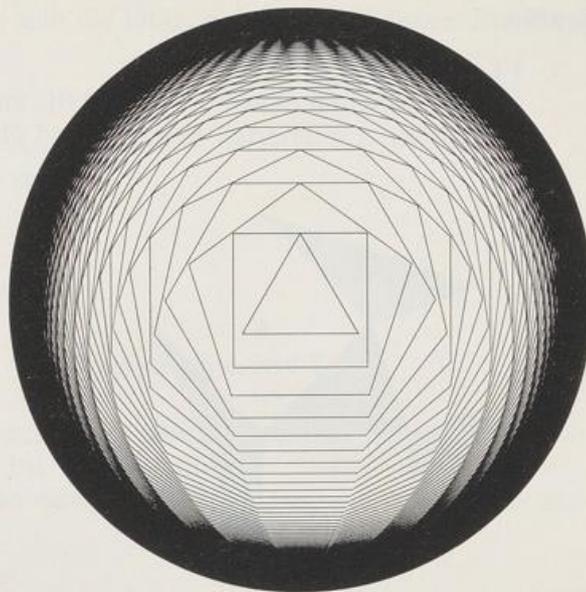
16. KEP

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck vom Umfang $u_3 = 1$. Der Umkreis dieses Dreiecks ist Inkreis eines Quadrats vom Umfang u_4 . Berechne u_4 . Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen, wenn man die Eckenzahl immer um 1 vergrößert. Bestimme den allgemeinen Zusammenhang zwischen u_n und u_{n+1} .

(Tip: Verwende den Mittelpunktswinkel des Bestimmungsdreiecks.)



Vom 3-Eck zum 7-Eck



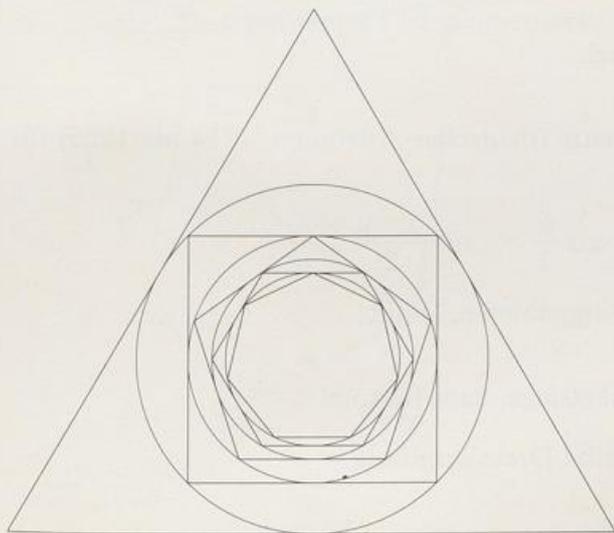
Vom 3-Eck zum 100 000-Eck

17. LER

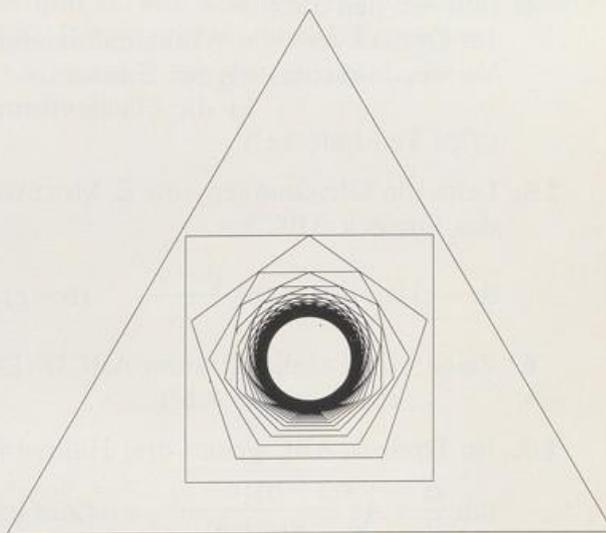
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck vom Umfang $u_3 = 1$. Der Inkreis dieses Dreiecks ist Umkreis eines Quadrats vom Umfang u_4 . Berechne u_4 . Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen, wenn man die Eckenzahl immer um 1 vergrößert. Bestimme den allgemeinen Zusammenhang zwischen u_n und u_{n+1} .

(*Tip*: Verwende den Mittelpunktswinkel des Bestimmungsdreiecks.)

Der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes KEPLER (Weil der Stadt 1571 bis 1630 Regensburg) versuchte mit einer solchen Konstruktion die Verhältnisse der Radien der Planetenbahnen auf regelmäßige Vielecke zurückzuführen. Sein Versuch ist gescheitert.



3-Eck zum 7-Eck

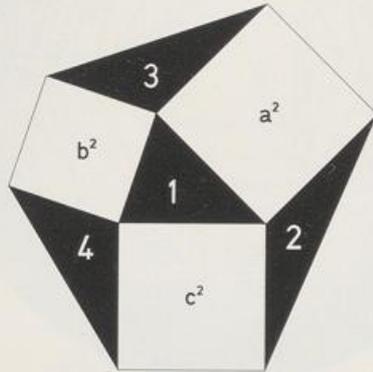


3-Eck zum 100 000-Eck

Beweise

1. FLÄCHENGLEICH

Über den Seiten eines Dreiecks ABC sind die Quadrate gezeichnet. Zeige: Die numerierten Flächen sind gleich groß.



2. Beweise die Formeln für das Dreieck ABC mit Umkreisradius r.

a) $h_c = 2r \sin \alpha \sin \beta$

b) $F = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ c) $F = \frac{abc}{4r}$

3. Beweise den Tangenssatz:

Die Differenz zweier Dreieckseiten verhält sich zur Summe (dieser Seiten) wie der Tangens der halben Differenz der Gegenwinkel (dieser Seiten) zum Tangens der halben Summe dieser Winkel.

4. Beweise den Satz:

Im Dreieck teilt die Winkelhalbierende eine Seite im Verhältnis der beiden andern. Verwende dazu: a) den Sinussatz

b) die Flächenformel.

(Tip: Teildreiecke!)

5. Leite die Gleichungen von E. MOLLWEIDE (deutscher Astronom, 1774 bis 1825) für das Dreieck ABC her.

$$(b + c) \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \quad (b - c) \cos \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$$

6. Zeige: Im Parallelogramm ABCD (Diagonalen e, f) gilt:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

7. Im Dreieck ABC gelten drei Halbwinkelsätze, zum Beispiel

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad s \text{ ist der halbe Dreiecksumfang.}$$

a) Wie lauten die beiden andern Sätze?

b) Beweise den obigen Satz.

8. Im konvexen Viereck ABCD schneiden sich die Diagonalen e und f unter dem Winkel φ .

a) Begründe: $F = \frac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin \varphi$

b) Begründe: $a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos \varphi$

c) Folgere aus a) und b):

$$F^2 = \left(\frac{1}{2} e \cdot f\right)^2 - \frac{1}{16} (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$$

9. Zeichne ein Sehnenviereck ABCD mit den Diagonalen e und f.

a) Beweise den Satz von PTOLEMAIOS:

Die beiden Rechtecke aus den Gegenseiten sind zusammen so groß wie das Rechteck aus den Diagonalen: $ac + bd = ef$.

(Tip: Drücke e^2 auf doppelte Art mit dem Kosinussatz aus und eliminiere $\cos \beta$ und mache dasselbe mit f^2 .)

b) Beweise: $\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$

10. a) Beweise die Formel für den Inkreisradius ϱ im Dreieck ABC

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

s ist der halbe Dreiecksumfang. (Tip: Halbwinkelsatz!)

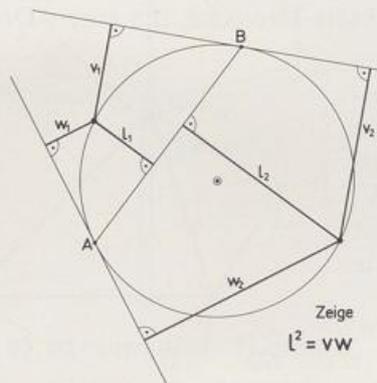
b) Begründe mit a) die Formel von HERON für die Dreiecksfläche F

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

11. GEOMETRISCHES MITTEL

Zwei Geraden berühren einen Kreis in A und B. Von einem Kreispunkt fällt man das Lot l auf die Berührsehne [AB] und die Lote v und w auf die Tangenten.

Zeige: Das Sehnenlot l ist geometrisches Mittel der Tangentenlote $l = \sqrt{vw}$.

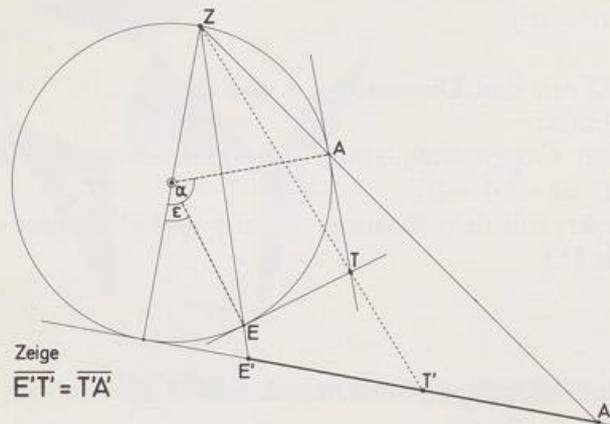


12. PROJEKTION

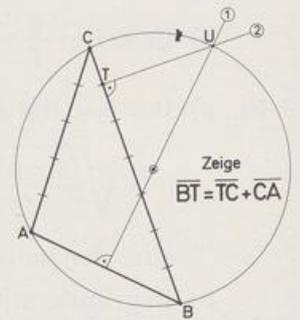
Vom Endpunkt Z eines Kreisdurchmessers ($d = 2$) aus projiziert man zwei Kreispunkte A und E auf die Gerade, die den Kreis im andern Endpunkt des Durchmessers berührt: Die Projektionen sind A' und E' . Die Kreistangenten durch A und E schneiden sich in T .

a) Berechne die Länge von $[A'E']$ in Abhängigkeit von α und ε .

b) Zeige: Die Projektion T' von T auf die Tangente halbiert die Strecke $[A'E']$.



Zeige
 $\overline{E'T'} = \overline{T'A'}$



Zeige
 $\overline{BT} = \overline{TC} + \overline{CA}$

13. BERUNI

Die Mittelsenkrechte m_{AB} einer Dreieckseite schneidet den zugehörigen längeren Umkreisbogen in U ; das Lot durch U auf der Dreieckseite a hat den Lotfußpunkt T .

Beweise den Satz von Abu-r-Raihan Mohammed ibn al-Beruni (persischer Astrologe, Mathematiker, Geograf, Mineraloge, Religionswissenschaftler, 973 bis nach 1050):

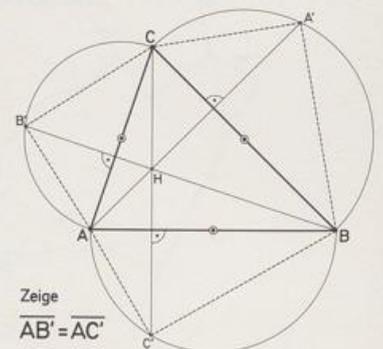
T halbiert den Streckenzug $[ABC]$.

14. PYRAMIDE

a) Zeige: Zwei (gestrichelte) Katheten der Thaleskreis-Dreiecke, die einen Dreieckspunkt gemeinsam haben, sind gleich lang.

b) Wegen a) bilden die drei rechtwinkligen Dreiecke zusammen mit dem Dreieck ABC das Netz einer Pyramide $ABCS$: Klappt man die rechtwinkligen Dreiecke hoch, dann treffen sich A' , B' und C' in der Spitze S . Der Höhenfußpunkt H ist dann die senkrechte Projektion von S in die Dreiecksebene.

Berechne die Höhe dieser Pyramide aus a , b , c , α , β und γ des Grundflächendreiecks.



Zeige
 $\overline{AB'} = \overline{AC'}$

Näherungen

Bei einigen Konstruktionsaufgaben waren sich die Geometer lange Zeit nicht im Klaren, ob die Ausführung allein mit Zirkel und Lineal, die klassische Konstruktion also, möglich sei. In die Geschichte eingegangen sind die berühmten Probleme:

Würfverdopplung:

Wie konstruiert man zu einem gegebenen Würfel die Kantenlänge eines andern Würfels, der doppelten Rauminhalt hat?

Winkeldrittung:

Wie konstruiert man den dritten Teil eines Winkels?

Rektifikation des Kreises:

Wie konstruiert man eine Strecke, die so lang ist wie ein gegebener Kreis?

Wie konstruiert man eine Strecke, die so lang ist wie ein gegebener Kreisbogen?

Quadratur des Kreises

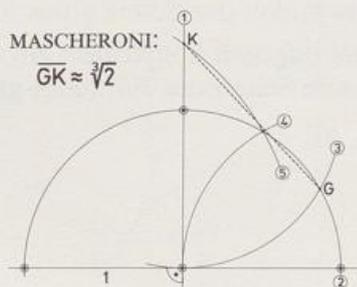
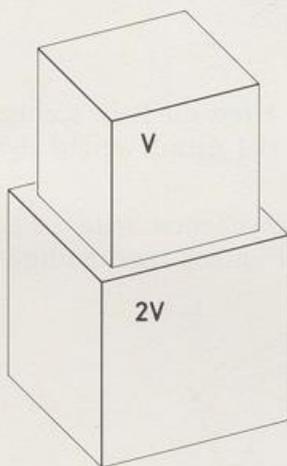
Wie konstruiert man ein Quadrat, das einem gegebenen Kreis flächengleich ist?

Wir wissen heute, dass diese Probleme allgemein klassisch nicht lösbar sind. Alle Konstruktionen zu diesem Thema sind zwar keine Lösungen im geometrischen Sinn, sie verkennen nämlich die Lösungsidee, wohl aber sind sie Lösungen für den Praktiker, den Baumeister, den Ingenieur. Man nennt sie deshalb Näherungskonstruktionen. Mit ihnen erreicht man oft eine Genauigkeit, die die Zeichnung von der angestrebten Figur fürs Auge ununterscheidbar macht.

1. WÜRFELVERDOPPLUNG

Von den beiden Würfeln hat der untere doppelt so großes Volumen wie der obere. Der obere Würfel hat die Kantenlänge 1.

a) Berechne die Kantenlänge des unteren Würfels.

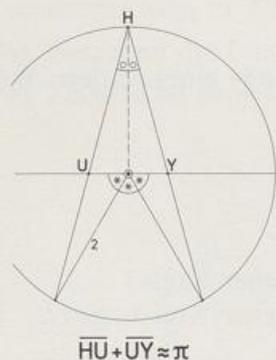


b) MASCHERONI (Lorenzo, italienischer Mathematiker und Lyriker, Castagnetto 1750 bis 1800 Paris) hat eine Konstruktion angegeben, die den Wert $\sqrt[3]{2}$ sehr gut annähert.

Berechne die Länge von [GK]. Um wie viel Prozent weicht sie vom exakten Wert ab?

2. π

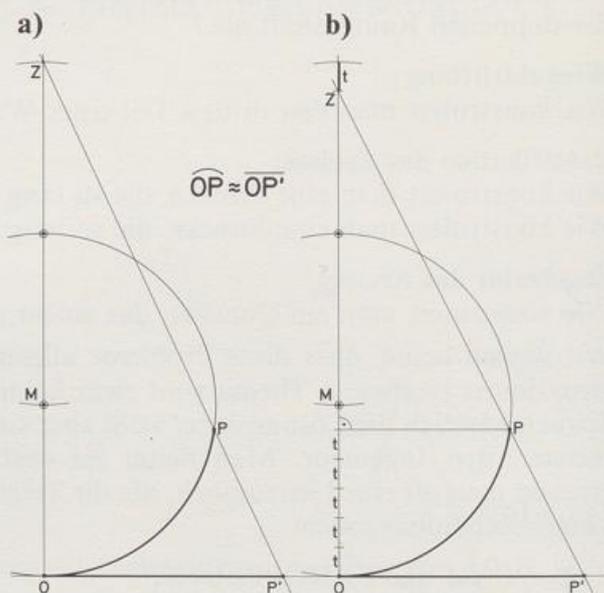
HUYGENS (Christiaan, niederländischer Physiker und Mathematiker, Den Haag 1629 bis 1695 Den Haag) hat eine Näherungskonstruktion für π angegeben. Berechne die Länge des Streckenzugs [HUY]. Um wie viel Prozent weicht sie von π ab?



• 3. ABWICKLUNG

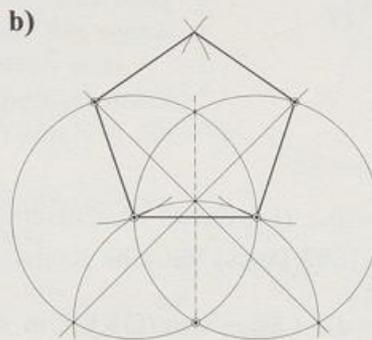
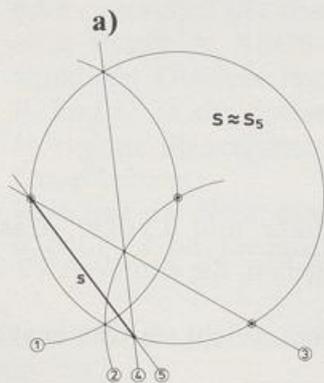
NIKOLAUS VON KUES (deutscher Philosoph und Theologe, Kues an der Mosel 1401 bis 1464 Todi) und LAMBERT (Johann Heinrich, deutscher Philosoph, Mathematiker und Physiker, Mülhausen [Elsass] 1728 bis 1777 Berlin) haben eine Strecke konstruiert, die etwa genau so lang ist wie ein gegebener Kreisbogen (Einheitskreis).

Wie lang ist der Kreisbogen OP, wenn der zugehörige Mittelpunktswinkel OMP 30° , 60° , 90° ist? Um wie viel Prozent weicht jeweils die Länge von [OP] von der des entsprechenden Bogens ab? (Additionstheorem nötig!)



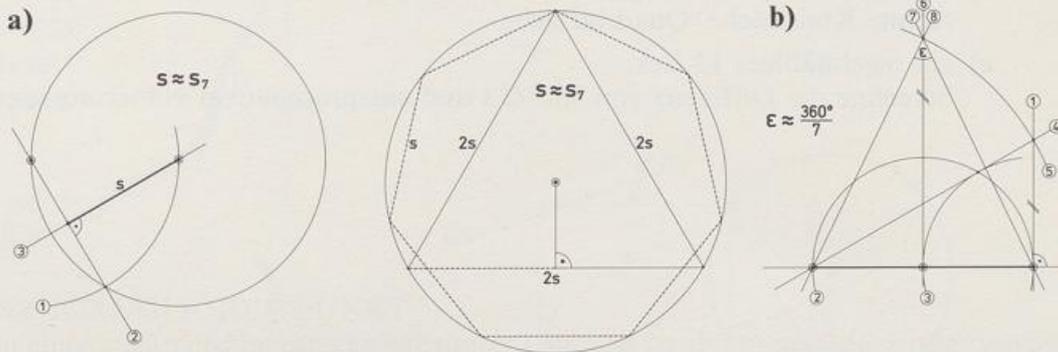
• 4. FÜNFECK

- a) LEONARDO DA VINCI konstruiert in einen gegebenen Kreis die Seite s eines fast regelmäßigen Fünfecks in fünf Schritten. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktswinkel der Sehne s von 72° ab?
- b) DÜRER dagegen konstruiert ein Fünfeck aus einer gegebenen Seite. Sind alle Seiten des Fünfecks gleich lang? Ist das Fünfeck regelmäßig?



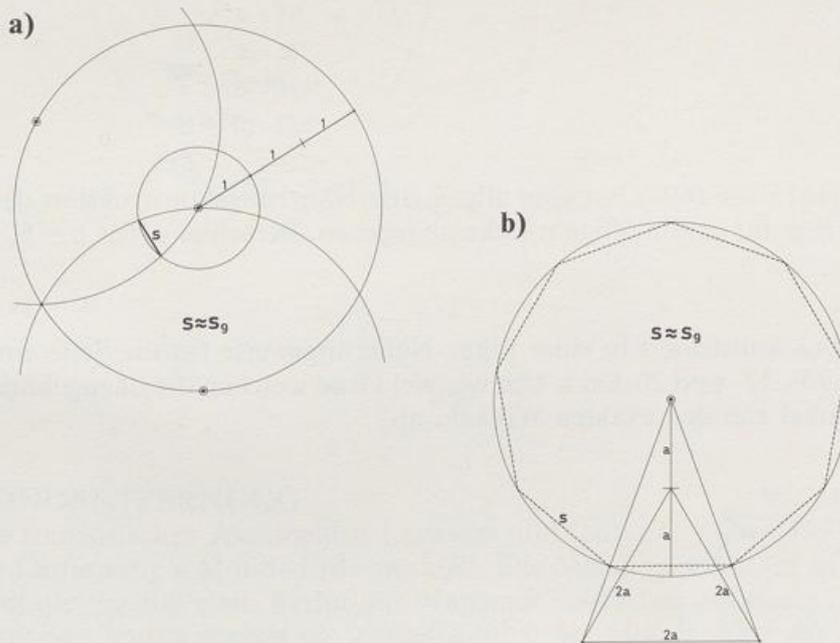
• 5. SIEBENECK

- a) LEONARDO DA VINCI konstruiert in einen gegebenen Kreis die Seite s eines fast regelmäßigen Siebenecks in drei Schritten. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktswinkel der Sehne s von $360^\circ/7$ ab?
- b) Berechne den Unterschied von $360^\circ/7$ und ε .



• 6. NEUNECK

- a) DÜRER konstruiert in einen Kreis mit $r = 1$ die Seite s eines regelmäßigen Neunecks. Um wie viel Grad weicht der Mittelpunktswinkel der Sehne s von 40° ab?
- b) Um wie viel Grad weicht der zu s gehörige Mittelpunktswinkel von 40° ab?



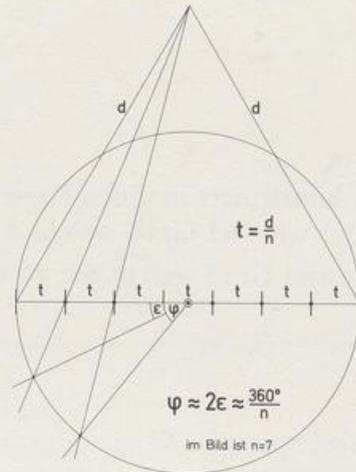
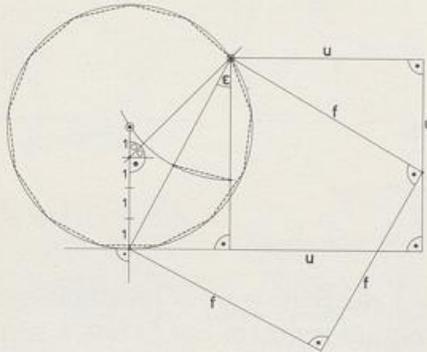
• 7. ELFECK

- DÜRER nimmt $9/32$ des Kreisdurchmessers als Näherungswert für ein diesem Kreis einbeschriebenes regelmäßiges Elfeck. Um wie viel Grad weicht der zu dieser Seite gehörige Mittelpunktswinkel von $360^\circ/11$ ab?

• 8. WILLI

Von Ernst WILLI (Schweizer Bildhauer, geboren 1900) stammt eine dreifältige Näherungskonstruktion für

- ein Quadrat (Seitenlänge u), das einem gegebenen Kreis umfanggleich ist, berechne Kreisumfang : Quadratumfang
- ein Quadrat (Seitenlänge f), das einem gegebenen Kreis flächengleich ist, berechne Kreisfläche : Quadratfläche
- ein regelmäßiges 13-Eck, berechne die Differenz von $360^\circ/13$ und entsprechendem Näherungswert ϵ .

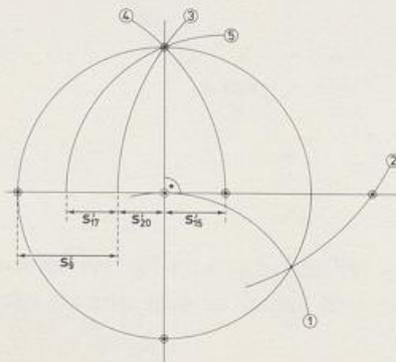


9. RENALDINI

RENALDINI (1615 bis 1698) hat eine allgemeine Näherungskonstruktion der Mittelpunktswinkel φ für regelmäßige n -Ecke angegeben. Berechne φ für $n = 5, 7, 9$ und 11 .

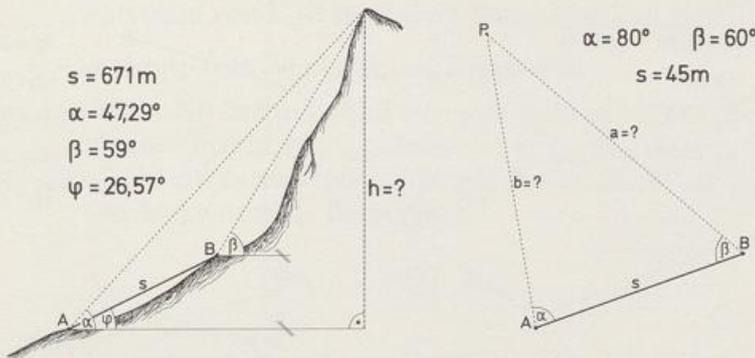
10. POSTULA

Henri POSTULA konstruiert in einer Figur Näherungswerte für die Seite eines regelmäßigen 9-, 15-, 17- und 20-Ecks. Um wie viel Grad weichen die dazugehörigen Mittelpunktswinkel von den exakten Winkeln ab?



Vermessung

1. HÖHENMESSUNG

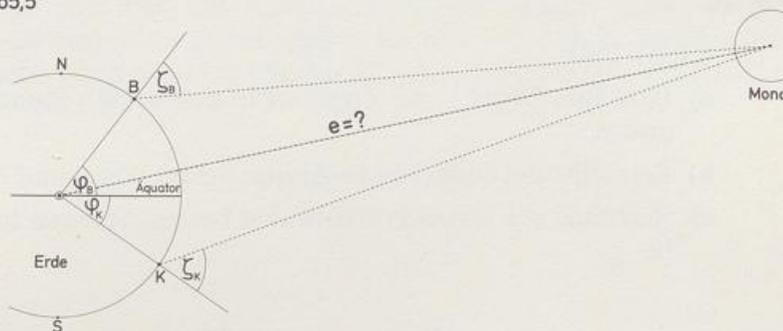
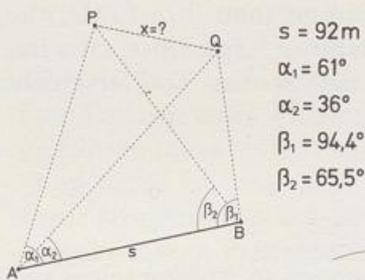


2. UNZUGÄNGLICHER PUNKT

Von einer zugänglichen Strecke bekannter Lage aus bestimmt man die Entfernungen eines unzugänglichen Punkts P.

3. UNZUGÄNGLICHE STRECKE

Von einer zugänglichen Strecke bekannter Lage aus bestimmt man die Länge einer unzugänglichen Strecke.



• 4. MONDENTFERNUNG

Die französischen Astronomen LALANDE und LACAILLE haben 1771 trigonometrisch die Entfernung e Mond–Erde ermittelt. Die Messungen fanden in Berlin und Kapstadt gleichzeitig statt. Berlin und Kapstadt liegen fast auf demselben Längengrad. Gemessen wurde jeweils die Zenitdistanz ζ des Mondes. ζ ist der Winkel zwischen Lot und Verbindungsstrecke Mond–Beobachter. Bestimme aus den Messwerten das Verhältnis Mondentfernung : Erdradius.

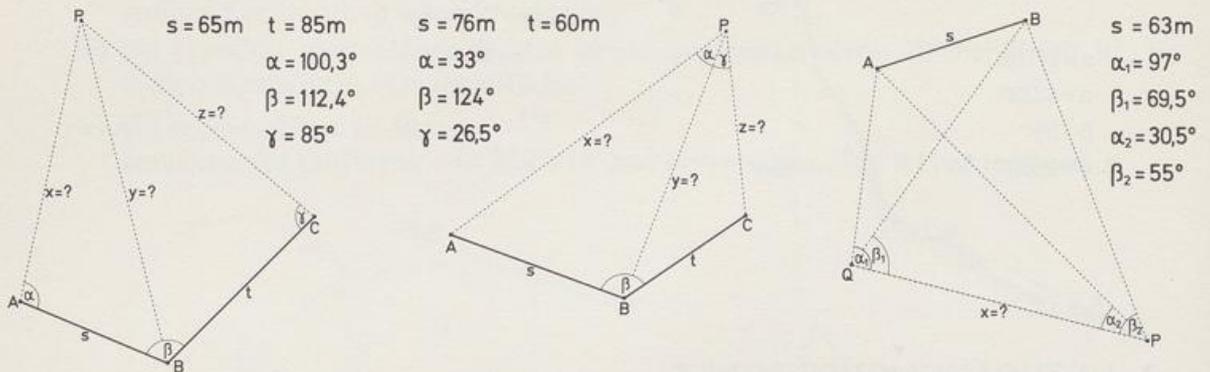
Berlin: $\varphi_B = 52^\circ 31' 13''$ $\zeta_B = 41^\circ 15' 44''$

Kapstadt: $\varphi_K = -33^\circ 55' 15''$ $\zeta_K = 46^\circ 33' 37''$

Erdradius: $r = 6370 \text{ km}$

VORWÄRTSEINSCHNEIDEN

5. Von drei zugänglichen Punkten bekannter Lage aus bestimmt man die Entfernungen eines unzugänglichen Punkts P.



6. RÜCKWÄRTSEINSCHNEIDEN (Aufgabe von SNELLIUS [1617] und POTHENOT [1692])

Vom zugänglichen Punkt P aus bestimmt man die Entfernungen zu drei unzugänglichen Punkten A, B und C bekannter Lage.

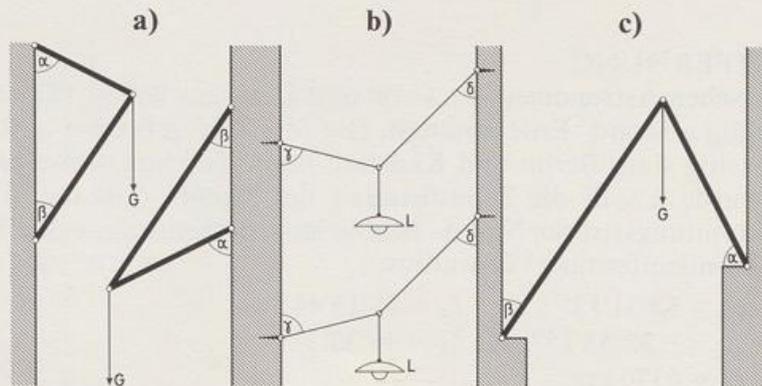
7. SNELLIUS-HANSEN

Von zwei zugänglichen Punkten P und Q aus bestimmt man ihre Entfernung mit Hilfe der beiden zugänglichen Punkte A und B bekannter Lage. (SNELLIUS hat diese Aufgabe gelöst in einem Buch, das 1627, ein Jahr nach seinem Tod, erschienen ist; HANSEN hat die Aufgabe 1841 gelöst.)

Physik

1. KRÄFTIG

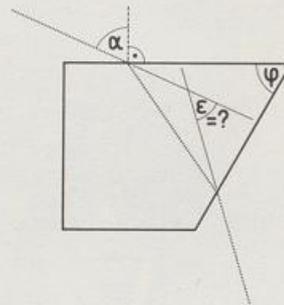
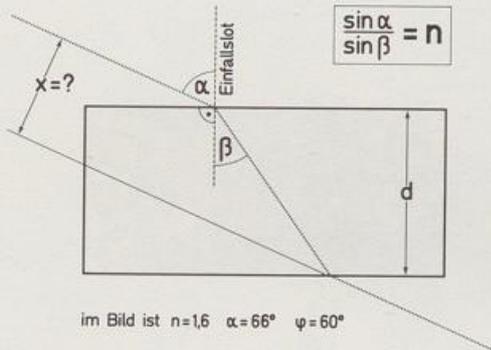
- Berechne Druck- und Zugkraft in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G , α und β .
- Berechne die Seilkräfte in Abhängigkeit von γ und δ und vom Lampengewicht L .
- Berechne die Druckkräfte in den beiden Stangen in Abhängigkeit von G , α und β .



2. BRECHUNG

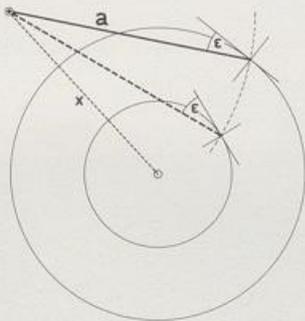
SNELLIUS (Willebrord, niederländischer Mathematiker und Physiker, Leiden 1580 bis 1626 Leiden) hat das nach ihm benannte Brechungsgesetz gefunden. Wenn ein Lichtstrahl von Luft in einen Körper übergeht, gilt: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$; n heißt Brechzahl, sie hängt nur vom Material des Körpers ab.

- Geht ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte, so sind ein- und ausfallender Strahl um x parallel versetzt. Berechne x für $d = 30$ mm.
- Geht ein Lichtstrahl durch ein Prisma, so bilden ein- und ausfallender Strahl den Ablenkwinkel ε . Berechne ε .

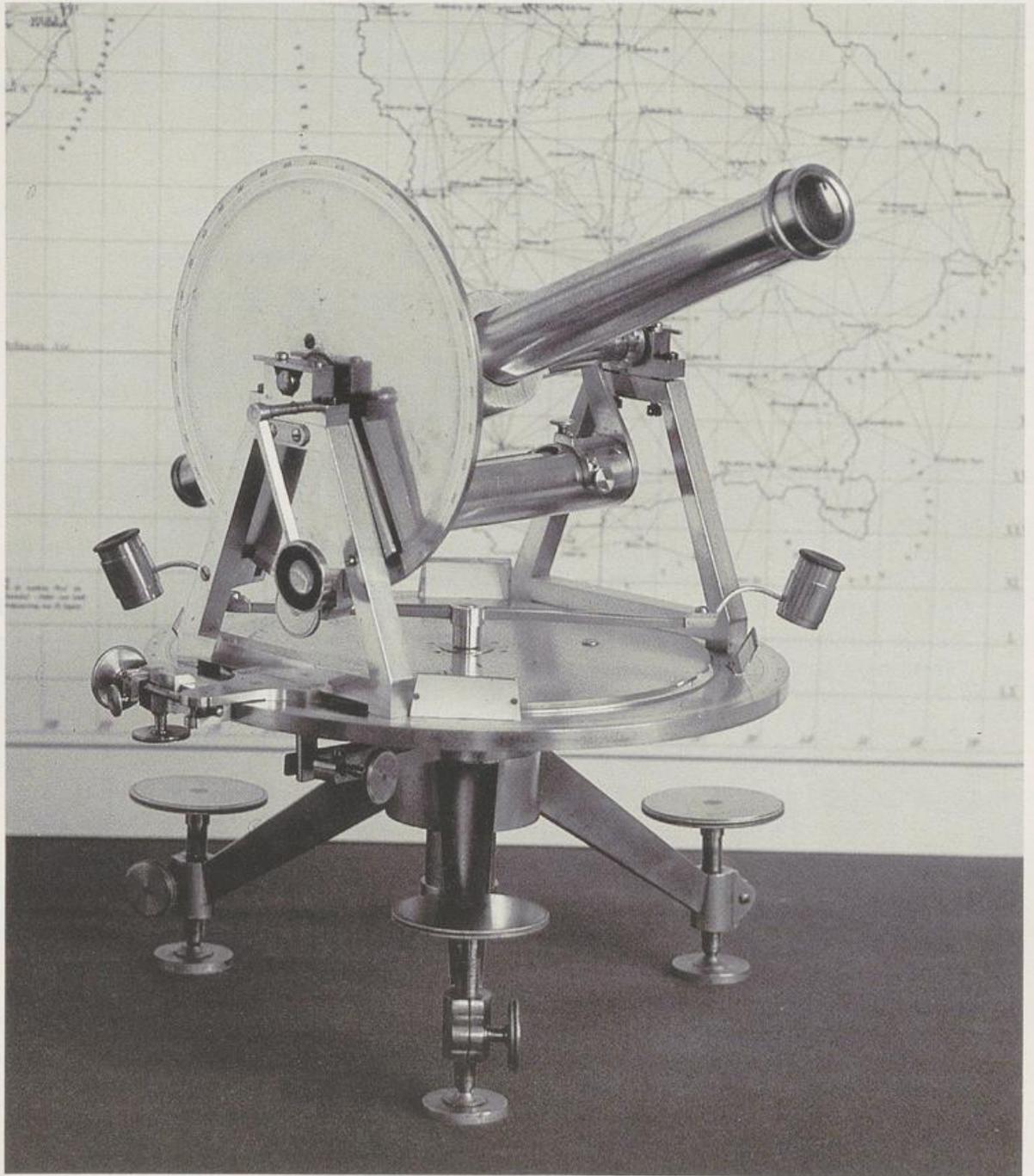


3. TONARM

Der Tonarm eines Plattenspielers ist dazu da, die Diamantspitze so in der Tonrinne zu führen, dass beim Abtasten möglichst wenig Verzerrungen entstehen. Eine Bedingung dafür ist, dass Arm und Rinne am Anfang (Außenradius $R = 15$ cm) und am Ende (Innenradius $r = 10$ cm) einen gleich großen Winkel ε bilden. In welcher Entfernung x vom Plattenloch muss ein 25 cm langer Tonarm seinen Drehpunkt haben?

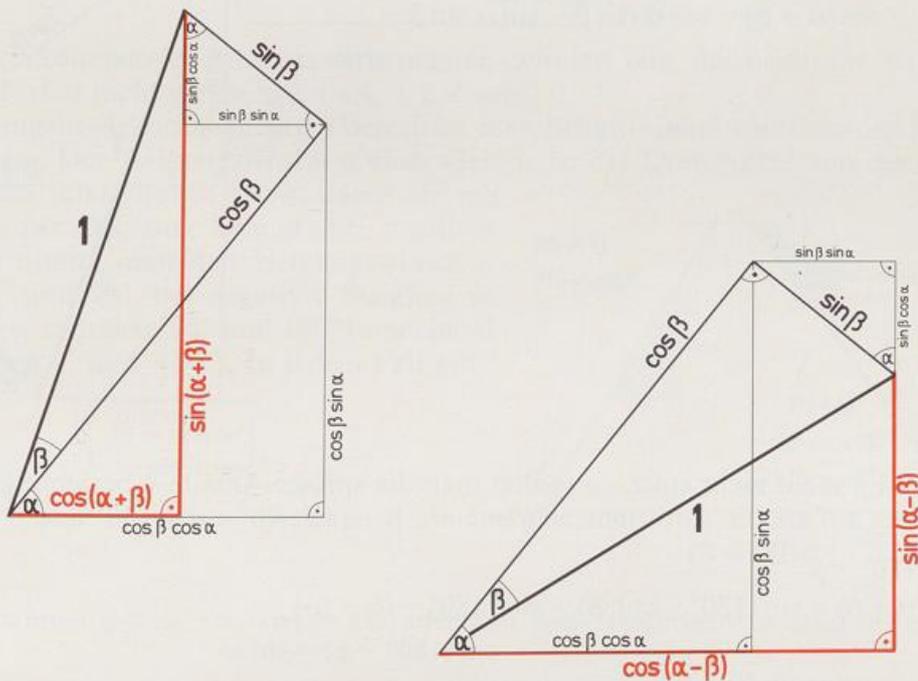


7. Kapitel Summenformeln



Theodolit von Reichenbach, Utzschneider und Liebherr, um 1810, München

Von manchen Winkeln kennen wir die exakten Sinuswerte, zum Beispiel ist $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Lässt sich der Sinus von $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ beziehungsweise $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ genau berechnen? Schön wäre es, wenn $\sin(45^\circ + 30^\circ)$ gleich $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ$ wäre. Nun ist aber $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) \approx 1,2$, das ist mehr als 1 – also kann's so einfach nicht gehen! Wir brauchen eine Formel, die einen Zusammenhang zwischen $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ herstellt. Zunächst soll $\alpha + \beta < 90^\circ$ und $\alpha \geq \beta$ sein. Wir tragen an einen Schenkel von α den Winkel β einmal nach außen und einmal nach innen so an, dass der neue Schenkel die Länge 1 hat: Jedesmal entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 1 und den Katheten $\sin \beta$ und $\cos \beta$.



Betrachten wir die Figur für $\alpha + \beta$. Beim Abtragen von β nach außen entsteht noch ein rechtwinkliges Dreieck mit derselben Hypotenuse 1, aber mit den (roten) Katheten $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$. Vom Endpunkt des gemeinsamen Schenkels der Länge $\cos \beta$ fallen wir die Lote auf die roten Katheten (beziehungsweise ihre Verlängerungen), zwei neue rechtwinklige Dreiecke entstehen: Das eine hat die Hypotenuse $\sin \beta$ und die Katheten $\sin \beta \sin \alpha$ und $\cos \beta \cos \alpha$. Ein Blick auf die Figur zeigt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

und $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

Die Figur für $\alpha - \beta$ ist analog aufgebaut. Aus ihr lesen wir ab:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

und $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$

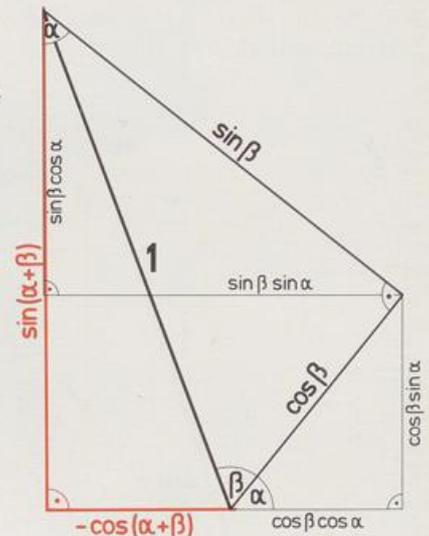
Dieser Beweis stimmt nur für $\alpha + \beta < 90^\circ$ und $\alpha \geq \beta$. Die vier Beziehungen aber gelten für beliebige Winkel, das heißt, α und β dürfen zum Beispiel auch negativ sein. Deshalb muss man sich bloß die Summenformeln merken. Man fasst sie zusammen als

Additionstheoreme für sin und cos

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Ein Beispiel zeigt den Beweis der Additionstheoreme für den Fall, dass α und β spitz sind $\alpha + \beta$ aber stumpf ist. Auch die dritte Figur ist analog der ersten aufgebaut, aus ihr liest man ab:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \text{und } -\cos(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta, \text{ das heißt} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$



Sind α und β nicht mehr spitz, so spaltet man die spitzen Anteile $\hat{\alpha}$ beziehungsweise $\hat{\beta}$ ab und wendet auf sie die Additionstheoreme an. Beispiel: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ und $0^\circ < \beta < 90^\circ$

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - \hat{\alpha} \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin(180^\circ - \hat{\alpha} + \beta) = \sin(180^\circ - (\hat{\alpha} - \beta)) \\ &= \sin(\hat{\alpha} - \beta) & \sin(180^\circ - \varphi) &= \sin \varphi \\ &= \sin \hat{\alpha} \cos \beta - \cos \hat{\alpha} \sin \beta & \text{Additionstheorem} \\ &= \sin(180^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(180^\circ - \alpha) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - \hat{\alpha} \\ \cos(180^\circ - \varphi) &= -\cos \varphi \end{aligned} \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Jetzt endlich finden wir den genauen Wert von $\sin 75^\circ$:

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

Auch für den Tangens gibt es ein Additionstheorem; wir leiten es aus den Additionstheoremen für sin und cos her:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad \text{kürzen mit } \cos \alpha \cos \beta \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

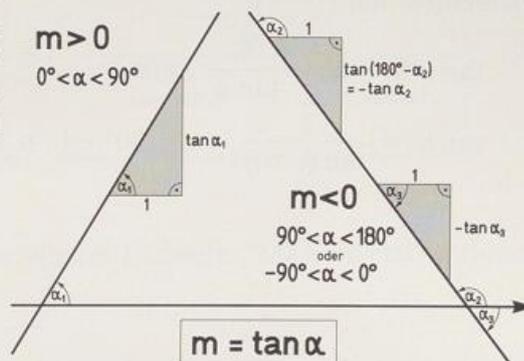
Additionstheorem für tan

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Alle darin vorkommenden Tangenswerte müssen definiert sein, das heißt, die Winkel α , β und $\alpha + \beta$ dürfen nicht gleich $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sein.

Mit dem Tangens-Additionstheorem berechnet man **Schnittwinkel** von Geraden im Koordinatensystem. Der Neigungswinkel α einer Gerade ist der Drehwinkel, um den man die x-Achse nach links drehen muss, damit sie mit der Gerade zur Deckung kommt: bei positiver Steigung m nimmt man den Neigungswinkel α zwischen 0° und 90° , bei negativer Steigung m nimmt man α zwischen 90° und 180° (manchmal auch zwischen 0° und -90°). In jedem Fall gilt

$$m = \tan \alpha$$



Der Schnittwinkel $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ zweier Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 errechnet sich so:

$$\tan \varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

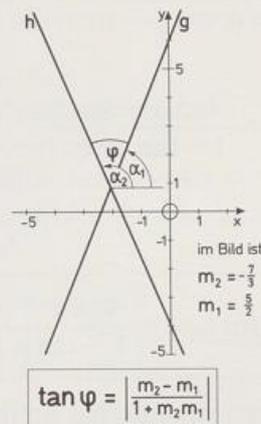
Beispiel: Die Geraden $g: y = \frac{5}{2}x + 6$ und $h: y = -\frac{7}{3}x - 4$ haben die Steigungen $m_1 = \frac{5}{2}$

$$\text{und } m_2 = -\frac{7}{3}$$

$$\tan \varphi = \frac{-\frac{7}{3} - \frac{5}{2}}{1 - \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{-\frac{29}{6}}{-\frac{29}{6}} = 1.$$

Die Geraden schneiden sich unter $\varphi = 45^\circ$.

Hätten wir m_1 und m_2 vertauscht, so hätte sich ergeben $\tan \varphi = -1$ und deshalb $\varphi = 135^\circ$ beziehungsweise $\varphi = -45^\circ$. Damit die Formel immer den spitzen Schnittwinkel liefert, unterdrücken wir solche Minuszeichen mit dem Betrag:

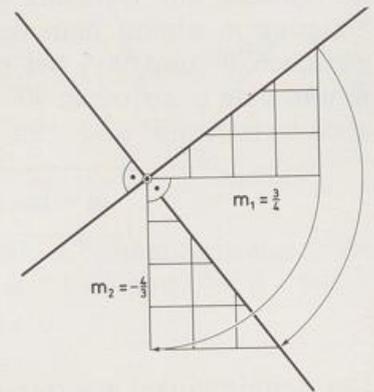


$$\tan \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right|$$

Diese Formel klappt freilich nur, wenn der Nenner $1 + m_2 m_1$ ungleich null ist. Wenn er aber gleich null ist, dann gilt $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, das heißt, $\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}$. Wegen der Komplementformel

$$\tan(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{\tan \varphi} \quad \text{gilt}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{1}{\tan(-\alpha_1)} = \tan(90^\circ - (-\alpha_1)) = \tan(90^\circ + \alpha_1),$$



also unterscheiden sich α_1 und α_2 um 90° : Die Geraden stehen aufeinander senkrecht. Verwendet man den Kotangens, dann sieht man dies auch direkt:

$$\cot \varphi = \left| \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1} \right| = 0, \quad \text{also ist } \varphi = 90^\circ. \quad \text{Damit gilt}$$

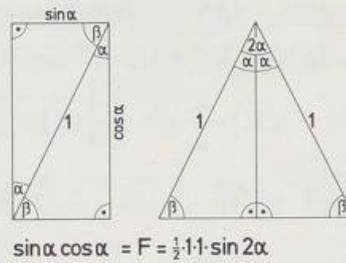
Ist eine Steigung m_2 der negative Kehrwert einer andern Steigung m_1 , dann sind die zugehörigen Geraden g_1 und g_2 zueinander senkrecht.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow g_1 \perp g_2$$

Aus den Additionstheoremen folgen viele weitere Formeln. Besonders wichtig sind die Doppelwinkel- und Halbwinkel-Formeln. Für $\alpha = \beta$ ergeben sich die

Doppelwinkel-Formeln

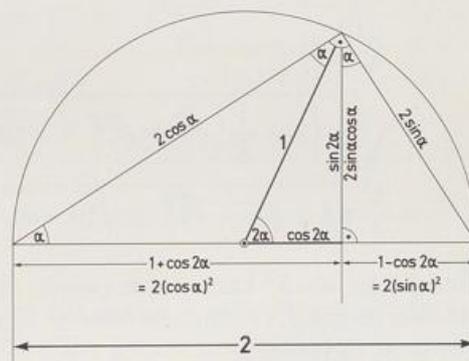
$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 \\ &= 1 - 2(\sin \alpha)^2 \\ &= 2(\cos \alpha)^2 - 1 \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} \end{aligned}$$



Die erste Formel lässt sich einfach veranschaulichen.

Auch ein anderes Bild veranschaulicht einige der Doppelwinkel-Formeln. In einem Halbkreis (Radius 1) sehen wir ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α und der Hypotenuse 2. Der Radius 1 bildet mit der Hypotenuse den Winkel 2α (warum?). Mit den Beziehungen von Seite 108:

Gegenkathete = Hypotenuse mal Sinus



Ankathete = Hypotenuse mal Kosinus

lesen wir ab: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $1 + \cos 2\alpha = 2(\cos \alpha)^2$
 $1 - \cos 2\alpha = 2(\sin \alpha)^2$

Die Halbwinkel-Formeln folgen aus den Doppelwinkel-Formeln: Man ersetzt α durch $\alpha/2$.

***Halbwinkel-Formeln**

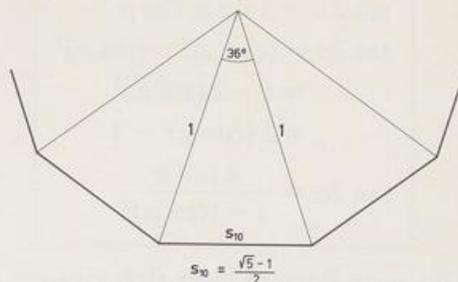
$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \\ \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) \\ \left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \end{aligned}$$

Mit diesen Formeln lassen sich die exakten sin-, cos- und tan-Werte aller konstruierbaren Winkel mit ganzzahligem Gradmaß berechnen. Startwinkel sind 90° (Lot), 60° (gleichseitiges Dreieck) und 36° (Zehneck). Für sie gilt:

$$\begin{array}{l|l|l} \sin 90^\circ = 1 & \cos 90^\circ = 0 & \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} & \\ \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} & \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) & \tan 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \end{array}$$

Den Kosinus des kleinsten dieser Winkel: $\cos 3^\circ$ berechnen wir so:

$$\begin{aligned}\cos 6^\circ &= \cos(36^\circ - 30^\circ) && \text{Additionstheorem anwenden} \\ &= \cos 36^\circ \cos 30^\circ + \sin 36^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}(\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\end{aligned}$$



$$\cos 36^\circ = \frac{l^2 + l^2 - s_{10}^2}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned}\cos 3^\circ &= \cos \frac{6^\circ}{2} && \text{Halbwinkel-Formel anwenden} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 6^\circ)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8}(\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\right)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

Ausgehend von $\cos 3^\circ$ kann man (wenn man will) mit den Summenformeln die sin-, cos- und tan-Werte aller Vielfachen von 3° berechnen, also aller konstruierbaren Winkel mit ganzzahligem Gradmaß.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
3°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)(2+\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{5}})$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)(2-\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{5}})$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{5}-4)(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2)$
6°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{15-6\sqrt{5}}-1)$ $= \frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{3})$ $= \frac{1}{8}(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}+\sqrt{15})$	$\frac{1}{2}(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15})$
9°	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2})(1-\sqrt{5-2\sqrt{5}})$ $= \frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{5})$ $= \frac{1}{4}(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}})$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2})(1+\sqrt{5-2\sqrt{5}})$ $= \frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{5})$ $= \frac{1}{4}(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}})$	$\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
12°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{3})$ $= \frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15})$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{15+6\sqrt{5}}+1)$ $= \frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$ $= \frac{1}{2}(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}})$
15°	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}})$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
21°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-2+\sqrt{5-2\sqrt{5}})$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}+2+\sqrt{5-2\sqrt{5}})$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-2\sqrt{5}+4)(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2)$

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
24°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{5-2\sqrt{5}})$ $=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{15-6\sqrt{5}}+1)$ $=\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{3})$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{50+22\sqrt{5}}-3\sqrt{3}-\sqrt{15})$
27°	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-1)$ $=\frac{1}{8}(2\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{10})$ $=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(1+\sqrt{5+2\sqrt{5}})$ $=\frac{1}{8}(2\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2})$ $=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
33°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+2+\sqrt{5+2\sqrt{5}})$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-2+\sqrt{5+2\sqrt{5}})$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{5}-4)(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2)$
36°	$\frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
39°	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+2-\sqrt{5-2\sqrt{5}})$	$\frac{\sqrt{2}}{16}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)(2-\sqrt{3}+\sqrt{5-2\sqrt{5}})$	$\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-\sqrt{15}+2\sqrt{5}-4)(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2)$
42°	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{15+6\sqrt{5}}-1)$ $=\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{3})$ $=\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}+\sqrt{15})$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10+2\sqrt{5}})$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Zwei Formelgruppen runden dieses Kapitel ab. In der ersten werden Produkte in Summen und Differenzen umgewandelt, in der zweiten Gruppe geht's umgekehrt.

Additionstheoreme I $\sin(\gamma + \delta) = \sin \gamma \cos \delta + \cos \gamma \sin \delta$
 II $\sin(\gamma - \delta) = \sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta$
 I + II $\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) = 2 \sin \gamma \cos \delta \quad || : 2$

$$\sin \gamma \cos \delta = \frac{1}{2} [\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta)]$$

Verwenden wir wieder α und β statt γ und δ , so ergibt sich die erste Gruppe:

***Produkt-Summen-Formeln**

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Die unteren beiden Formeln ergeben sich, wenn man die Additionstheoreme für $\cos(\gamma + \delta)$ und $\cos(\gamma - \delta)$ addiert beziehungsweise subtrahiert.

Jetzt zur zweiten Gruppe: Aus den Additionstheoremen I und II von oben folgt

$$I + II \quad \sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) = 2 \sin \gamma \cos \delta \quad \boxed{A}$$

$$I - II \quad \sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta) = 2 \cos \gamma \sin \delta \quad \boxed{B}$$

$$\text{setze } \left. \begin{array}{l} \gamma + \delta = \alpha \\ \gamma - \delta = \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\gamma = \alpha + \beta \\ 2\delta = \alpha - \beta \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \delta = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array}$$

$$\text{einsetzen in } \boxed{A} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{in } \boxed{B} \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Durch ähnliche Umformungen ergeben sich Ausdrücke für $\cos \alpha + \cos \beta$ und $\cos \alpha - \cos \beta$.

*Summen-Produkt-Formeln

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

*Goniometrische Gleichungen

Neben den algebraischen Termen wie $2x + 1$, x^2 , \sqrt{x} , ... haben wir jetzt auch trigonometrische Terme kennen gelernt wie $\sin x$, $\cos 2x$, $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Eine Gleichung heißt **goniometrisch**, wenn sie die Unbekannte x in mindestens einem trigonometrischen Term enthält. Wir beschränken uns vorläufig auf **rein-goniometrische** Gleichungen; das sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte x nur in trigonometrischen Termen auftritt.

Beispiele rein-goniometrischer Gleichungen:

$$\boxed{1} \quad (\tan x)^2 = \tan x \quad \boxed{2} \quad \cos 2x - \cos x = 0$$

$$\boxed{3} \quad 3 \sin x - 4 \cos x = 0 \quad \boxed{4} \quad 3 \sin x - 4 \cos x = 5$$

Beim Auflösen versucht man, auf eine Gleichung zu kommen, die nur noch einen trigonometrischen Term (womöglich an mehreren Stellen) enthält. Zum Umformen dienen die bisher abgeleiteten Formeln.

$$\boxed{1} \quad (\tan x)^2 = \tan x$$

Hier kommt nur $\tan x$ vor, zum Lösen genügt Algebra
 $\tan x(\tan x - 1) = 0$, also $\tan x = 0$ oder $\tan x = 1$

$$x_{1k} = 0 + k\pi \quad \text{oder} \quad x_{2k} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{2} \quad \cos 2x - \cos x = 0$$

wir drücken $\cos 2x$ durch $\cos x$ aus

$$[2(\cos x)^2 - 1] - \cos x = 0$$

Substitution: $\cos x = z$

$$2z^2 - z - 1 = 0, \quad \text{also} \quad z = \frac{1 \pm 3}{4},$$

$$\text{also} \quad \cos x = 1 \quad \text{oder} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Das ergibt drei Serien von Lösungen:

$$x_{1k} = 0 + k \cdot 2\pi \quad \text{oder}$$

$$x_{2k} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{oder}$$

$$x_{3k} = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{jedesmal } k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{3} \quad 3 \sin x - 4 \cos x = 0$$

solche Gleichungen sind mit einem Trick schnell erledigt: man dividiert durch $\cos x \neq 0$

$$3 \tan x = 4, \quad \text{oder} \quad \tan x = \frac{4}{3},$$

$$x_k = 0,927 \dots + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für $\cos x = 0$ ergibt sich $\sin x = 0$, das kann aber nicht sein, weil \sin und \cos nicht gleichzeitig null sind.

$$\boxed{4} \quad 3 \sin x - 4 \cos x = 5$$

Wir drücken $\cos x$ mit $\sin x$ aus

$$3 \sin x - 5 = 4 \cos x \quad \parallel^2$$

$$(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$$

$$(3 \sin x - 5)^2 = 16(\cos x)^2$$

$$9(\sin x)^2 - 30 \sin x + 25 = 16[1 - (\sin x)^2]$$

$$25(\sin x)^2 - 30 \sin x + 9 = 0$$

$$[5 \sin x - 3]^2 = 0, \quad \text{also} \quad \sin x = \frac{3}{5},$$

$$\text{das ergäbe} \quad x_{1k} = 0,643 \dots + k \cdot 2\pi \quad (\text{I. Quadrant})$$

$$\text{oder} \quad x_{2k} = 2,498 \dots + k \cdot 2\pi \quad (\text{II. Quadrant})$$

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung!

Beim Auflösen können sich deshalb Ergebnisse einschleichen, die keine Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Also müssen wir die Probe machen; wir machen sie mit dem exakten Ergebnis $\sin x = 0,6$.

x kann im I. Quadranten liegen, dann gilt

$\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2} = 0,8$. Setzt man diesen Wert in die linke Seite der Gleichung ein, so ergibt sich

$$3 \sin x - 4 \cos x = 1,8 - 3,2 = -1,4$$

Wegen $-1,4 \neq 5$ gibt es keine Lösung im I. Quadranten.

x kann im II. Quadranten liegen, dann gilt

$\cos x = -\sqrt{1 - (\sin x)^2} = -0,8$. Setzt man diesen Wert in die linke Seite der Gleichung ein, so ergibt sich

$$3 \sin x - 4 \cos x = 1,8 + 3,2 = 5$$

Also gibt es bloß die Lösungsserie

$$x_k = 2,498 \dots + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgaben zu 7.

1. Überprüfe die Additionstheoreme an den Beispielen

- a) $\sin(60^\circ + 30^\circ)$ b) $\sin(60^\circ - 30^\circ)$ c) $\sin(90^\circ - 45^\circ)$
d) $\sin(210^\circ - 60^\circ)$ e) $\cos(90^\circ + 30^\circ)$ f) $\cos(90^\circ - 30^\circ)$
g) $\cos(240^\circ - 60^\circ)$ h) $\cos(210^\circ + 90^\circ)$ i) $\tan(60^\circ - 30^\circ)$
j) $\tan(150^\circ + 60^\circ)$ k) $\tan(240^\circ - 60^\circ)$ l) $\cos(315^\circ + 45^\circ)$

2. Berechne die exakten Werte von

- a) $\sin 75^\circ$ b) $\sin 15^\circ$ c) $\cos 75^\circ$ d) $\cos 15^\circ$ e) $\tan 15^\circ$
f) $\tan 75^\circ$ g) $\sin 72^\circ$ h) $\cos 72^\circ$ i) $\tan 72^\circ$.

3. x und y seien spitze Winkel. Berechne

- a) $\sin(x + y)$ und $\sin(x - y)$, wenn $\sin x = \frac{5}{13}$ und $\sin y = \frac{4}{5}$
b) $\cos(x + y)$ und $\cos(x - y)$, wenn $\cos x = \frac{8}{17}$ und $\cos y = \frac{5}{12}$

4. Berechne $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ und $\tan 2\alpha$, wenn α spitz ist und

- a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ b) $\cos \alpha = 0,6$ c) $\tan \alpha = 0,5$.

5. Berechne $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ und $\tan \frac{\alpha}{2}$, wenn α spitz ist und

- a) $\sin \alpha = 0,8$ b) $\cos \alpha = 0,5$.

6. Berechne die exakten Werte $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ für

- a) $\alpha = 15^\circ$ b) $\alpha = 7,5^\circ$ c) $\alpha = 22,5^\circ$

7. Verwandle in ein Produkt.

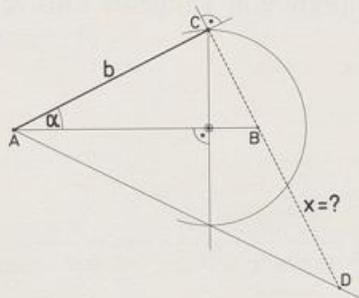
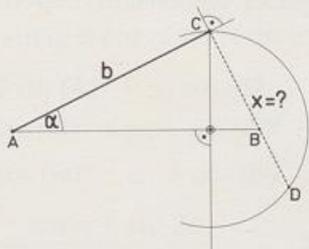
- a) $\sin 5x + \sin x$ b) $\sin 7x - \sin 3x$
c) $\cos 3x + \cos x$ d) $\cos 6x - \cos x$

8. Verwandle in ein Produkt.

- a) $\sin x + \cos y$ b) $\sin x - \cos y$

9. DOPPELHÖHE

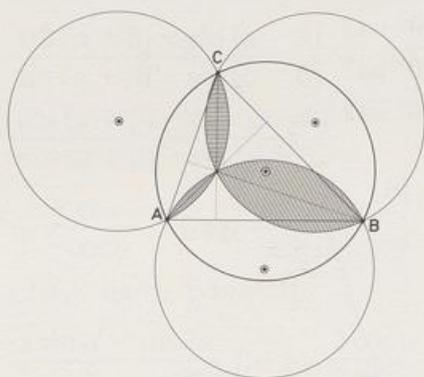
- Drücke \overline{CD} durch b und α aus, wenn Winkel $ACB = 90^\circ$ ist.
- Drücke \overline{CD} durch a und b aus, wenn Winkel $ACB = 90^\circ$ und $b > a$ ist.



10. DREILINSEN

Zeichne ein Dreieck ABC und den Höhenschnittpunkt H . Zeichne die drei Kreise: Jeder geht durch zwei Ecken und durch den Höhenschnittpunkt H . Zeige:

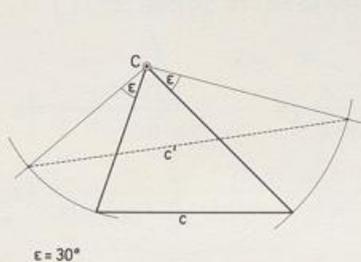
- Die Radien der drei Kreise sind gleich dem Umkreisradius.
- Die drei linsenförmigen Überlappungsflächen sind zusammen so groß wie die Umkreisfläche, verringert um Doppelte der Dreiecksfläche.



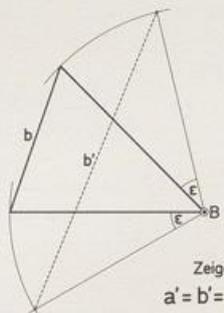
11. WINKELPLUSSECHZIG

Vergrößert man einen Dreieckswinkel auf beiden Seiten um 30° , so entsteht ein Dreieck, das in zwei Seitenlängen mit dem alten übereinstimmt, die dritte Seite ist länger. Man macht das mit allen drei Winkeln.

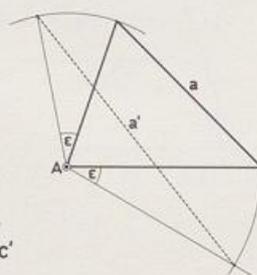
Zeige: Die jeweils dritten (längeren) Seiten sind alle gleich lang.



$\epsilon = 30^\circ$



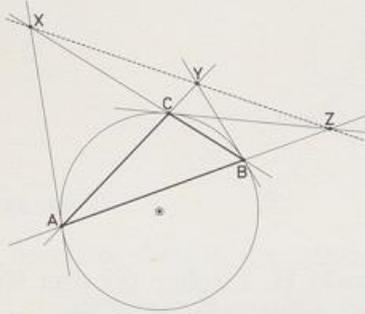
Zeige
 $a' = b' = c'$



••• 12. GERADLINIG

Zeichne ein (nicht gleichschenkliges) Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Zeichne in einem Eckpunkt die Umkreistangente und schneide sie mit der verlängerten Gegenseite. Mache das für alle Eckpunkte.

Zeige: Die Schnittpunkte von Tangente und verlängerter Gegenseite liegen auf einer Gerade.



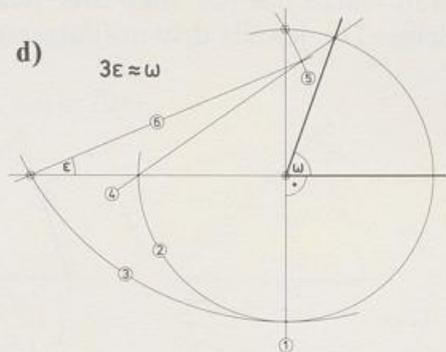
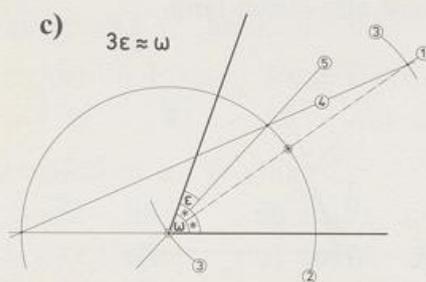
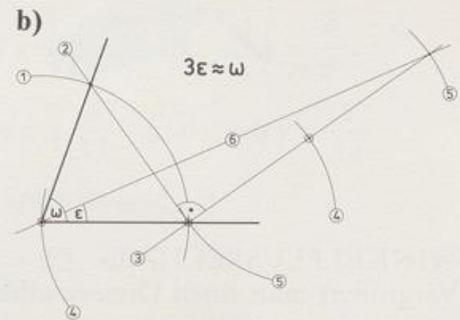
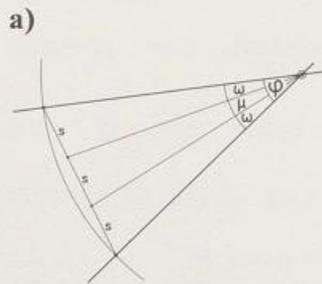
••• 13. SCHEINDRITTEL

a) Die einfachste Näherung beruht auf der Sehendrittelung. Wie groß sind μ und ω , wenn $\varphi = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ ist?

b) Wie groß ist ϵ , wenn $\omega = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ist?

c) Wie groß ist ϵ , wenn $\omega = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ist?

d) Wie groß ist ϵ , wenn $\omega = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ist?



Vereinfache

1. a) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$ b) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}$
2. a) $2(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^4 - (\sin \alpha)^4$
 b) $(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$
3. a) $2 \sin(45^\circ + \alpha) \sin(45^\circ - \alpha)$
 b) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$
 c) $\cos(60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha)$
4. a) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$ b) $\frac{\cos \alpha}{\cos - \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$
5. a) $\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$
 b) $\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha$
 c) $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
 d) $\sin(\alpha - \beta) \cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma)$
6. a) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}$ b) $\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$
7. a) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$ b) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$
 c) $\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$
8. a) $\frac{1 + \cos}{1 - \cos \alpha}$ b) $\frac{1 + \cos \alpha}{(\sin \alpha)^2}$ c) $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha}$ d) $\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha$
 (*Tipp: halbe Winkel!*)
9. a) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$ b) $\frac{2 \cos \alpha + \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}$
 c) $\frac{\sin \alpha + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha \sin \beta}$ (*Tip: halbe Winkel!*)
10. a) $\frac{1 - \cos \alpha + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha}$ b) $\frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha}$
 (*Tipp: halbe Winkel!*)
11. a) $\frac{\cos 2\alpha}{1 - (\tan \alpha)^2}$ b) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ c) $\frac{(1 + \cos \alpha) \sin \frac{1}{2} \alpha}{\sin \alpha}$
 d) $\frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + (\cos \alpha)^2}$

Beweise

1. a) $\sin \alpha + \sin (\alpha + 120^\circ) + \sin (\alpha + 240^\circ) = 0$
b) $\tan \alpha + \tan (\alpha + 120^\circ) + \tan (\alpha + 240^\circ) = 3 \tan 3\alpha$
c) $\cos \alpha \cos (\alpha + 120^\circ) \cos (\alpha + 240^\circ) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$
d) $\tan \alpha \tan (\alpha + 120^\circ) \tan (\alpha + 240^\circ) = -\tan 3\alpha$
2. a) $\sin 3x = 3 \sin x - 4(\sin x)^3$
b) $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3 \cos x$ (Tipp: $3x = 2x + x$!)
3. $\tan 3x = \frac{3 \tan x - (\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2}$
- 4. a) $\sin 4x = 8 \sin x (\cos x)^3 - 4 \sin x \cos x$
b) $\cos 4x = 8(\cos x)^4 - 8(\cos x)^2 + 1$
- 5. $\tan 4x = \frac{4 \tan x - 4(\tan x)^3}{1 - 6(\tan x)^2 + (\tan x)^4}$
6. a) Leite her: $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ und $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
b) Welche Formel ergibt sich für $\tan \frac{\alpha}{2}$?
7. a) $\sin (45^\circ + \alpha) = \cos (45^\circ - \alpha) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{2}}$
b) $\sin (45^\circ - \alpha) = \cos (45^\circ + \alpha) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{2}}$
c) $\tan (45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$
d) $\tan (45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$
8. a) $\tan (45^\circ + \alpha) - \tan (45^\circ - \alpha) = 2 \tan 2\alpha$
b) $\tan (45^\circ + \alpha) + \tan (45^\circ - \alpha) = \frac{2}{\cos 2\alpha}$
9. a) $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \tan \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)$
b) $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$
10. a) $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha)^2}$ b) $\cos 2\alpha = \frac{1 - (\tan \alpha)^2}{1 + (\tan \alpha)^2}$
c) $\tan \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

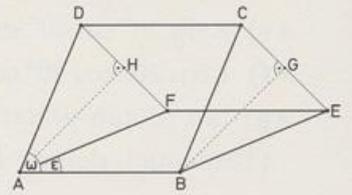
11. a) $\sin 55^\circ + \sin 5^\circ = \cos 25^\circ$
 b) $\sin 80^\circ - \cos 50^\circ = \sin 20^\circ$
 c) $\cos 170^\circ + \cos 70^\circ + \cos 50^\circ = 0$
 d) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$
 • e) $8 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sqrt{3}$
 • f) $8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 1$
 • g) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ = 3$
 (Teste auch deinen Taschenrechner!)
12. a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{6}$ und $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$.
 b) Berechne aus a) $\sin 75^\circ$ und $\sin 15^\circ$.
13. $\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan \alpha$
- 14. Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn gilt
 a) $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$
 b) $\sin \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$
- 15. Welche Eigenschaft hat ein Dreieck, in dem gilt $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$?
- 16. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:
 a) $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$
 b) $\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma$
- 17. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:
 a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
 b) $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
 c) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1$
 d) $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 1$
- 18. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:
 a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
 b) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$
 c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$
 d) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = -4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + 1$

19. Für die Winkel eines Dreiecks ABC gilt:

- a) $(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 + (\sin \gamma)^2 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 2$
- b) $(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 - (\sin \gamma)^2 = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$
- c) $(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = -2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1$
- d) $(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 - (\cos \gamma)^2 = -2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + 1$

20. SUMDIFSIN

ABCD und ABEF sind Rauten.



a) Zeige: $\sphericalangle BAH = \sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon + \omega)$, $\sphericalangle HAD = \tau = \frac{1}{2}(\omega - \varepsilon)$

b) Begründe:

Fläche (ABCD) + Fläche (ABEF) = 2 · Fläche (ABGH)
 Fläche (ABCD) - Fläche (ABEF) = Fläche (ECDF)

c) Drücke die Flächeninhalte in b) durch die Winkel ω , ε , σ und τ aus und leite so die Formeln für die Summe und Differenz zweier Sinuswerte her.

21. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis c und den Schenkellängen 1.

a) Zeichne die Höhe h_a ein und berechne sie auf zwei Wegen: einmal aus dem Dreieck ABH_a , dann aus dem Dreieck AH_aC . Beweise:

$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

b) Fülle von H_c aus das Lot auf BC (Lotfußpunkt F) und zeige:

$$\overline{CH_a} = \overline{CF} - \overline{FB} \quad \text{und} \quad \cos \gamma = \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^2$$

c) Folgere aus b): $1 - \cos \gamma = 2 \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^2$.

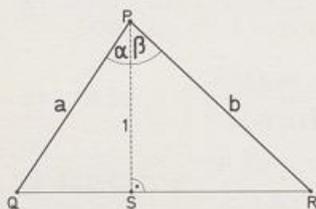
d) Verlängere den Schenkel [BC] über C hinaus bis D, sodass $\overline{BC} = \overline{CD}$ ist.

Beweise mit Hilfe des Dreiecks AH_aD : $1 + \cos \gamma = 2 \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^2$.

22. ADDITIONSTHEOREM UND DREIECKFLÄCHE

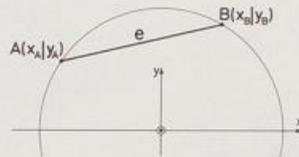
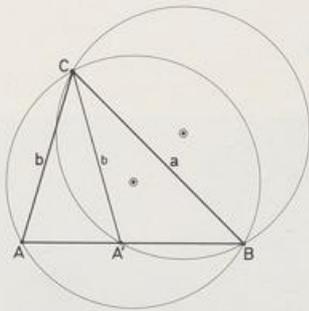
Berechne die Flächen der Dreiecke PQS, PSR und PQR. Folgere das Additionstheorem des Sinus aus

Fläche (PQR) = Fläche (PQS) + Fläche (PSR).



23. ADDITIONSTHEOREM UND UMKREIS

Begründe mit der Sehnenformel, dass die Umkreise der Dreiecke ABC und A'BC gleichen Radius haben. Folgere aus dem Projektionssatz $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ und aus der Sehnenformel das Additionstheorem des Sinus.



24. ADDITIONSTHEOREM UND KOSINUSSATZ

Berechne e einmal mit der Formel $e^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ und einmal mit dem Kosinussatz. Folgere daraus das Additionstheorem des Kosinus.

25. a) Zeige: Für den Flächeninhalt F des Vierecks ABCD gilt

$$F = \frac{1}{2} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma).$$

- b) Begründe mit a) die Flächenformel »HERON fürs Viereck«

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \left(\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \right)^2},$$

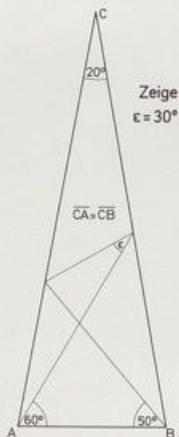
s ist der halbe Viereckumfang.

(Tipp: Kosinussatz für Teildreiecke)

26. Warum hat das Sehnenviereck unter allen Vierecken mit den Seitenlängen a, b, c und d den größten Flächeninhalt?

(Tipp: vorige Aufgabe)

- 27.

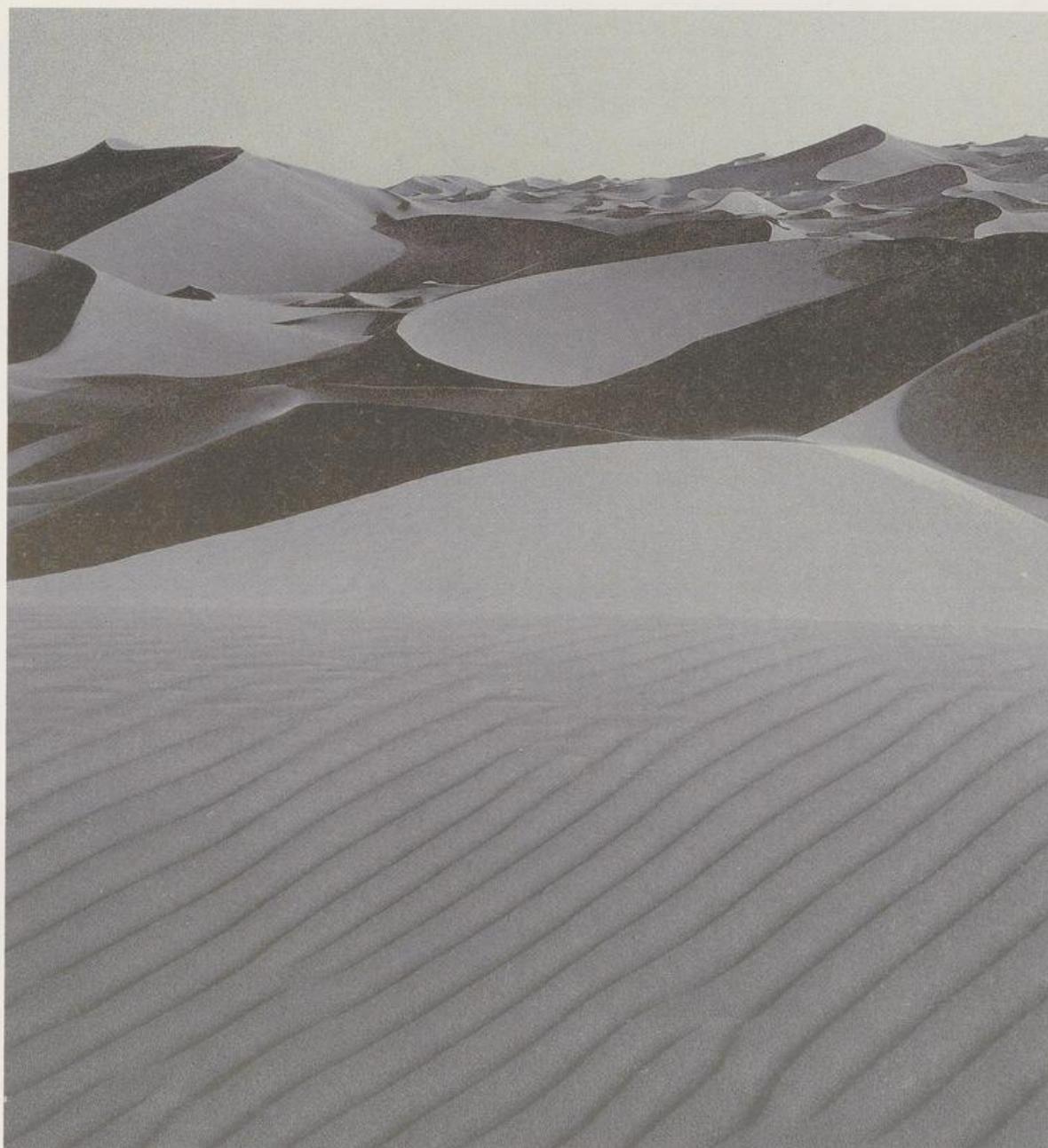


Gleichungen Bestimme die Lösungsmengen in $[0; 2\pi[$

1. a) $192(\sin x)^2 + 128 \sin x = 75$ b) $100(\cos x)^2 + 75 \sin x = 114$
2. a) $\sin x = \sin 2x$ b) $\frac{1}{4} \sin 2x - \sin x = 0$
c) $4 \sin x \cos x = -\sqrt{2}$ d) $\tan 2x + \tan x = 0$
e) $\cos x - \cos 2x = 1$
3. a) $\sin x + \cos 2x = 1$ b) $\cos x + \cos 2x = 1$
c) $\sin 2x + 2(\cos x)^2 = 1$
- 4. a) $\sin x + \cos x = 0,8$ b) $8 \sin x + 9 \cos x = 12$
c) $8 \sin x - 9 \cos x = 12$
5. a) $(\sin x)^2 + 2 \sin 2x = 3(\cos x)^2$
b) $(\cos x)^2 + 3 \cos 2x = (\sin x)^2$
c) $24(\cos x)^2 - 12(\sin x)^2 = \sin 2x$
d) $6(\sin x)^2 + 8(\cos x)^2 = 7 \sin 2x$
- 6. a) $\sin x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ b) $\cos x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
7. a) $15 \cos x = 16 \tan x$ b) $6 \sin 2x - 3 \tan x = 5 \sin x$
- 8. a) $\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{\tan x}{\tan 2x} = 2$ b) $2 \frac{\tan x}{\tan 2x} + 12 \frac{\tan 2x}{\tan x} + 11 = 0$
9. a) $\sin 11x = \sin 5x$ b) $\cos 13x = \cos 5x$
• c) $\sin 7x = \cos 3x$ d) $\tan 15x = \tan 9x$
e) $\sin 5x - \sin 3x = \cos 9x - \cos 7x$
10. a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$
11. a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
• b) $\cos x - \cos 2x - \cos 3x - \cos 4x = 0$

8. Kapitel

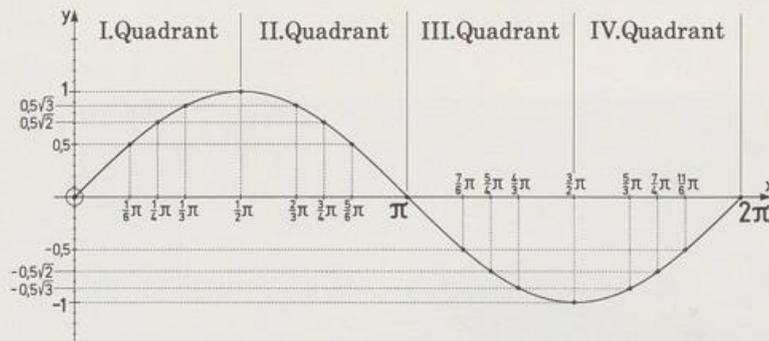
Die Graphen der trigonometrischen Funktionen



Sinus im Sinai

Sinuskurve

Die Zuordnung $x \mapsto \sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert eine Funktion, die **Sinusfunktion**. Den Graphen der Sinusfunktion finden wir, wenn wir auf der x -Achse den Winkel im Bogenmaß und als y -Wert den zugehörigen Sinuswert abtragen.



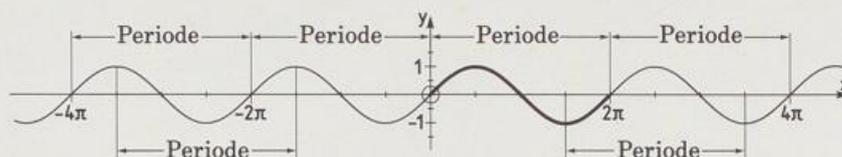
SIN-GRUNDFIGUR

Zuerst zeichnen wir den Graphen im Bereich $x \in [0; 2\pi]$, wir nennen ihn Grundfigur; dazu verwenden wir die vertrauten Werte:

Winkel x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Winkel x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	π
Sinuswert y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

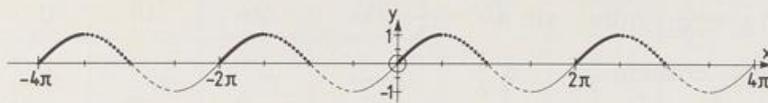
							315°	330°	360°
Winkel x	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Sinuswert y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

SINUSKURVE



Wegen $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ wiederholen sich die Sinuswerte im Abstand 2π nach links und rechts, dieser Abstand heißt **Periode**; die Grundfigur wiederholt sich immer wieder, wenn man den Graphen für beliebige x -Werte zeichnet. Den Graphen für beliebige x -Werte nennen wir **Sinuskurve**. Die Sinuskurve hat die Periode 2π . Weil die Sinuswerte des I. Qua-

dranten alle andern Werte bis aufs Vorzeichen festlegen, kommt das Kurvenstück für Winkel zwischen 0° und 90° immer wieder vor.

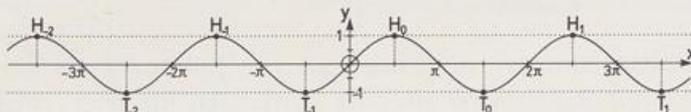


Der Taschenrechner arbeitet mit dem Teil der Sinuskurve, der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Als Lösung der Gleichung $\sin x = -\frac{1}{2}$ liefert er deswegen $x = -0,523 \dots$ (RAD) beziehungsweise $x = -30^\circ$ (DEG).

Eigenschaften der Sinuskurve

- Periode 2π
- Punktsymmetrie zum Ursprung [wegen $\sin(-x) = -\sin x$]
- Nullstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Hochpunkte $\left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \mid 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Tiefpunkte $\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \mid -1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Wertemenge $W = [-1; +1]$

Hochpunkte $H_k\left(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \mid 1\right)$



Tiefpunkte $T_k\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \mid -1\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

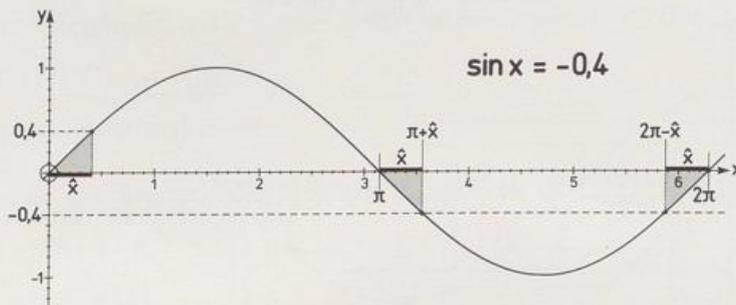
Die Sinuskurve kann beim Lösen goniometrischer Gleichungen oder Ungleichungen recht hilfreich sein. Beispiele:

1 $\sin x = -0,4$ $x \in [0; 2\pi[$

Die Lösung von $\sin \hat{x} = 0,4$ finden wir mit dem Taschenrechner: $\hat{x} = 0,411 \dots$

Der Grundfigur entnehmen wir $x_1 = \pi + \hat{x} = 3,553 \dots$

$x_2 = 2\pi - \hat{x} = 5,871 \dots$

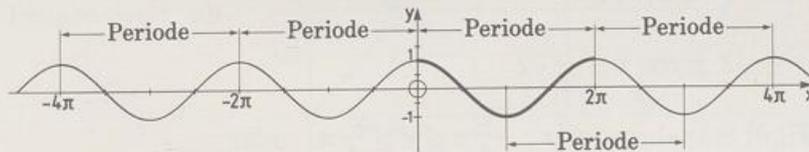


Zuerst zeichnen wir den Graphen im Bereich $x \in [0; 2\pi]$, wir nennen ihn Grundfigur; dazu verwenden wir die vertrauten Werte:

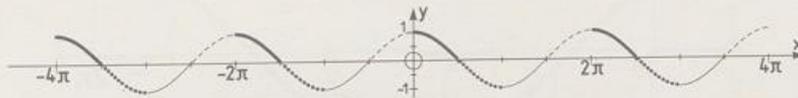
Winkel x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Winkel x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
Kosinuswert y	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

Winkel x	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Winkel x	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Kosinuswert y	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

KOSINUSKURVE



Wegen $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ wiederholen sich auch die Kosinuswerte im Abstand von 2π nach links und rechts; deshalb wiederholt sich die Grundfigur immer wieder, wenn man den Graphen für beliebige x -Werte zeichnet. Den Graphen für beliebige x -Werte nennen wir **Kosinuskurve**. Wie die Sinuskurve hat auch die Kosinuskurve die Periode 2π . Weil die Kosinuswerte des I. Quadranten alle andern Werte bis aufs Vorzeichen festlegen, kommt das Kurvenstück für Winkel zwischen 0° und 90° immer wieder vor.

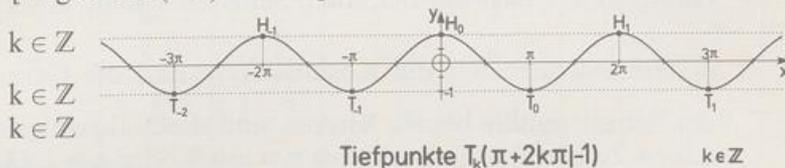


Der Taschenrechner arbeitet mit dem Teil der Kosinuskurve, der zwischen 0 und π liegt. Als Lösung der Gleichung $\cos x = -\frac{1}{2}$ liefert er deswegen $x = 2,094 \dots$ (RAD) beziehungsweise $x = 120^\circ$ (DEG).

Eigenschaften der Kosinuskurve

- Periode 2π
- Symmetrie zur y -Achse
- Nullstellen $\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$,
- Hochpunkte $(k \cdot 2\pi | 1)$,
- Tiefpunkte $(\pi + k \cdot 2\pi | -1)$,
- Wertemenge $W = [-1; +1]$

[wegen $\cos(-x) = \cos x$] Hochpunkte $H_k(2k\pi | 1)$



Tiefpunkte $T_k(\pi + 2k\pi | -1)$

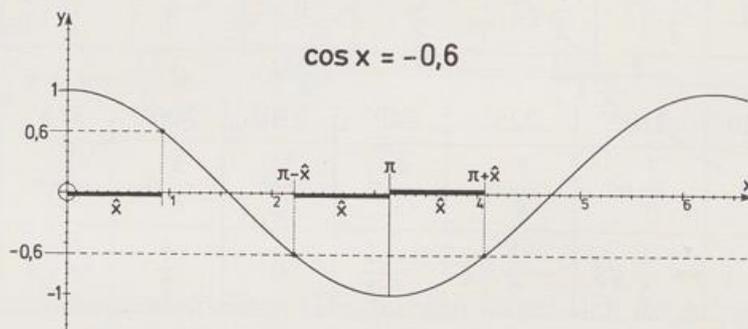
Die Kosinuskurve kann beim Lösen goniometrischer Gleichungen oder Ungleichungen recht hilfreich sein. Beispiele:

1 $\cos x = -0,6 \quad x \in [0; 2\pi[$

Die Lösung von $\cos \hat{x} = 0,6$ finden wir mit dem Taschenrechner: $\hat{x} = 0,927 \dots$

Der Grundfigur entnehmen wir $x_1 = \pi - \hat{x} = 2,214 \dots$

$x_2 = \pi + \hat{x} = 4,068 \dots$

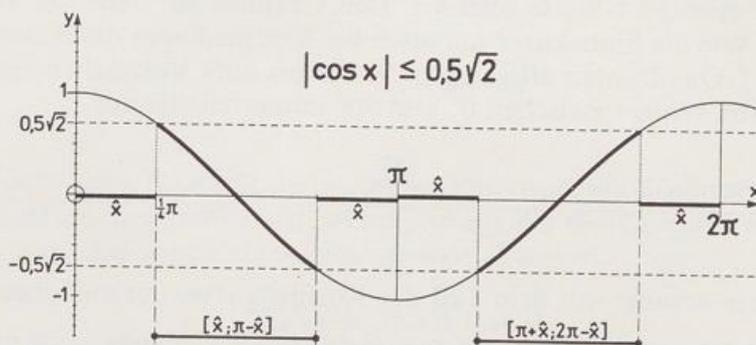


2 $|\cos x| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad x \in [0; 2\pi[$

das heißt $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Der Grundfigur entnehmen wir $\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$ oder

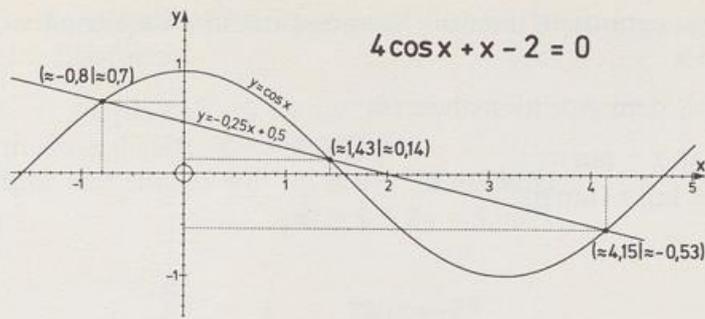
$$\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$$



3 $4 \cos x + x - 2 = 0$

Bei dieser goniometrischen Gleichung suchen wir eine grafische Näherungslösung: Um zu wissen, womit wir die Kosinuslinie zum Schnitt bringen, formen wir die Gleichung so um, dass auf der einen Seite $\cos x$ steht: $\cos x = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. Ins Koordinaten-

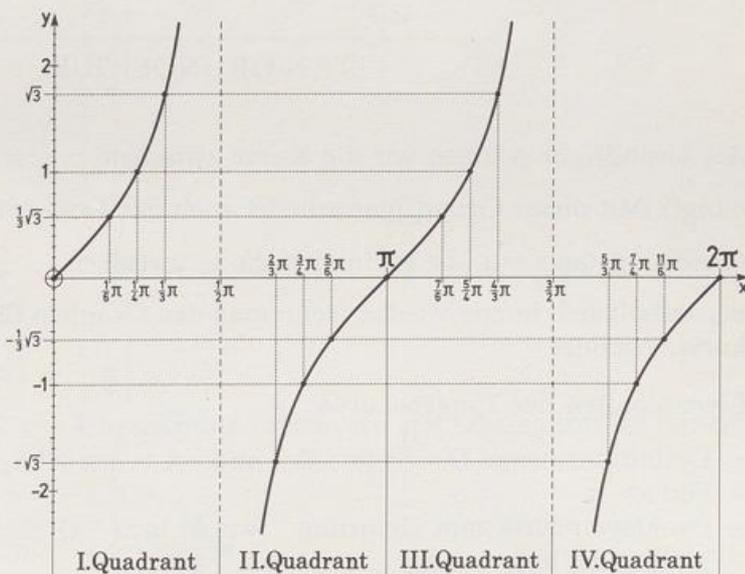
system zeichnen wir die Kosinuskurve und die Gerade $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. Die x -Werte der Schnittpunkte beider Kurven sind die Näherungslösungen. Aus der möglichst genauen Zeichnung liest man ab $x \approx -0,8$ oder $x \approx 1,43$ oder $x \approx 4,15$.



Tangenskurve

Die Zuordnung $x \mapsto \tan x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ definiert eine Funktion, die

Tangensfunktion. Den Graphen der Tangensfunktion finden wir, wenn wir auf der x-Achse den Winkel im Bogenmaß und als y-Wert den zugehörigen Tangenswert abtragen.



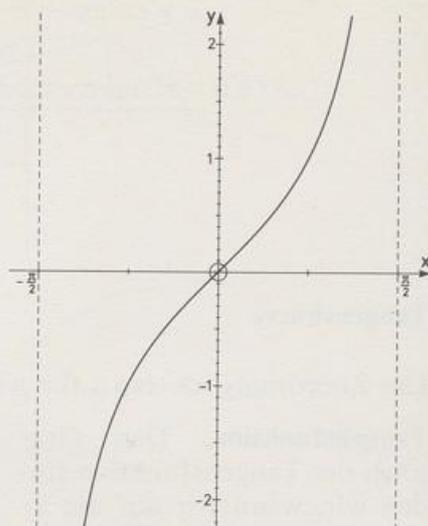
								150°	180°
Winkel x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
Tangenswert y	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Winkel x	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Winkel x	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Tangenswert y	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Die Wertetabelle lässt vermuten, dass die Tangensfunktion die Periode π hat. Tatsächlich gilt $\tan(x + \pi) = \tan x$

Das beweisen wir mit dem Additionstheorem

$$\tan(x + \pi) = \frac{\tan x + \tan \pi}{1 - \tan x \cdot \tan \pi} = \tan x$$

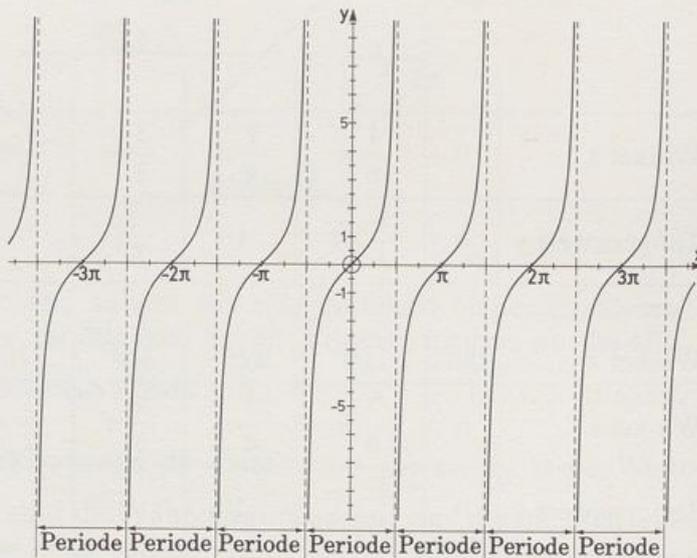


TAN-GRUNDFIGUR

Als Grundfigur nehmen wir die Kurve zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ (weil sie zusammenhängt). Mit dieser Grundfigur arbeitet auch der Taschenrechner. Er liefert als Lösung der Gleichung $\tan x = a$, $a \in \mathbb{R}$, immer Werte zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$. Die Grundfigur wiederholt sich immer wieder, wenn man den Graphen für beliebige x -Werte, die **Tangenskurve**, zeichnet.

Eigenschaften der Tangenskurve

- Definitionsmenge $D = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Periode π
- Punktsymmetrie zum Ursprung [wegen $\tan(-x) = -\tan x$]
- Nullstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Wertemenge $W = \mathbb{R}$



TANGENSKURVE

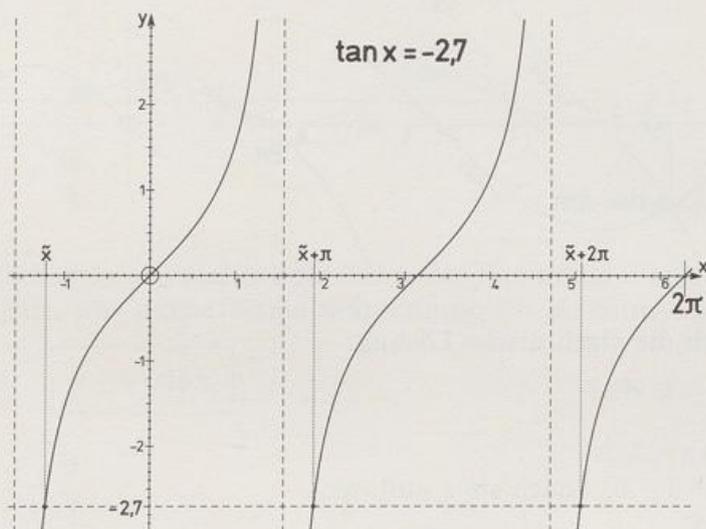
Die Tangenskurve kann beim Lösen goniometrischer Gleichungen oder Ungleichungen recht hilfreich sein. Beispiele:

1 $\tan x = -2,7 \quad x \in [0; 2\pi[$

Der Taschenrechner liefert: $\hat{x} = -1,216 \dots$

Der Grundfigur entnehmen wir $x_1 = \hat{x} + \pi = 1,925 \dots$

$x_2 = \hat{x} + 2\pi = 5,067 \dots$



2 $\tan x \geq -3,14 \quad x \in \left[-\frac{1}{2}\pi; +\frac{1}{2}\pi\right[$

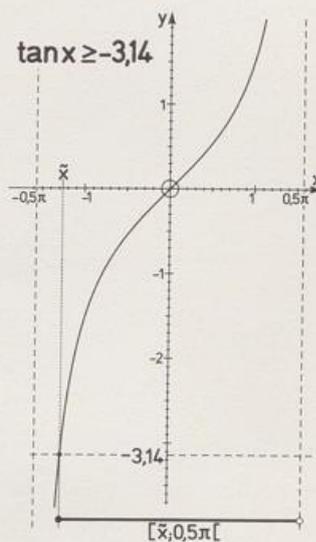
Wegen der Definitionsmenge der Ungleichung suchen wir die Lösung nur im Bereich der Grundfigur.

Der Taschenrechner liefert: $\tilde{x} = -1,262 \dots$

Der Grundfigur entnehmen wir $\tilde{x} \leq x < \frac{1}{2}\pi$

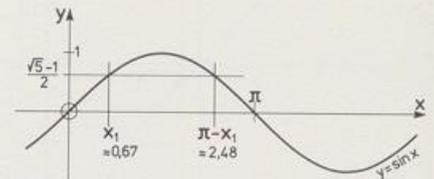
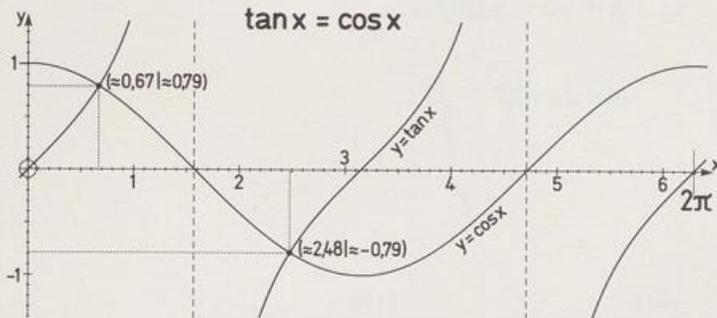
Nimmt man aber die größtmögliche Definitionsmenge, dann ergeben sich die Lösungsintervalle, wenn man zu den Grenzen ganzzahlige Vielfache von π (Periode!) addiert, zum Beispiel:

$$\left[\tilde{x} - \pi; -\frac{1}{2}\pi\right] \quad \text{oder} \quad \left[\tilde{x} + 2\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$$



3 $\tan x = \cos x \quad x \in [0; 2\pi[$

Diese rein goniometrische Gleichung lässt sich zwar auch algebraisch lösen, manchmal genügt aber eine grafische Näherungslösung: Lösungen sind die x-Werte der Schnittpunkte von Tangens- und Kosinuskurve. Aus der möglichst genauen Zeichnung liest man ab $x \approx 0,67$ oder $x \approx 2,48$.



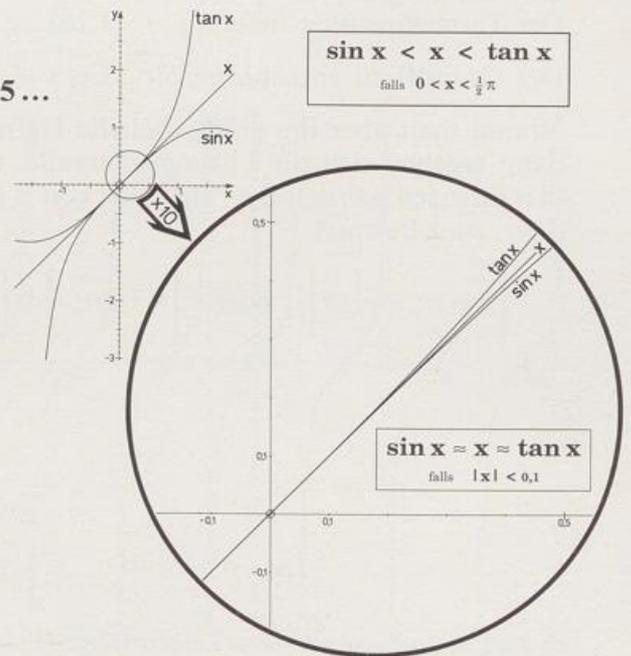
Zum Vergleich noch die algebraische Lösung:

$$\begin{aligned} \tan x &= \cos x && \parallel \cdot \cos x \\ \sin x &= (\cos x)^2 \\ \sin x &= 1 - (\sin x)^2 \\ (\sin x)^2 + \sin x - 1 &= 0, && \text{nach } \sin x \text{ auflösen:} \\ \sin x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Der Wert $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62$ ist kleiner als -1 , also unbrauchbar.

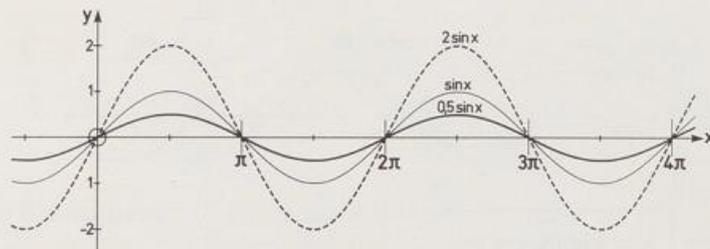
Die Lösungen von $\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ sind:

$$x_1 = 0,666\dots \quad \text{und} \quad x_2 = \pi - x_1 = 2,475\dots$$



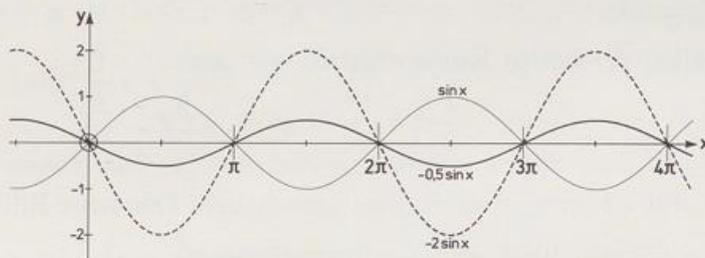
Abwandlungen der Sinuskurve

Bei den Parabeln gibt es eine Grundfigur: Die Normalparabel, sie hat die Gleichung $y = x^2$. Aus ihr erzeugt man andere Parabeln, indem man den Funktionsterm verändert. Die allgemeine Parabelgleichung lautet $y = a(x - b)^2 + c$. Der Faktor a verändert die Form (breit/schmal), bei negativem a ist die Parabel an der x -Achse gespiegelt.



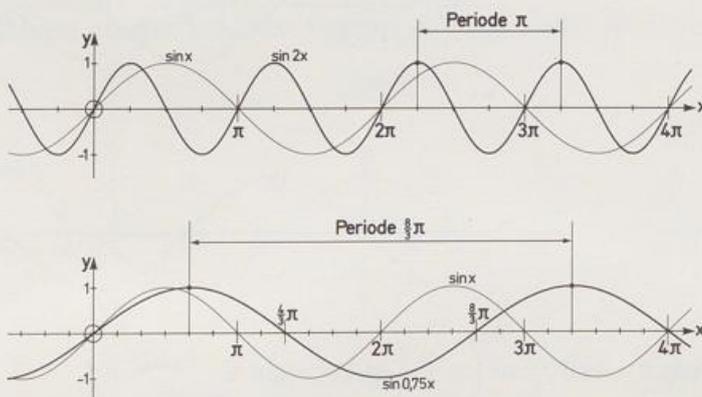
Der Summand b schiebt nach rechts oder links, der Summand c nach oben oder unten. Wir untersuchen jetzt, was solche Termabwandlungen für die Sinuskurve bedeuten.

Faktor bei \sin : $y = a \cdot \sin x$

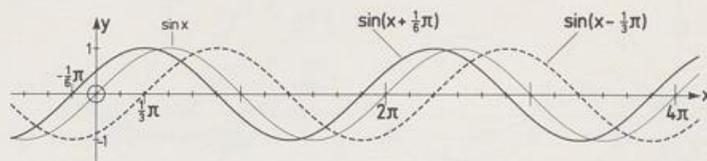


Alle y -Werte der Sinuskurve werden mit dem Faktor a multipliziert. Dadurch wird die Sinuskurve in y -Richtung gestaucht ($|a| < 1$) oder gestreckt ($|a| > 1$), bei negativem a ist sie an der x -Achse gespiegelt.

Faktor bei x : $y = \sin bx$ $b > 0$



Die Nullstellen der neuen Kurve ergeben sich aus $bx = k\pi$ zu $x = \frac{1}{b}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alle x -Werte der Sinuskurve werden mit $\frac{1}{b}$ multipliziert, die neue Periode ist also $\frac{2\pi}{b}$. Für $b > 1$ ist die Sinuskurve in x -Richtung gestaucht, für $0 < b < 1$ ist sie in x -Richtung gestreckt. Bei negativem b kann man wegen $\sin(-x) = -\sin x$ den Faktor (-1) ausklammern.



Summand bei x : $y = \sin(x + c)$

Die Nullstellen der neuen Kurve ergeben sich aus $x + c = k\pi$ zu $x = k\pi - c$, $k \in \mathbb{Z}$. Von allen x -Werten der Sinuskurve wird c subtrahiert, das heißt, die Sinuskurve verschiebt sich um $-c$ in x -Richtung. Bei positivem c haben wir eine Verschiebung um c nach links, bei negativem c eine Verschiebung um $|c|$ nach rechts.

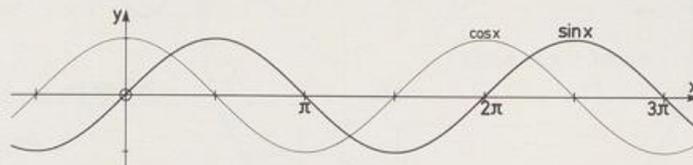
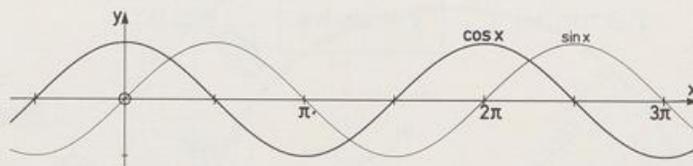
Beispiel: $y = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

Die Nullstellen der neuen Kurve ergeben sich aus

$$x + \frac{1}{2}\pi = k\pi \quad \text{zu} \quad x = k\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + z\pi, \quad k, z \in \mathbb{Z}.$$

Die Sinuskurve ist um $\frac{1}{2}\pi$ nach links verschoben. Das neue Bild erinnert an die Kosinuskurve. Tatsächlich gilt (Additionstheorem)

$$\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin x \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos x \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos x$$



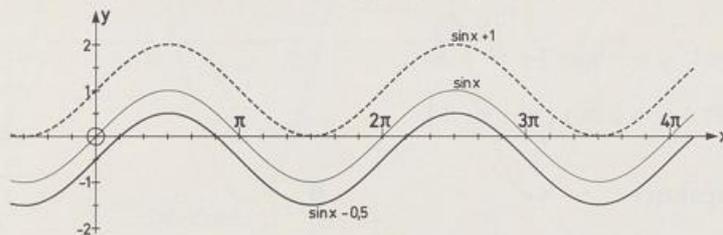
Allgemein gilt:

$$\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos x \quad \text{und} \quad \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sin x$$

Summand bei $\sin x$:

$$y = \sin x + d$$

Zu allen y -Werten der Sinuskurve wird d addiert, das heißt, die Sinuskurve verschiebt sich um d in y -Richtung.



Allgemeine Sinuskurve:

$$y = a \cdot \sin b(x + c)$$

Die allgemeine Sinuskurve findet man durch schrittweises Abwandeln der Sinuskurve.

Die Periode ist $\frac{2\pi}{b}$.

Start ist die Nullstelle bei $x = -c$.

Die y -Werte liegen zwischen $-|a|$ und $|a|$. Bei negativem a muss an der x -Achse gespiegelt werden.

Bei der Kurve $y = a \cdot \sin b(x + c) + d$ muss noch um d in y -Richtung verschoben werden.

Beispiel: $y = -3 \sin\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\pi\right)$

Die Periode und die Verschiebung finden wir, wenn wir den Faktor $\frac{3}{4}$ ausklammern

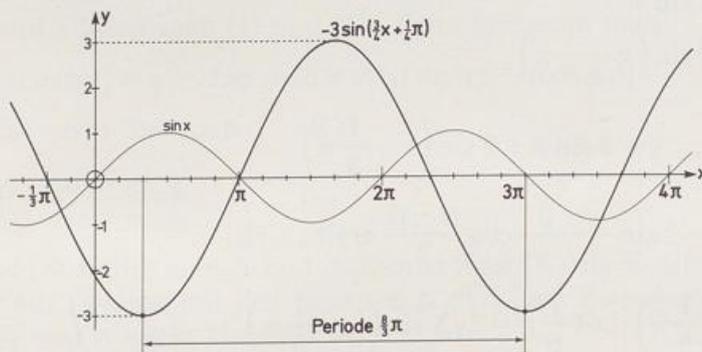
$$y = -3 \sin \frac{3}{4} \left(x + \frac{1}{3} \pi \right)$$

$$\text{Periode } \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \pi$$

Startstelle: $x + \frac{1}{3} \pi = 0$, also Start bei $x = -\frac{1}{3} \pi$

y -Schwankung zwischen -3 und $+3$

Spiegelung an der x -Achse wegen des negativen Faktors bei $\sin x$: $-3 < 0$



Überlagerung zweier allgemeiner Sinuskurven

Man überlagert zwei Kurven, indem man bei jeder Stelle x die zugehörigen y -Werte addiert. Auch bei zwei Sinuskurven geht das so.

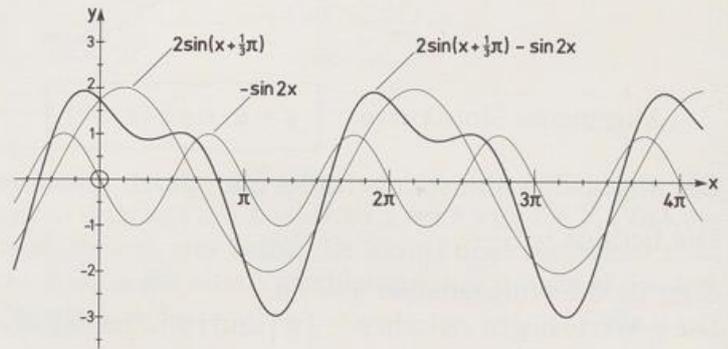
Beispiele:

1. Kurve: $y = -\sin 2x$

2. Kurve: $y = 2 \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

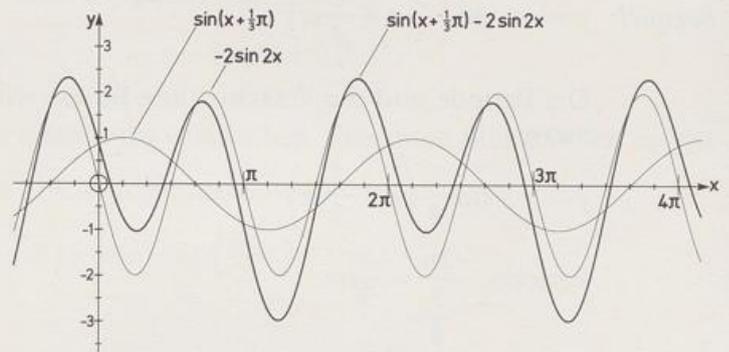
Überlagerungskurve:

$$y = -\sin 2x + 2 \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$$



Eine kleine Abwandlung der beiden Kurventerme bewirkt eine große Änderung der neuen Kurve:

$$y = -2 \sin 2x + \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$$



Manchmal können wir mit den Summenformeln den Term der Überlagerungskurve zusammenfassen:

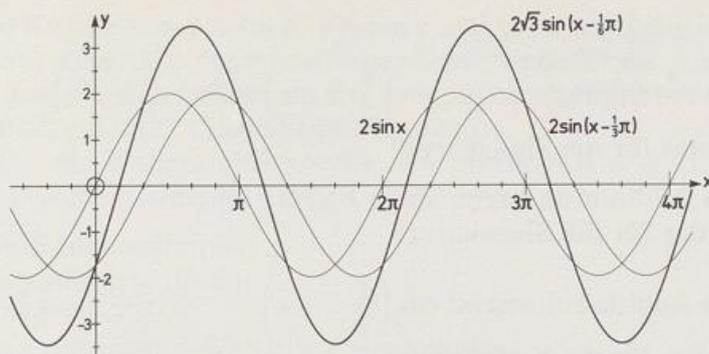
1. Kurve: $y = 2 \sin x$

2. Kurve: $y = 2 \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

Überlagerungskurve: $y = 2 \sin x + 2 \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

Wegen $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ergibt sich

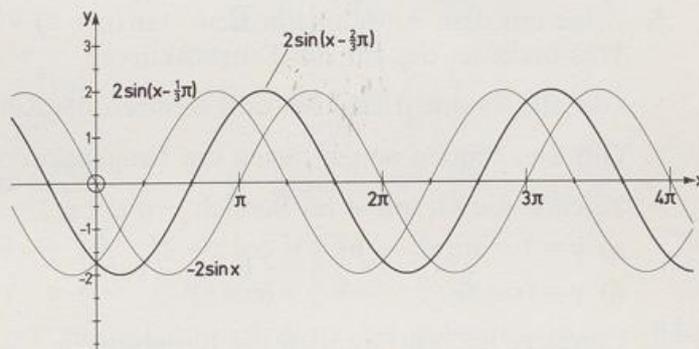
$$y = 2 \cdot 2 \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) \cdot \cos \frac{1}{6}\pi = 2\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$$



Ändert man bei der ersten Kurve das Vorzeichen im Term, so ergibt sich für die Überlagerungskurve:

$$y = -2 \sin x + 2 \sin \left(x - \frac{1}{3} \pi \right) = 2 \sin \left(x - \frac{2}{3} \pi \right)$$

Die Überlagerungskurve ist wieder eine allgemeine Sinuskurve.



Im vorigen Beispiel haben die beiden Summanden dieselbe Periode und denselben Faktor vor sin. Eine allgemeine Sinuskurve ergibt sich aber auch schon, wenn die beiden Summanden bloß dieselbe Periode haben. Wir zeigen das für die Periode 2π .

$$a \sin x + b \sin(x + \delta) = A \sin(x + \Delta)$$

Die Unbekannten A und Δ ergeben sich, wenn man auf beiden Seiten das Additionstheorem des Sinus anwendet:

$$a \sin x + b \sin x \sin \delta + b \cos x \sin \delta = A \sin x \cos \Delta + A \cos x \sin \Delta$$

$$(a + b \cos \delta) \sin x + b \sin \delta \cos x = A \cos \Delta \sin x + A \sin \Delta \cos x$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $\sin x$ und von $\cos x$, dann ergibt sich

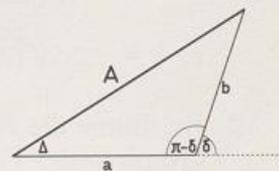
$$b \sin \delta = A \sin \Delta \quad (\text{I}) \quad \text{und} \quad a + b \cos \delta = A \cos \Delta \quad (\text{II})$$

Quadriert und addiert man (I) und (II), dann bekommt man

$$b^2 [(\sin \delta)^2 + (\cos \delta)^2] + a^2 + 2ab \cos \delta = A^2 [(\sin \Delta)^2 + (\cos \Delta)^2]$$

$$\text{also} \quad A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta \quad (\text{K})$$

$$\text{Aus (I) folgt} \quad \frac{\sin \Delta}{\sin \delta} = \frac{b}{A} \quad (\text{S})$$



Aus (K) und (S) findet man A und Δ . Deutet man (K) als Kosinussatz und (S) als Sinussatz für ein Dreieck mit den Seiten a , b und dem Zwischenwinkel $(\pi - \delta)$, dann kann man A und Δ leicht konstruieren.

Aufgaben zu 8.

1. Zeige mit dem Additionstheorem: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$
Was bedeutet das für die Sinuskurve?
- 2. Zeige mit dem Additionstheorem: $\sin(\pi + x) = -\sin(\pi - x)$
Was bedeutet das für die Sinuskurve?
3. Zeige mit dem Additionstheorem: $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$
Was bedeutet das für die Kosinuskurve?
4. Zeige mit dem Additionstheorem: $\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x)$
Was bedeutet das für die Kosinuskurve?
5. Zeige mit dem Additionstheorem: $\tan(\pi + x) = -\tan(\pi - x)$
Was bedeutet das für die Tangenskurve?
6. Gib alle Symmetrieachsen und -zentren der Sinus- und Kosinuskurve an.
7. Gib drei Punkte an, zu denen die Tangenskurve symmetrisch ist.
8. Zeichne die Graphen im Bereich $-\pi \leq x \leq 2\pi$
 - a) $y = 1 - \sin x$
 - b) $y = \cos x - 2$
 - c) $y = -\tan x$
 - d) $y = (\sin x)^2$
 - e) $y = (\cos x)^2$
 - f) $y = (\sin x)^2 + (\cos x)^2$.
9. Erläutere an den Graphen die Beziehungen
 - a) $y = 1 - \sin x$
 - b) $\cos x = -\cos(\pi - x)$
 - c) $\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$
 - d) $\cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$.
10. Zeichne den Graphen der Funktion im Bereich $[-\pi; 2\pi]$
 - a) $y = 3 \sin x$
 - b) $y = \sin(-3x)$
 - c) $y = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
 - d) $y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + 2$
 - e) $y = 2 \cos x - 1$
 - f) $y = -\frac{1}{2} \cos(-2x) + 1$.
11. Zeichne den Graphen der Funktion im Bereich $[-\pi; 2\pi]$
 - a) $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\pi\right)$
 - b) $y = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$
 - c) $y = -2 \cos(2x - \pi)$
 - d) $y = -3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi - 3x\right) - 2$
12. Bestimme die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und die Wertemenge. Zeichne den Graphen der Funktion im Bereich $[-\pi; 2\pi]$
 - a) $y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 1$
 - b) $y = 2 \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{1}{2}$.

13. Zeichne die Kurven von $y = \sin x$, $y = \tan x$ und $y = x$ im Bereich $0 \leq x \leq 1$ (Längeneinheit 10 cm). Lege eine Wertetabelle mit Schrittweite 0,1 an. Aus der Zeichnung erkennst du, dass die Näherungen $\sin x \approx x$, $\tan x \approx x$ und $\sin x \approx \tan x$ für kleine Werte von x ziemlich gut sind. (Siehe Seite 192 unten)

Berechne für die Näherungen jeweils den maximalen x -Wert, sodass der Unterschied der y -Werte kleiner ist als 0,01 (0,001).

14. Gib bei den Funktionstermen an:

- die erste positive Nullstelle
- die Periode
- den ersten positiven x -Wert eines Hochpunkts
- die Wertemenge.

a) $5 \sin x$

b) $\sin 5x$

c) $\sin(x - 5)$

d) $\sin \frac{1}{5} x$

e) $-5 \sin x$

f) $\sin(-5x)$

g) $\sin(5 - x)$

h) $\sin\left(-\frac{1}{5} x\right)$

i) $2 \sin\left(x - \frac{2}{3} \pi\right)$

j) $\sin 2\left(x - \frac{1}{6} \pi\right)$

k) $-2 \sin(-2x)$

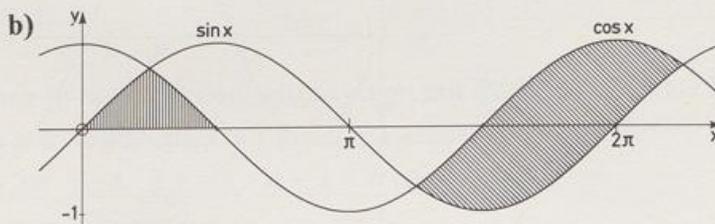
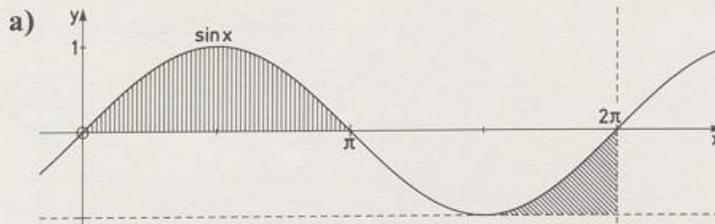
l) $\frac{3}{2} \sin \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \pi\right)$

m) $\sin\left(2x + \frac{3}{2} \pi\right)$

n) $\sin\left(\frac{1}{3} x - \frac{1}{12} \pi\right)$

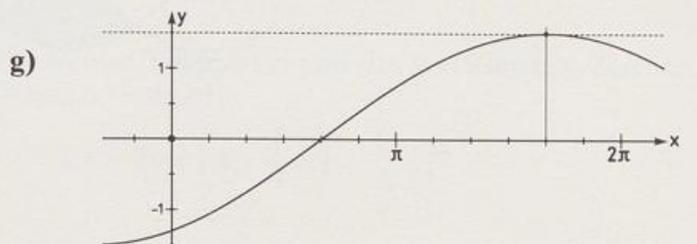
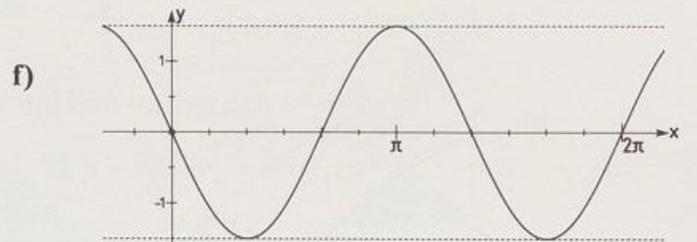
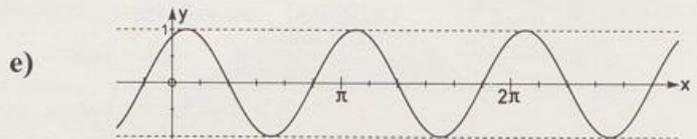
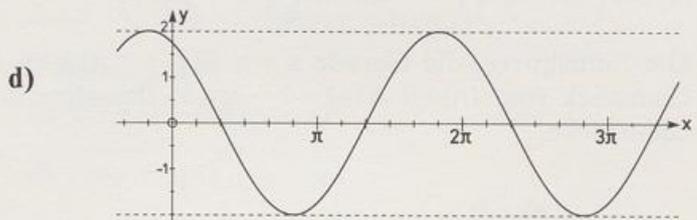
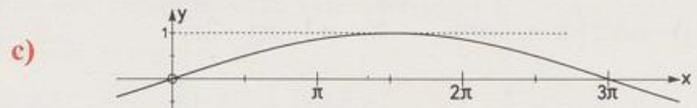
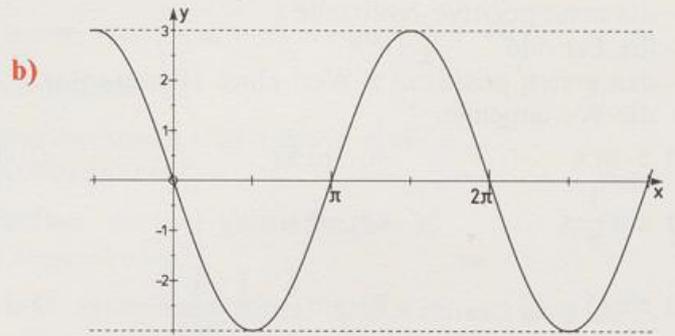
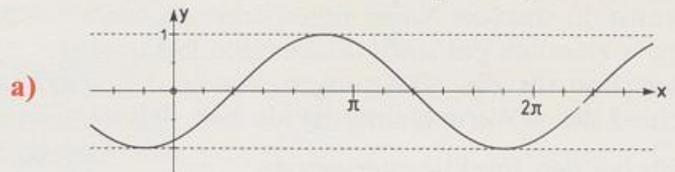
o) $\sin\left(\frac{3}{2} x - \frac{3}{4} \pi\right)$

15. Die Sinuskurve, die Gerade $x = a$ ($0 \leq a \leq \pi$) und die x -Achse begrenzen ein Flächenstück vom Inhalt $A(a) = 1 - \cos a$. Berechne die Inhalte der schraffierten Flächenstücke.



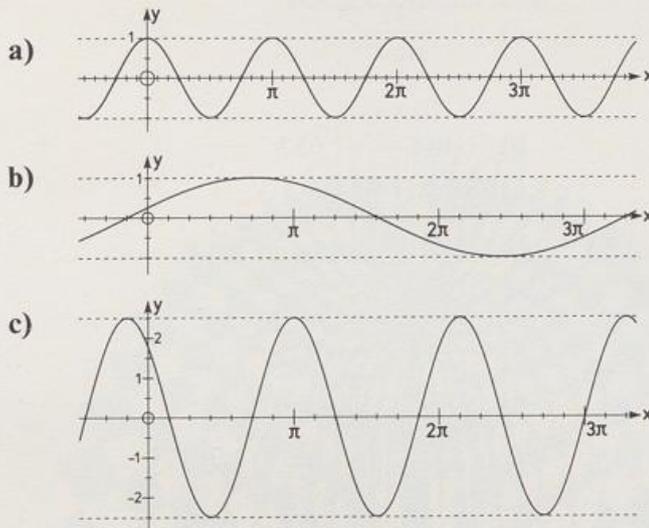
16. $a \sin b(x + c)$

Bestimme a , b und c so, dass der Funktionsterm zum Bild passt. (Jede Nullstelle ist Vielfaches von $\pi/6$.)

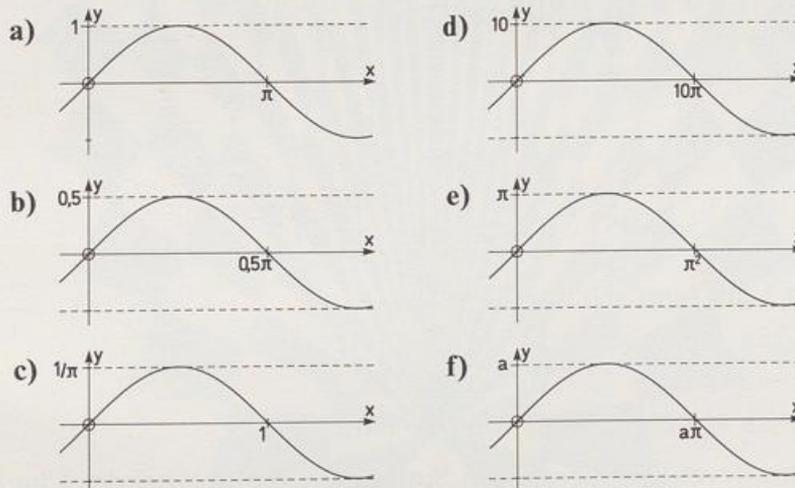


17. $a \sin(bx + c)$

Bestimme a , b und c so, dass der Funktionsterm zum Bild passt.



18. Die Bilder zeigen kongruente Sinuskurven in verschiedenen Koordinatensystemen. Gib jeweils die Kurvengleichung an.

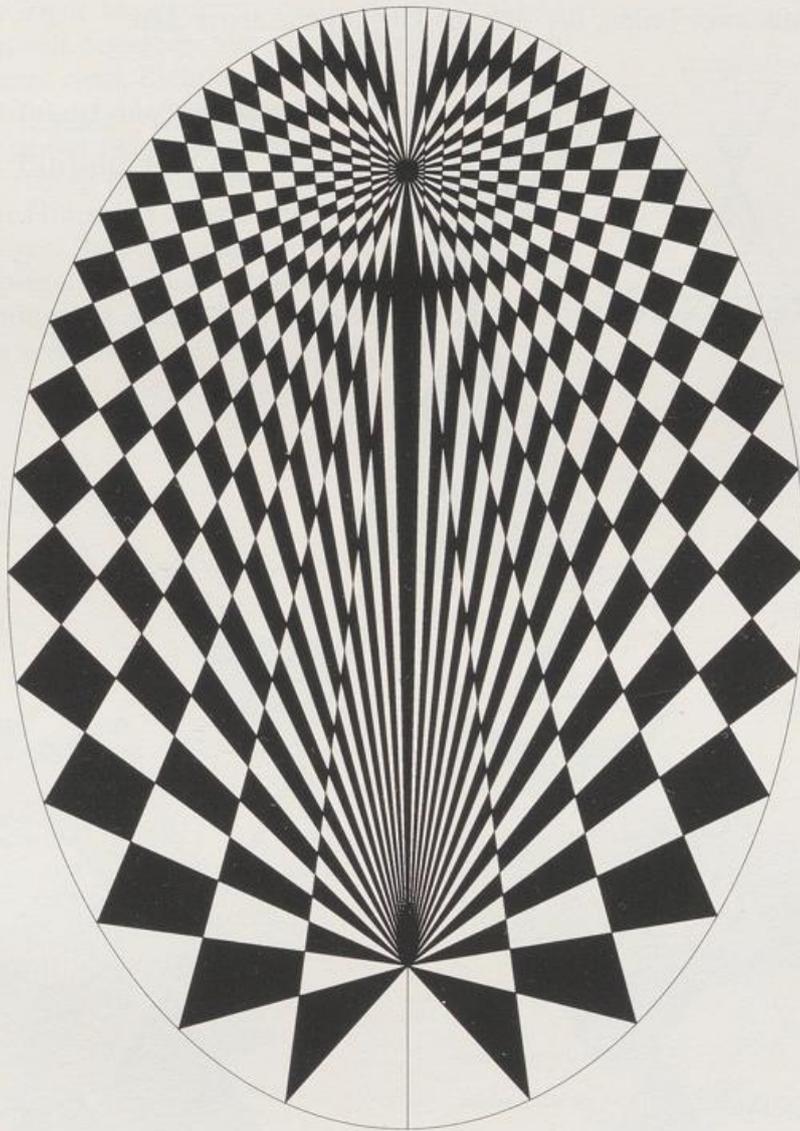


19. Kennzeichne in einem Koordinatensystem mit Farbe alle Punkte $P(x|y)$, für die gilt

- a) $-\pi \leq x \leq \pi$ und $\sin x - 1 \leq y \leq -1 - \cos x$
- b) $0 \leq x \leq 2\pi$ und $2 + \sin x \leq y \leq 1 - \cos x$
- c) $0 \leq x \leq \pi$ und $\cos x < y \leq \pi - x$
- d) $0 \leq x \leq 4$ und $x - 1 < y < \sin x$.

- 20. Gib die maximale Definitionsmenge und die Periode an von
- a) $y = \sin x + \cos x$ b) $y = \sin x + \tan x$
c) $y = 1 + (\tan x)^2$ d) $y = \frac{1}{\sin x}$.
21. Bestimme $x \in [0; 2\pi[$
- a) $\sin x = 0,1$ b) $2 \sin x = -1,683$
c) $\sin 2x = 0,6$ d) $|\sin x| = 0,48$
e) $\left| \sin \left(x - \frac{1}{3} \pi \right) \right| = 0,866$ f) $3 \sin \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) = 1,8$.
22. Bestimme $x \in [0; 2\pi[$
- a) $\cos x = -0,2$ b) $2 \cos x = -0,832$
c) $\cos 2x = 0,96$ d) $|\cos x| = 0,878$
e) $\cos \left(x - \frac{1}{3} \pi \right) = 0,995$ f) $4 \cos \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) = 0,283$.
23. Bestimme $x \in [0; \pi[$
- a) $\tan x = -0,5$ b) $2 \tan x = 4,37$
c) $\tan 2x = 1,158$ d) $|\tan x| = 0,143$
e) $\left| \tan \left(x - \frac{1}{3} \pi \right) \right| = 1,732$ f) $4 \tan \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) = -1$.
24. Für welche $x \in [0; 2\pi[$ gilt
- a) $\sin x < -0,2$ b) $\cos x \geq -0,832$
c) $\sin 2x \leq 0,96$ d) $|\cos x| > 0,878$
e) $\left| \sin \left(x - \frac{1}{3} \pi \right) \right| > 0,995$ f) $\tan \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \pi \right) > -1$?
25. Für welches x gilt (grafisch lösen!)
- a) $\sin x = 0,25x$ b) $\sin x = x - 1$
c) $\cos 2x = -x$ d) $|\cos x| = 2x$
e) $\tan x = 2 - x$ (1 Lösung!) f) $\sin 2x + \tan x = 0$?
- 26. Bestimme den Term der allgemeinen Sinuskurve, die sich bei der Überlagerung ergibt.
- a) $\sin x + 2 \sin \left(x + \frac{1}{4} \pi \right)$ b) $3 \sin x + 4 \sin \left(x + \frac{1}{2} \pi \right)$
c) $\frac{1}{2} \sin x + 2 \sin \left(x + \frac{1}{3} \pi \right)$ d) $\sin(2x) + 2 \sin 2 \left(x + \frac{1}{3} \pi \right)$
27. Zeige: $x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha = r \cdot \sin(\alpha + \varphi)$ und es gilt:
 r und φ sind die Polarkoordinaten des Punktes $P(x|y)$.

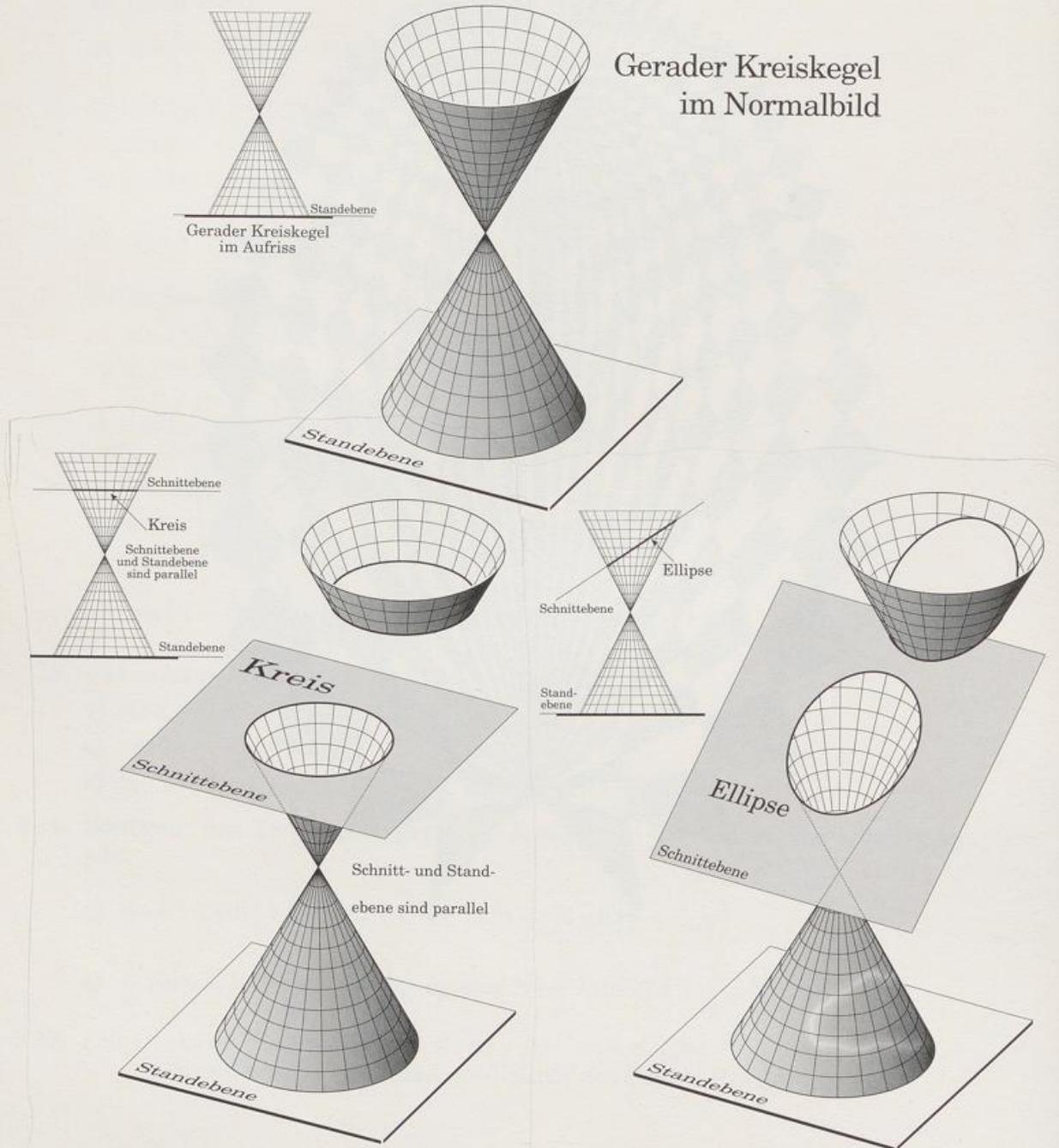
9. Kapitel Kegelschnitte



Vorbemerkung

Schneidet man einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene, so ergibt sich eine ebene Schnittkurve. Je nach Schnittrichtung entsteht

- eine geschlossene Kurve
- eine offene Kurve, die sich ins Unendliche erstreckt
- eine Kurve aus zwei Teilen, die sich ins Unendliche erstrecken.



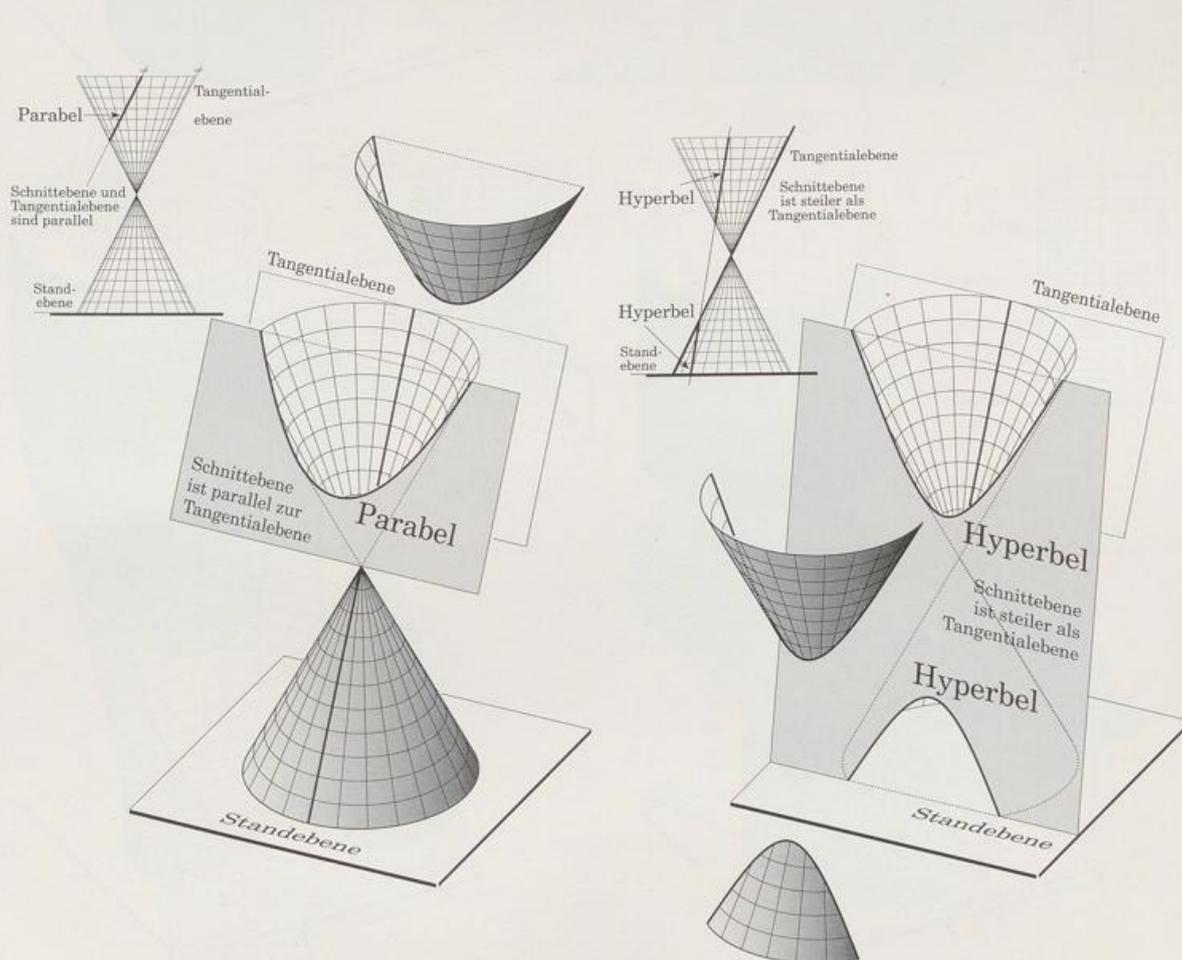
Geschlossene Kurven sind **Ellipsen**, im Sonderfall **Kreise**. Offene Kurven sind **Parabeln** (einteilig) oder **Hyperbeln** (zweiteilig). Von alters her heißen solche Kurven **Kegelschnitte**.

Schon vor gut 2000 Jahren haben sich die griechischen Mathematiker mit diesen Kurven beschäftigt. APPOLONIOS (262 bis 190) war der erste, der sie als Schnitte von Kegeln und Ebenen erkannte. Die Faszination der Kegelschnitte hat sich bis heute erhalten. Keineswegs nur Mathematiker müssen über sie Bescheid wissen – auch Astronomen, Techniker, Baumeister, ja sogar Maler.

In unserer Umwelt begegnen wir ständig Kegelschnitten:

- Schattengrenze eines Lichtkegels auf einer ebenen Wand
- Bild eines Kreises, den man schräg anschaut
- täglicher Weg der Schattenspitze des Zeigers einer Sonnenuhr
- Bahn eines schräg geworfenen Balls (Springbrunnen)
- Bahnen von Himmelskörpern und Satelliten
- Grundrisse von Barockkirchen und Barockgärten
- gewölbte Spiegel in optischen Geräten.

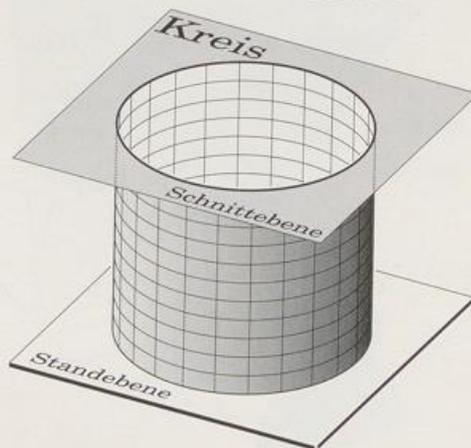
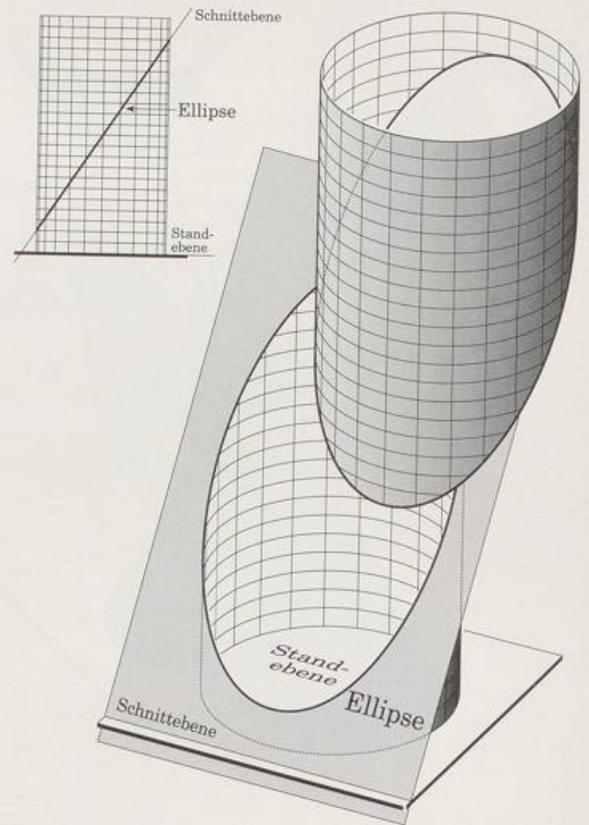
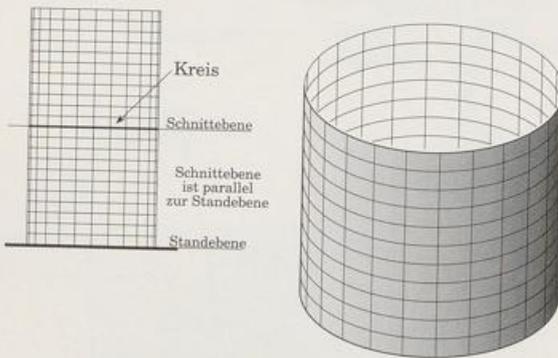
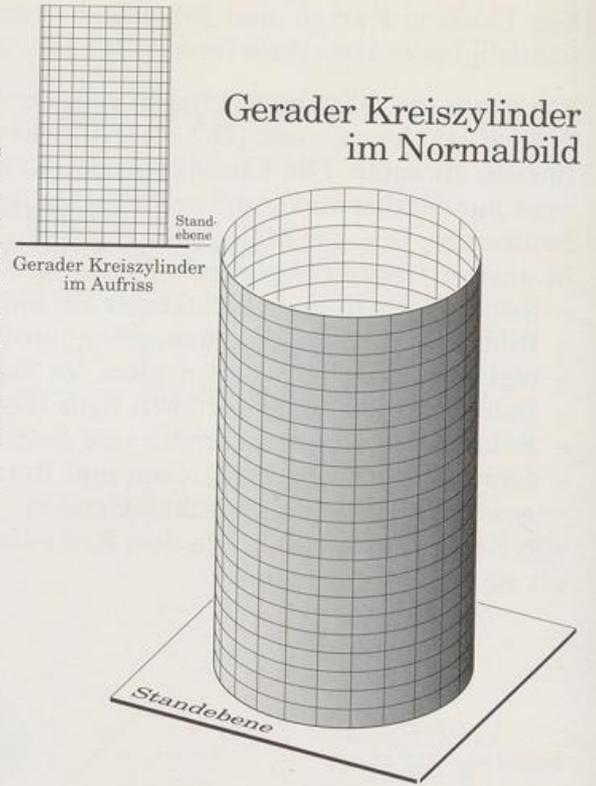
Von Kegelschnitten ist neben dem Kreis die Ellipse die wichtigste Kurve. Deshalb nehmen wir sie uns als erste vor.

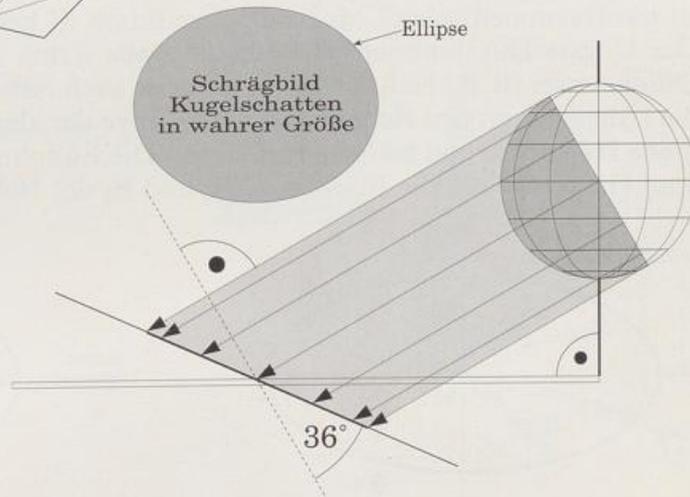
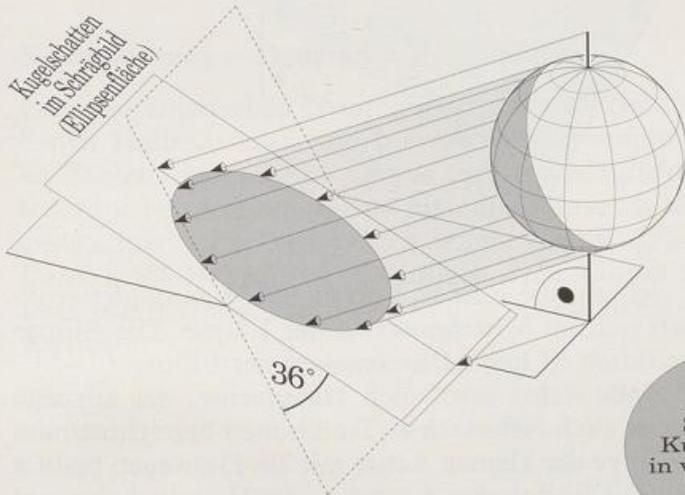
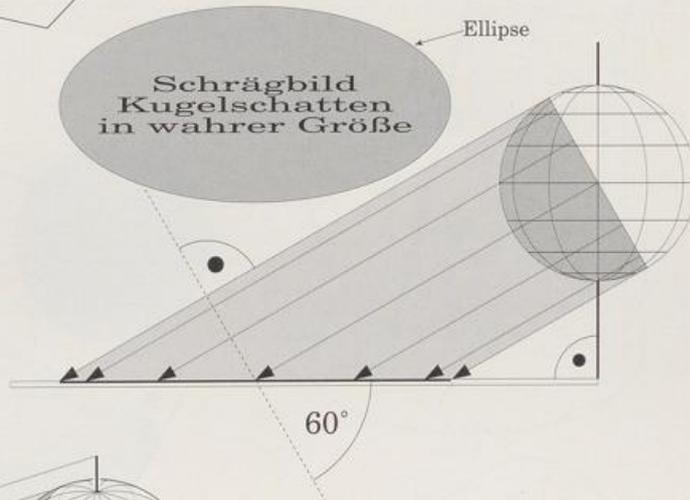
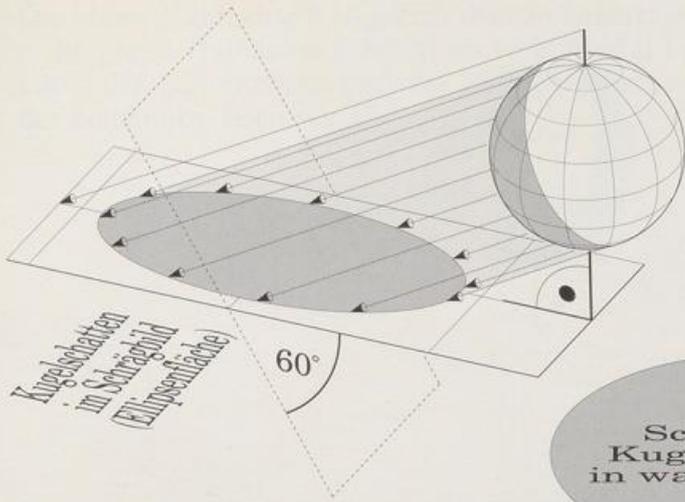


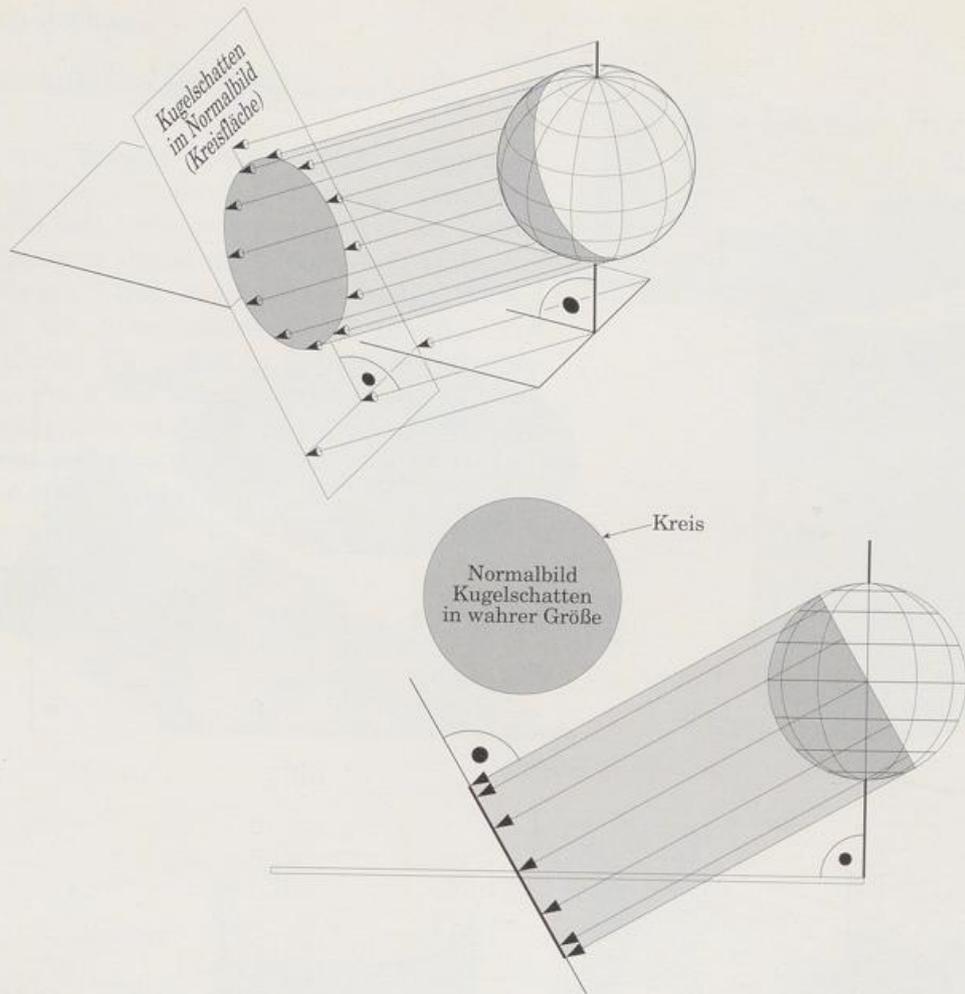
I. Die Ellipse

1. Die Ellipse als Zylinderschnitt

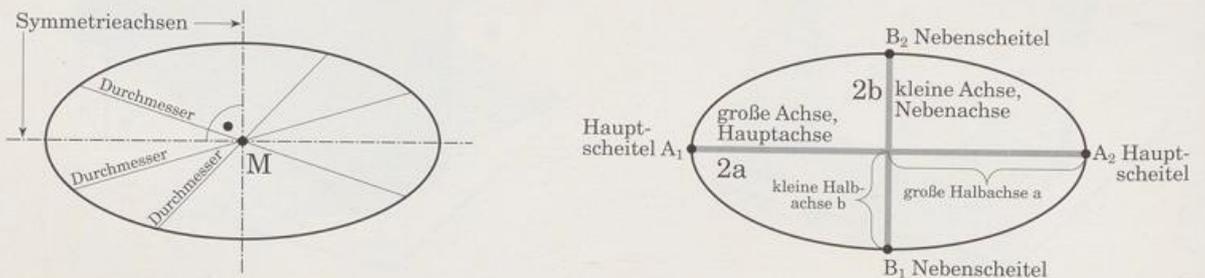
Kreis und Ellipse entstehen auch, wenn eine Ebene einen geraden Kreiszyylinder schneidet. Steht die Schnittebene senkrecht auf der Zylinderachse und damit auf jeder Mantellinie, so entsteht ein Kreis; bei einem endlichen Zylinder ist die Schnittebene dann parallel zur Standebene. Ein schräger Schnitt liefert eine Ellipse. Auch der Schattenbereich einer Kugel im Parallellicht ist ein Kreiszyylinder. Trifft der Schatten auf eine ebene Wand, so entsteht je nach Auftreffwinkel ein Kreis oder eine Ellipse.





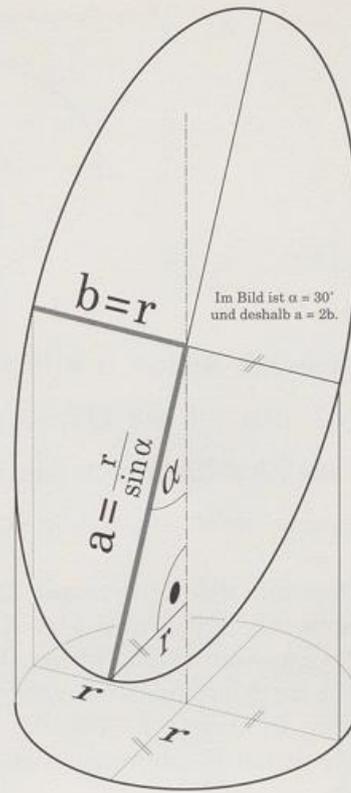


Die Symmetrie des Zylinders überträgt sich auf die Ellipse. Sie hat zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, diese schneiden sich im **Mittelpunkt M** der Ellipse. Die Ellipse ist punktsymmetrisch zu M. Jede Sehne durch M heißt **Durchmesser** der Ellipse. Der längste Durchmesser $[A_1A_2]$ heißt **große Achse** oder auch **Hauptachse**, der kürzeste Durchmesser $[B_1B_2]$ heißt **kleine Achse** oder auch **Nebenachse**. Traditionell bezeichnet man die Länge der großen Achse mit $2a$, die Länge der kleinen Achse mit $2b$. Deswegen heißt **a** **große Halbachse** und **b** **kleine Halbachse**. Die Endpunkte A_1 und A_2 der Hauptachse nennt man **Hauptscheitel**, die Endpunkte B_1 und B_2 der Nebenachse **Nebenscheitel**.



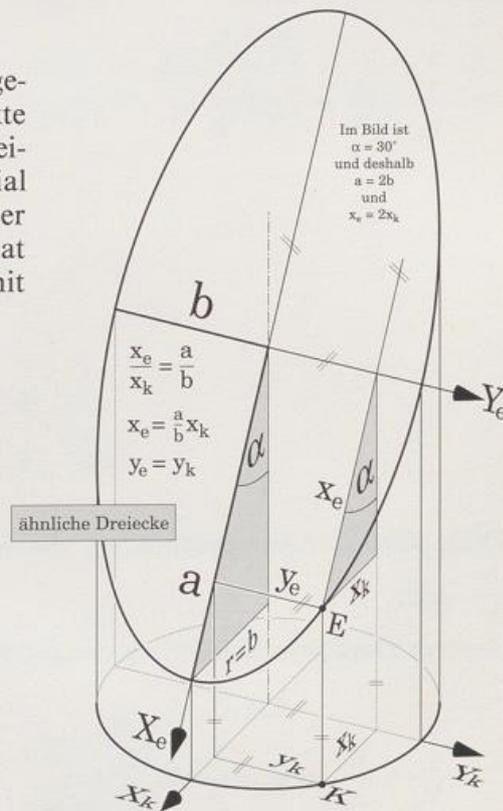
Die kleine Halbachse b ist gleich dem Zylinderradius r , die große Halbachse a hängt ab vom Winkel zwischen der Schnittebene und der Zylinderachse. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$b = r \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{r}{a} \quad \text{also} \quad a = \frac{r}{\sin \alpha}$$

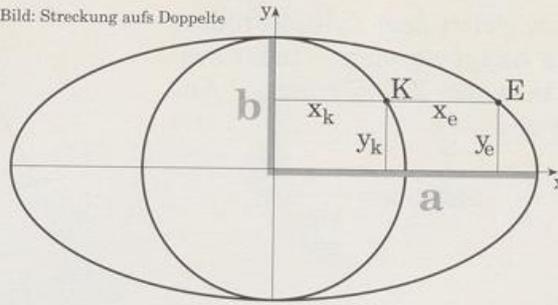


Kreisstreckung – Hauptkreis-Konstruktion

Eine der klassischen Grundaufgaben ist es, bei gegebenen Halbachsen a und b einzelne Ellipsenpunkte zu konstruieren. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine beruht darauf, dass man die Ellipse als axial gestauchten oder gestreckten Kreis deutet. Dieser Kreis heißt **Hauptkreis** der Ellipse. Jede Ellipse hat zwei Hauptkreise: einen mit Radius a und einen mit Radius b .



Im Bild: Streckung aufs Doppelte

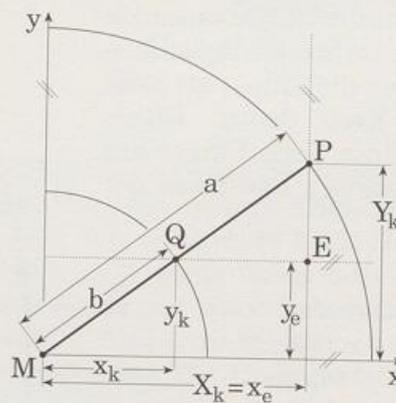


Der Kreis mit Radius b wird in x -Richtung aufs $\frac{a}{b}$ -fache gestreckt – der Kreispunkt $K(x_k|y_k)$ wird auf den Ellipsenpunkt $E(x_e|y_e)$ abgebildet. Diese Abbildung heißt **axiale Streckung** (in x -Richtung): Alle x -Werte sind mit dem Faktor $\frac{a}{b}$ multipliziert, die y -Werte ändern sich nicht. Die axiale Streckung ist von der zentrischen Streckung zu unterscheiden.

Die Streckung des Kreises mit Radius b zu einer Ellipse mit den Halbachsen a und b lässt sich auch mit Zirkel und Lineal einfach konstruieren. Sind a und b gegeben, so zeichnet man zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b . Einen Ellipsenpunkt $E(x_e|y_e)$ findet man so: Man zeichnet einen Radius, der den großen Kreis in $P(X_k|Y_k)$ und den kleinen Kreis in $Q(x_k|y_k)$ schneidet. Die Parallele zur x -Achse durch Q und die Parallele zur y -Achse durch P schneiden sich im Ellipsenpunkt E . Die Begründung lesen wir aus dem Bild ab.

$$y_e = y_k$$

$$\frac{x_e}{x_k} = \frac{a}{b} \Rightarrow x_e = \frac{a}{b} x_k$$

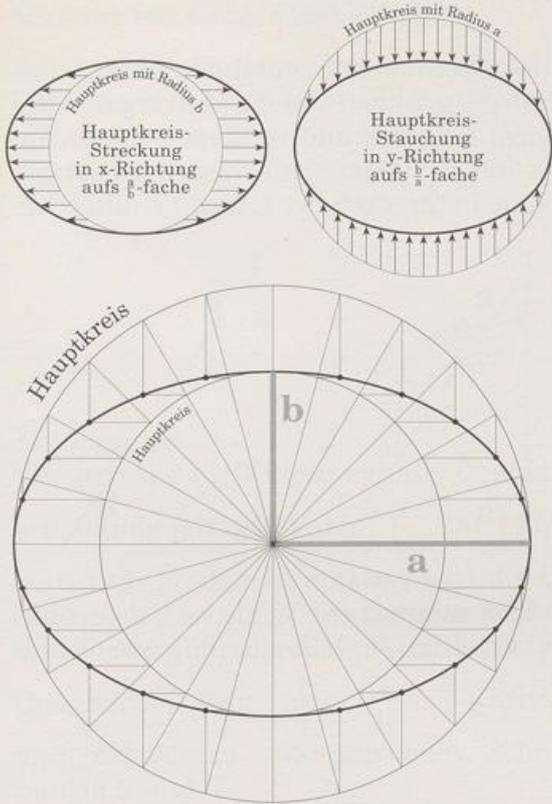


Diese Gleichungen beschreiben die Streckung des kleinen Kreises in x -Richtung aufs $\frac{a}{b}$ -fache.

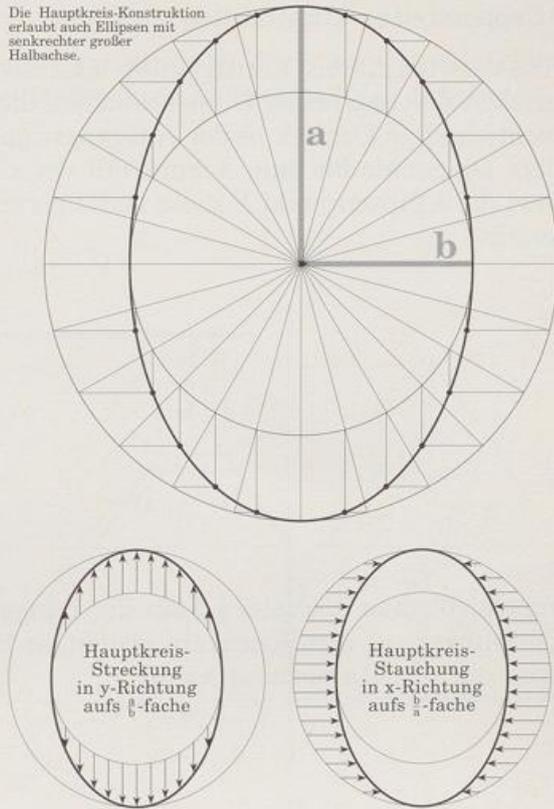
Andere Deutung: Stauchung des großen Kreises in y -Richtung aufs $\frac{b}{a}$ -fache:

$$x_e = X_k$$

$$\frac{y_e}{Y_k} = \frac{b}{a} \Rightarrow y_e = \frac{b}{a} Y_k$$

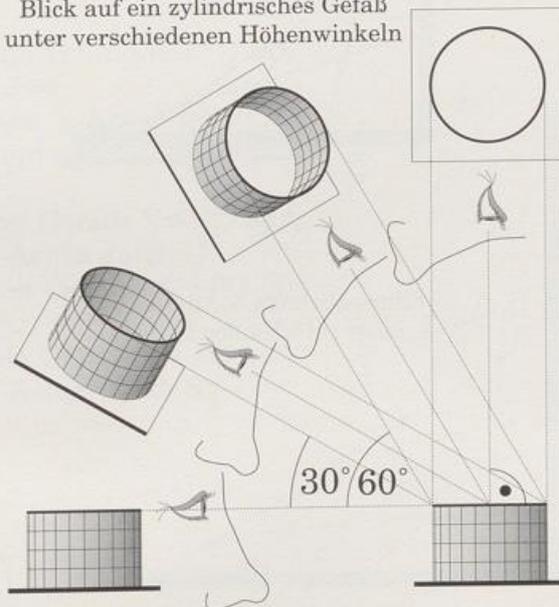


Die Hauptkreis-Konstruktion erlaubt auch Ellipsen mit senkrechter großer Halbachse.



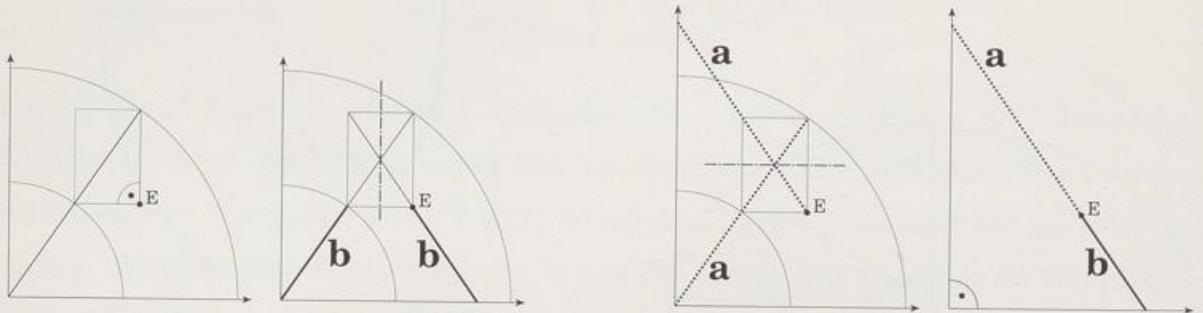
Die Streckung eines Kreises zur Ellipse beobachtet man am Schatten einer Kugel; die Stauchung eines Kreises zur Ellipse sieht man, wenn man aus verschiedenen Richtungen auf einen Kreis schaut.

Blick auf ein zylindrisches Gefäß unter verschiedenen Höhenwinkeln

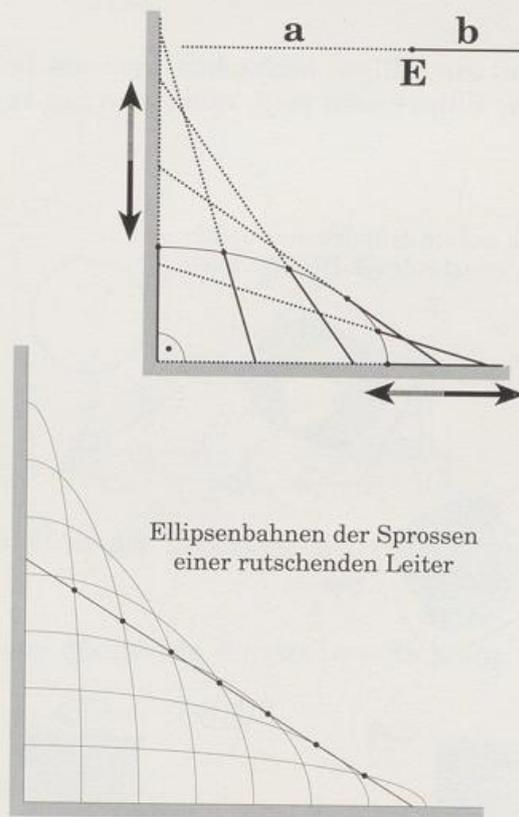


* Papierstreifen-Konstruktion

Aus der Hauptkreis-Konstruktion lässt sich eine besonders einfache Methode zum mechanischen Zeichnen einer Ellipse ableiten, die Papierstreifen-Konstruktion: Man ergänzt das rechtwinklige Dreieck in der Ausgangsfigur zu einem Rechteck und verlängert dessen andere Diagonale bis zum Schnitt mit der x- und y-Achse. Symmetrieüberlegungen zeigen, dass der Ellipsenpunkt E diese verlängerte Diagonale in Strecken der Längen a und b unterteilt.

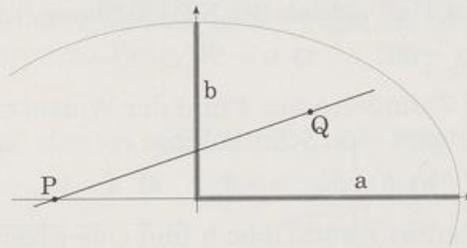


Verschiebt man also einen Stab der Länge $a + b$ in einem rechten Winkel so, dass seine Endpunkte auf den Schenkeln gleiten, so beschreibt der Teilpunkt E den Bogen einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.



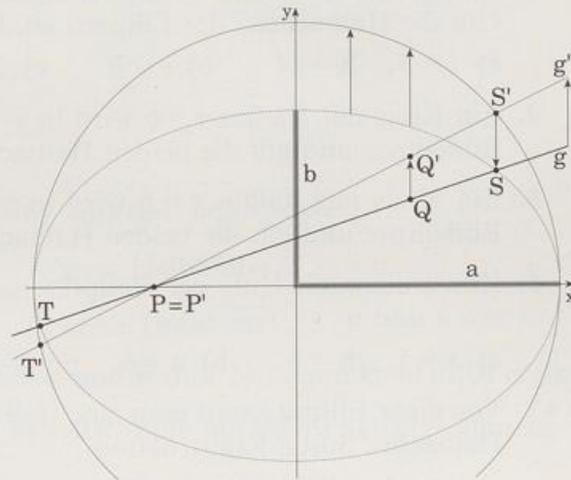
*Schnitt von Gerade und Ellipse

Wir wenden die Hauptkreis-Konstruktion an und konstruieren die Schnittpunkte einer Gerade $g = PQ$ und einer Ellipse mit bekannten Halbachsen. P liege auf der x -Achse.



Lösungsidee

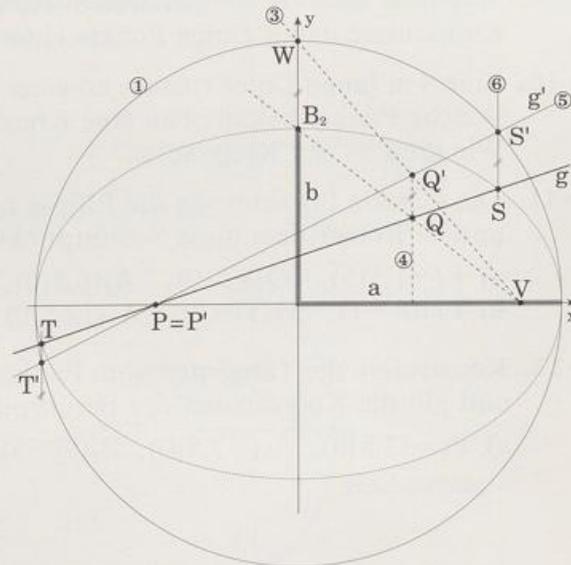
Wir strecken die Ellipse und die Gerade in y -Richtung mit dem Faktor $\frac{a}{b}$: Die Ellipse wird zum großen Hauptkreis und die Gerade g zur Gerade g' . Die Schnittpunkte S' und T' von g' und großem Hauptkreis stauchen wir mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ in y -Richtung und bekommen die gesuchten Schnittpunkte S und T .



Konstruktion

Der Schnittpunkt P von Gerade und x -Achse bleibt liegen: $P = P'$. Der Geradenpunkt $Q(x_q | y_q)$ wird abgebildet auf $Q'(x_q | \frac{a}{b} y_q)$. (Achte auf die gestrichelte V-Figur!)

- W ist Schnittpunkt von Hauptkreis ① mit Radius a und y -Achse.
- V ist Schnittpunkt von x -Achse und Gerade ② durch Q und den Nebenscheitel B_2 .
- Q' ist Schnittpunkt von Gerade VW ③ und Parallele ④ zur y -Achse durch Q .
- S' ist Schnittpunkt von Gerade $g' = PQ$ ⑤ und Hauptkreis ①.
- S ist Schnittpunkt von Gerade $g = PQ$ und Parallele ⑥ zur y -Achse durch S' .



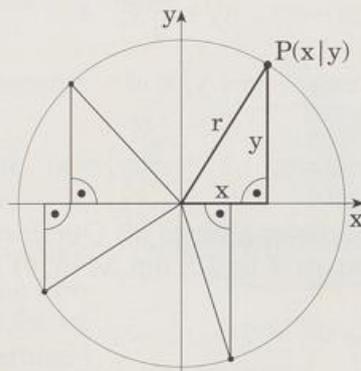
Aufgaben

1. Eine Ebene schneidet einen Zylinder mit Radius $r = 6$ so, dass sie mit der Zylinderachse den Winkel α bildet.
Berechne die beiden Halbachsen der Schnittellipse für
a) $\alpha = 45^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$ c) $\alpha = 90^\circ$
2. Wie groß muss der Zylinderradius r und der Winkel α zwischen Zylinderachse und Schnittebene sein, damit eine Schnittellipse entsteht mit
a) $a = 5$, $b = 3$ b) $a = 5$, $b = 4$ c) $a = 10$, $b = 4$
3. Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h und eine Ebene schneiden sich so, dass eine Ellipse mit maximaler großer Halbachse a entsteht.
Gib die Halbachsen der Ellipsen an, falls
a) $r = 5$, $h = 24$ b) $e = h$ c) $2r = h$
4. Ein Kreis mit Radius $r = 6$ wird in y -Richtung aufs $\frac{2}{3}$ -fache gestaucht. Zeichne die Bildellipse und gib die beiden Halbachsen an.
5. Ein Kreis mit Radius $r = 5$ wird in y -Richtung aufs $\frac{3}{2}$ -fache gedehnt. Zeichne die Bildellipse und gib die beiden Halbachsen an.
6. Konstruiere mit Hilfe der Hauptkreise einige Punkte der Ellipsen mit den Halbachsen a und b
a) $a = 5$, $b = 3$ b) $a = 6$, $b = 3$ c) $a = 6$, $b = 2$
- 7. Von einer Ellipse kennt man eine Halbachse und einen Punkt E . Ermittle die andere Halbachse durch Konstruktion.
a) $a = 13$, $E(5|4)$ b) $b = 5$, $E(6|4)$ c) $a = 10$, $E(6|6)$
8. Markiere auf einem 10 cm langen Kartonstreifen einen Punkt, der 4 cm vom Rand weg liegt. Zeichne damit eine Ellipse und gib ihre Halbachsen an.
9. Wie lässt sich die Papierstreifen-Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausführen? Konstruiere damit einige Punkte einer Ellipse mit den Halbachsen 5 und 3.
10. Eine 4 m lange Leiter rutscht an einer Hauswand ab.
Welche Punkte beschreiben eine Kreisbahn? Begründung!
Wie groß ist der Kreisradius?
- 11. Die Gerade PQ schneide die Ellipse mit den Scheiteln A_2 und B_2 in den Punkten S und T . Konstruiere diese Schnittpunkte und gib ihre Koordinaten an.
a) $P(-1,5|5)$, $Q(8,5|0)$, $A_2(6,5|0)$, $B_2(0|3,25)$
b) $P(10|-1)$, $Q(5|-7)$, $A_2(12,5|0)$, $B_2(0|5)$
- 12. Konstruiere die Tangenten vom Punkt P an die Ellipse mit den Scheiteln A_2 und B_2 und gib die Koordinaten der Berührungspunkte S und T an.
a) $P(-12,5|0)$, $A_2(-7,5|0)$, $B_2(0|-5)$ b) $P(-1,5|-7)$, $A_2(-7,5|0)$, $B_2(0|-5)$

2. Die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse

So wie man die Punkte einer Gerade durch die Gleichung $ay + bx + c = 0$ beschreiben kann, so lassen sich auch die Punkte einer Ellipse mit einer Gleichung festlegen. Beginnen wir mit der einfachsten Ellipse, dem Kreis. k sei ein Kreis um $M(0|0)$ mit Radius r . Nach Pythagoras gilt für jeden Kreispunkt $P(x|y)$:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Damit ist die Gleichung schon gefunden. Nach y aufgelöst ergibt sich:

$$|y| = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{das heißt} \quad y = +\sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{oberer Halbkreis})$$

$$\text{oder} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{unterer Halbkreis})$$

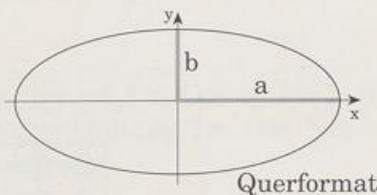
Die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b und Mittelpunkt $M(0|0)$ ergibt sich, wenn man einen Kreis mit Radius $r = a$ in y -Richtung mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ staucht.

Aus der Kreisgleichung $|y| = \sqrt{a^2 - x^2}$ bekommen wir die

$$\text{Ellipsengleichung} \quad |y| = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

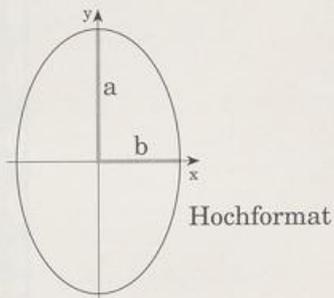
Quadrieren und Sortieren liefert die **Mittelpunkt-Gleichung** der Ellipse mit den Halbachsen a (in x -Richtung) und b (in y -Richtung).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Liegt die große Halbachse in y -Richtung, dann heißt die Gleichung:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Ein anderer Weg von der Kreisgleichung zur Ellipsengleichung folgt aus den uns schon bekannten Koordinaten-Beziehungen zwischen einem Punkt $(x_k|y_k)$ des Hauptkreises mit Radius a und Ellipsenpunkt $(x_e|y_e)$:

$$x_e = x_k$$

(siehe Seite 210)

$$y_e = \frac{b}{a} y_k \Rightarrow y_k = \frac{a}{b} y_e$$

Kreisgleichung: $x_k^2 + y_k^2 = a^2$ eingesetzt ergibt

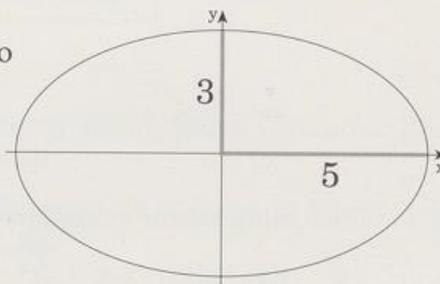
Ellipsengleichung: $x_e^2 + \frac{a^2}{b^2} y_e^2 = a^2$ in üblicher Form: $\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1$

Die Gleichung der Ellipse im Querformat mit den Halbachsen 3 und 5 um $M(0|0)$ lautet also

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$



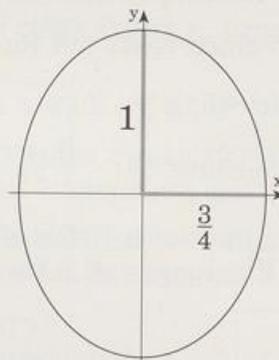
Allgemein beschreibt jede Gleichung der Form $px^2 + qy^2 - r = 0$ mit $p, q, r > 0$ eine Ellipse. Die Halbachsen finden wir durch geeignete Umformung:

$$16x^2 + 9y^2 - 9 = 0$$

$$16x^2 + 9y^2 = 9$$

$$\frac{16x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

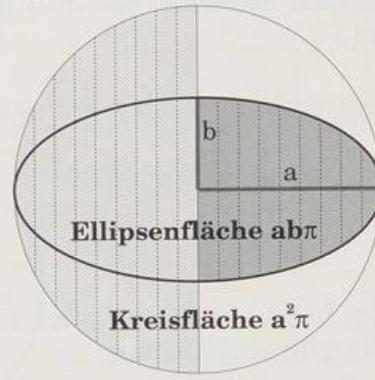
$$\frac{x^2}{(\frac{3}{4})^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \Rightarrow a = 1, b = \frac{3}{4}$$



* Fläche und Umfang der Ellipse

Die Idee von der Ellipse als gestauchtem Kreis führt auch zu einer einfachen Formel für die Fläche einer Ellipse. Man denkt sich den Kreis in sehr schmale, annähernd rechteckige Streifen zerlegt. Beim Stauchen bleibt jeder Streifen gleich breit, seine Höhe und damit seine Fläche nehmen ab aufs $\frac{b}{a}$ -fache. Also gilt $A_{\text{Ellipse}} = \frac{b}{a} A_{\text{Kreis}}$.

$$A_{\text{Ellipse}} = ab\pi$$



Wer nun nach dieser einfachen Flächenformel erwartet, dass es auch für den Umfang der Ellipse eine einfache Formel gibt, der irrt. Nur mit Hilfe höherer Mathematik findet man Ausdrücke, mit denen man den Umfang näherungsweise berechnen kann. Eine kleine Auswahl:

- ① $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]$
- ② $U_{\text{Ellipse}} \approx \frac{\pi}{2} \left[a+b + \sqrt{2(a^2+b^2)} \right]$
- ③ $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left(a+b + \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \right)$

Für $a = b = r$ wird aus diesen drei Formeln erwartungsgemäß der Term $\pi \cdot 2r$. Wer's exakt haben will, muss eine Summe mit unendlich vielen Summanden »berechnen«, zum Beispiel

$$④ \quad U_{\text{Ellipse}} = 2a\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right]$$

mit $e^2 = a^2 - b^2$.

Für eine Ellipse mit $a = 1$ und $b = 0,5$ ergibt sich $F = ab\pi = 0,5\pi$. Das ist die halbe Fläche des großen Halbkreises mit $r = 1$. Dieser Kreis hat den Umfang 2π . Die Näherungsformeln für den Ellipsenumfang liefern (10 gültige Dezimalen)

- ① $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right] = \pi \cdot 1,5428932188\dots$
- ② $U_{\text{Ellipse}} \approx \frac{\pi}{2} \left[\frac{3}{2} + \sqrt{2 \cdot \frac{5}{4}} \right] = \pi \cdot 1,5405694150\dots$
- ③ $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left[\frac{3}{2} + \frac{1/4}{4 \cdot 3/2} \right] = \pi \cdot 1,5416666666\dots$
- ④ $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \cdot 1,5419644251\dots$

* Ellipsenzirkel

Zum Zeichnen von Kreisen hat man als Werkzeug den Zirkel erfunden. Verblüffenderweise gibt es auch ein mechanisches Gerät zum Zeichnen von Ellipsen, den Ellipsenzirkel. Seine Funktionsweise beruht auf der Papierstreifen-Konstruktion.

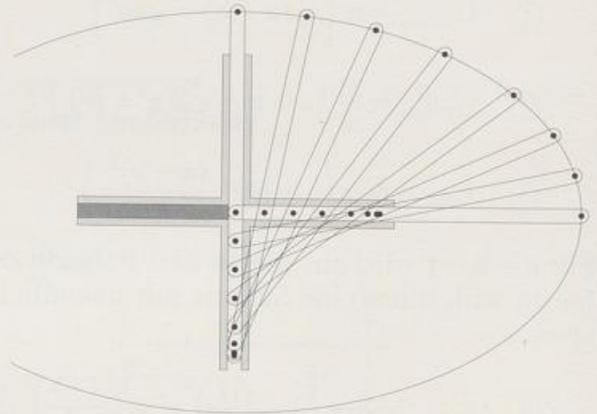
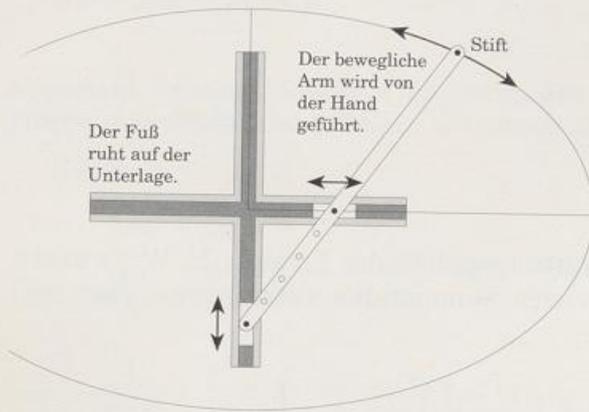
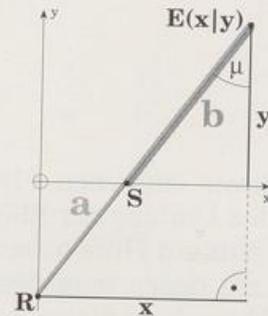
Zwei feste Punkte R und S eines Stabs mit $\overline{ER} = a$ und $\overline{ES} = b$ gleiten in zueinander senkrechten Schienen. Ein Stift im Endpunkt E zeichnet eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

Begründung: $\sin \mu = \frac{x}{a}$, $\cos \mu = \frac{y}{b}$

$$(\sin \mu)^2 + (\cos \mu)^2 = 1$$

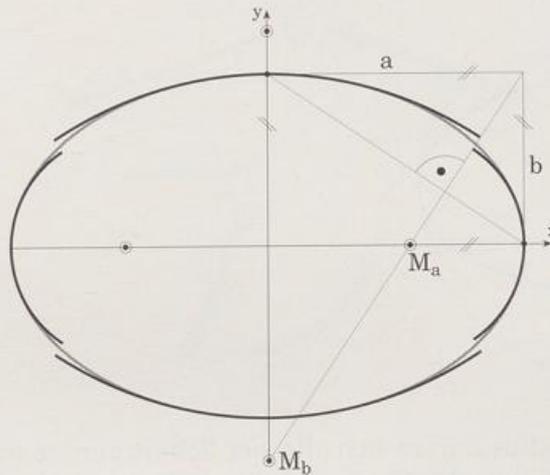
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

das heißt, die Koordinaten von E erfüllen die Ellipsengleichung.



* Die Scheitel-Krümmungskreise

Normalerweise hat man keinen Ellipsenzirkel zur Hand. Aber auch ein Kreiszirkel eignet sich zum näherungsweisen Zeichnen von Ellipsen. Dazu dienen vier Kreisbögen, die die Ellipse in der Umgebung der Scheitel am besten annähern. Sie heißen **Scheitel-Krümmungskreise**. Ihre Mittelpunkte liegen aus Symmetriegründen auf den Achsen. Das Bild erklärt die Konstruktion dieser Mittelpunkte M_a und M_b .



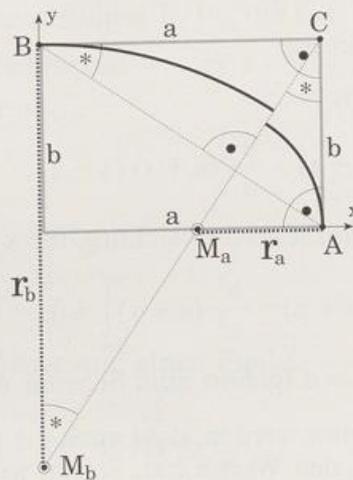
Zeichnet man die vier Kreisbögen (die sich nicht schneiden!), dann hat man schon einen verblüffend guten Eindruck von Ellipse. Diese lässt sich jetzt gut skizzieren – aber Obacht: immer innerhalb der großen und außerhalb der kleinen Näherungskreise bleiben, denn nur die vier Scheitel sind Ellipsenpunkte! Die Kreisradien liest man aus der Konstruktionsfigur ab:

Aus $\triangle CAM_a \sim \triangle BCA$ folgt

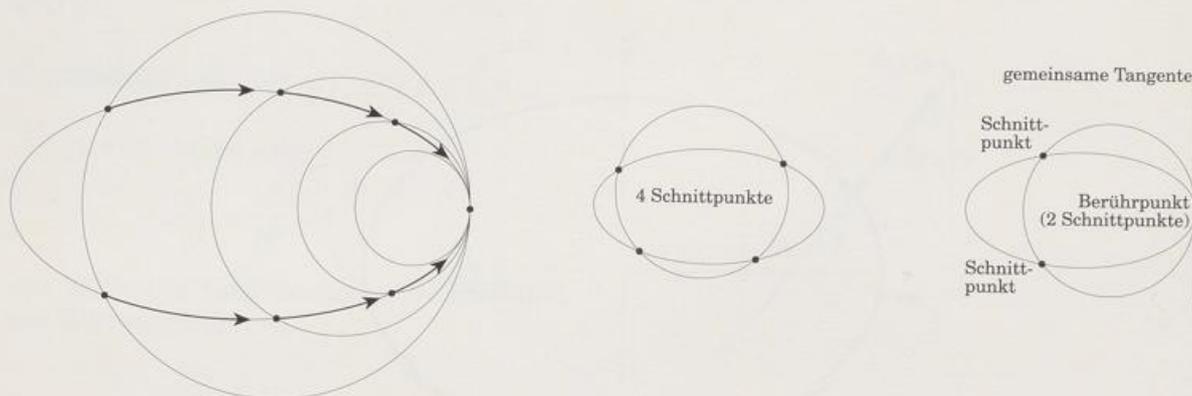
$$\frac{r_a}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{also} \quad \boxed{r_a = \frac{b^2}{a}}$$

Aus $\triangle BCM_b \sim \triangle CAB$ folgt

$$\frac{r_b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{also} \quad \boxed{r_b = \frac{a^2}{b}}$$



Wer's genauer wissen will, erfährt jetzt den mathematischen Hintergrund.
 Im Allgemeinen schneiden sich Kreis und Ellipse in vier Punkten.
 Haben sie eine gemeinsame Tangente, dann berühren sie sich: Zwei Schnittpunkte fallen in einem Berührungspunkt zusammen. Als Berührungspunkt wählen wir den rechten Hauptscheitel, halten ihn fest und verkleinern den Radius. Dabei wandern die beiden andern Schnittpunkte auf der Ellipse in Richtung Berührungspunkt.



Bei einem bestimmten Radius treffen sich alle vier Schnittpunkte im Berührungspunkt und bilden einen vierfachen Schnittpunkt. Grafisch äußert sich das darin, dass sich der Kreis jetzt besonders innig an die Ellipse anschmiegt.

Für die Koordinaten der beiden beweglichen Schnittpunkte gelten zwei Gleichungen

$$\text{I } y^2 = (2r - a + x)(a - x)$$

(Höhensatz im Dreieck CAP)

$$\text{II } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

(Ellipsengleichung)

Gleichsetzen liefert:

$$(2r - a + x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x)$$

das ergibt eine quadratische Gleichung für x

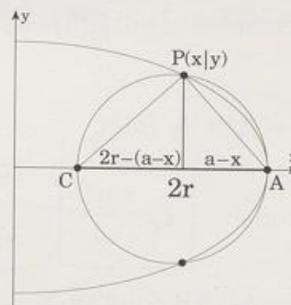
$$(a - x) \left[(2r - a + x) - \frac{b^2}{a^2}(a + x) \right] = 0$$

Eine Lösung ist $x_1 = a$ (gehört zum Scheitel A).

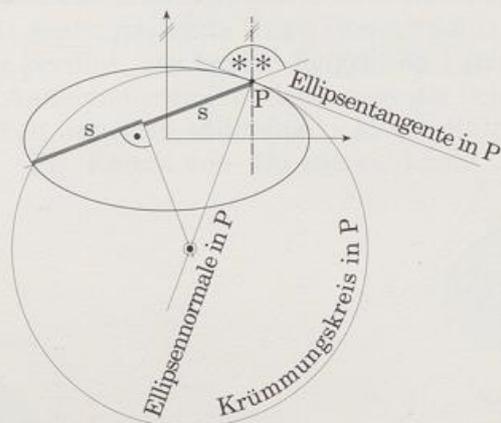
r soll nun so bestimmt werden, dass auch die zweite Lösung x_2 , für die die zweite Klammer [...] gleich null ist, den Wert a hat. Setzen wir in [...] a für x ein, so ergibt sich für r

$$\left[(2r - a + a) - \frac{b^2}{a^2}(a + a) \right] = 0$$

$2r = 2 \frac{b^2}{a} \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$, das ist der Radius r_a des kleinen Scheitel-Krümmungskreises.



Für den Radius r_b des großen Scheitel-Krümmungskreises gelten entsprechende Überlegungen. Die Scheitel-Krümmungskreise sind deshalb so besonders gute Schmiegekreise, weil in jedem Scheitel vier Schnittpunkte zusammenfallen. Dieselbe Überlegung für andere Ellipsenpunkte zeigt, dass nur drei Schnittpunkte zusammenfallen: Jetzt durchdringen die Schmiegekreise die Ellipse. Ihre Konstruktion ist schwieriger.



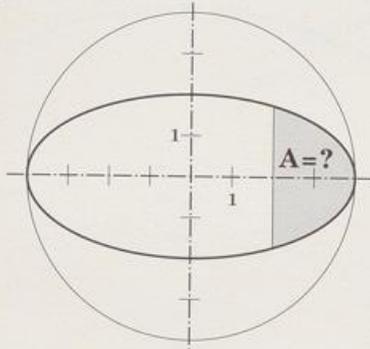
Aufgaben

Wenn nichts anderes vermerkt ist, liegt die Ellipse im Querformat. Ihr Mittelpunkt ist immer der Ursprung.

- Wie lautet die Mittelpunkt-Gleichung einer Ellipse E , für die gilt
 a) $a = 2, b = 1$ b) $a = 2, b = 1$, Hochformat c) $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{5}$
- Bestimme die Halbachsen a und b der Ellipse.
 Hat die Ellipse Quer- oder Hochformat?
 a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ b) $0,5x^2 + 2y^2 = 2$
 c) $4x^2 + y^2 = 1$ d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{25}y^2 = \frac{1}{4}$
- Von einer Ellipse kennt man eine Halbachse und einen Punkt.
 Bestimme die andere Halbachse.
 a) $a = 5\sqrt{5}, P(10|1)$ b) $b = 5\sqrt{2}, P(-14|1)$
 c) $a = 5\sqrt{10}, P(15|-3)$ d) $b = 4\sqrt{13}, P(-15|-8)$
- Von einer Ellipse kennt man die Punkte P und Q .
 Bestimme die Mittelpunkt-Gleichung. (Tip: Substitution von $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{b^2}$)
 a) $P(9|-1), Q(-7|3)$ b) $P(-1|9), Q(-9|6)$
 c) $P(17|4), Q(23|-1)$ d) $P(-19|4), Q(16|11)$

5. Der Ellipse mit der Gleichung $16x^2 + 9y^2 = 144$ ist ein Quadrat einbeschrieben. Berechne seine Seitenlänge s .
6. Die Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 500$ und die Gerade mit der Gleichung $3y = 2x - 25$ schneiden sich zweimal. Berechne die Schnittpunkte.
7. Bestimme den Flächeninhalt und näherungsweise den Umfang der Ellipse mit der Gleichung
- a) $9x^2 = 25y^2 = 225$ b) $x^2 + 100y^2 = 100$

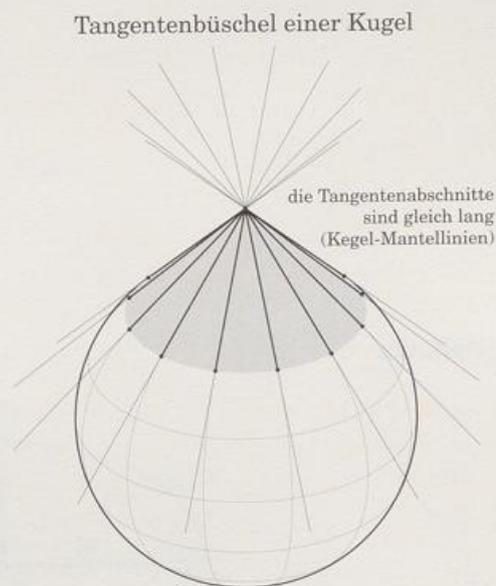
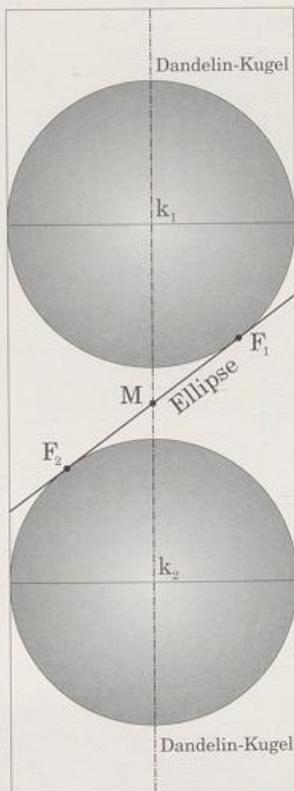
•8.



9. Von einer Ellipse kennt man den Punkt $P(4,5|2)$ und die kleine Halbachse $b = 2,5$. Konstruiere die Länge der großen Halbachse a mit Hilfe der Idee des Ellipsenzirkels.
10. Konstruiere die Scheitelkrümmungs-Kreise und skizziere die Ellipse mit den Halbachsen
- a) $a = 5, b = 4$ b) $a = 5, b = 3$ c) $a = 5, b = 2$
11. Eine Ellipse, bei der die Mittelpunkte der großen Scheitelkrümmungs-Kreise die Nebenscheitel sind, heißt **Fagnano-Ellipse**.
Der italienische Mathematiker Giulio Carlo Fagnano, Marquis von Toschi und S. Onorio (1682 bis 1766) hat sich einen Namen gemacht wegen seiner Bogenlängen-Berechnungen bei Ellipse, Hyperbel, Parabel und Lemniskate.
- a) Die kleine Halbachse einer Fagnano-Ellipse sei b . Berechne
– die große Halbachse a
– den Radius des kleinen Scheitelkrümmungs-Kreises.
- b) Zeichne eine Fagnano-Ellipse mit Hilfe ihrer Scheitelkrümmungs-Kreise für $b = 3$.
- c) Zeige: Wenn eine Ellipse mit den Halbachsen a und b eine Fagnano-Ellipse ist, dann ist auch die Ellipse mit den Halbachsen b und $a/2$ eine Fagnano-Ellipse.

3. Die Brennpunkte der Ellipse

Der belgische Mathematiker und Baumeister Pierre Germinal DANDELIN (1794 bis 1847) hatte bei der Untersuchung von Kegelschnitten eine schöne Idee aus der Raumgeometrie, die uns eine sehr wichtige Eigenschaft der Ellipse vor Augen führt. Dazu betrachten wir die Ellipse wieder als Schnitt einer Ebene E und eines Zylinders. Auf beiden Seiten der Ebene schiebt man eine genau passende Kugel (Kugelradius = Zylinderradius) in den Zylinder, bis sie die Ebene berührt. Die beiden Kugeln berühren außerdem den Zylinder in den Kreisen k_1 und k_2 . Aus Symmetriegründen liegen die beiden Berührungspunkte F_1 und F_2 auf der Hauptachse gleich weit vom Mittelpunkt M der Ellipse weg. F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse. Zu Ehren von DANDELIN nennt man die beiden Kugeln **Dandelin-Kugeln**.



P sei ein beliebiger Punkt der Schnittellipse. Weil die Schnittebene auch Tangentialebene der beiden Dandelin-Kugeln ist, sind PF_1 und PF_2 Tangenten dieser Kugeln. Die Mantellinie durch P schneidet die beiden Berührungskreise k_1 und k_2 in Q_1 und Q_2 . PQ_1 und PQ_2 sind also auch Tangenten der Dandelin-Kugeln. Alle Kugel-Tangentenabschnitte durch einen Punkt sind gleich lang. Deshalb gilt:

$$\overline{PQ_1} = \overline{PF_1} \quad \text{und} \quad \overline{PQ_2} = \overline{PF_2} \quad \text{also} \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2} = \overline{Q_1Q_2} = \text{const.}$$

Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten die Konstante $\overline{Q_1Q_2}$, der Abstand der beiden Berührungskreise. Der Wert dieser Konstante ergibt sich, wenn wir P in einen Hauptscheitel, zum Beispiel A_2 , legen, wenn also $P = A_2$ ist:

$$\overline{Q_1Q_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = \overline{A_2F_1} + \overline{F_1A_1} = 2a$$

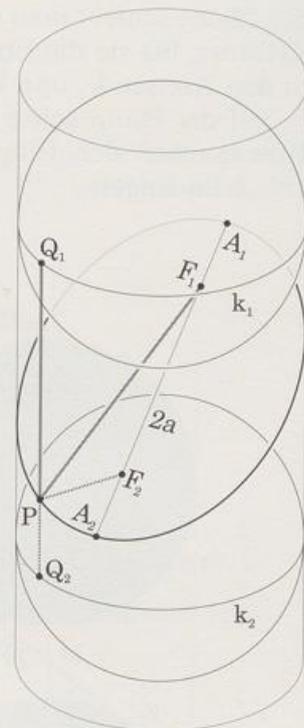
Zusammenfassung

Für jeden Ellipsenpunkt P gilt

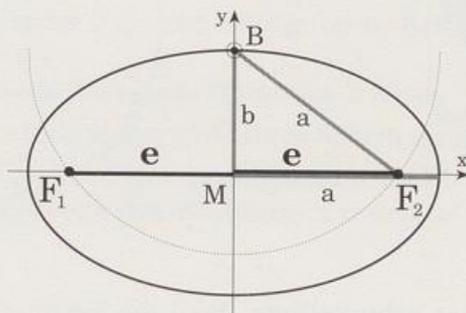
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Die beiden Brennrecken $[PF_1]$ und $[PF_2]$ sind zusammen so lang wie die Hauptachse $2a$.

Legt man P in einen Nebenscheitel B, dann gilt aus Symmetriegründen $\overline{F_1B} = \overline{F_2B} = a$. Mit dieser Beziehung lassen sich die Brennpunkte einfach konstruieren.



* Exzentrizitäten



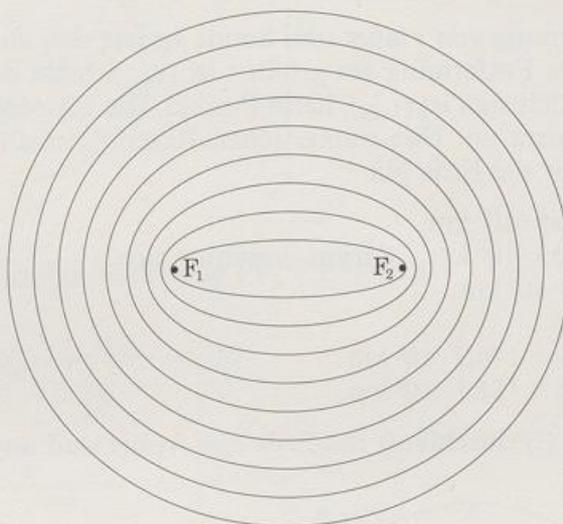
Die Entfernung e der Brennpunkte vom Mittelpunkt heißt **lineare Exzentrizität**. Die Zeichnung (Pythagoras!) zeigt:

$$e^2 = a^2 - b^2$$

Für einen Kreis gilt $a = b$, also $e = 0$. e ist aber noch kein Maß dafür, wie die Ellipse vom Kreis abweicht. Denn bei einer Ähnlichkeitsabbildung, zum Beispiel zentrische Streckung, ändert sich zwar e , nicht aber die Form. Umgekehrt gibt es zu ein und demselben Wert für e verschieden geformte Ellipsen. Bezieht man jedoch e auf die große Halbachse, dann entsteht eine Zahl, in der die Gestalt der Ellipse zum Ausdruck kommt, sie heißt **numerische Exzentrizität** ε :

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



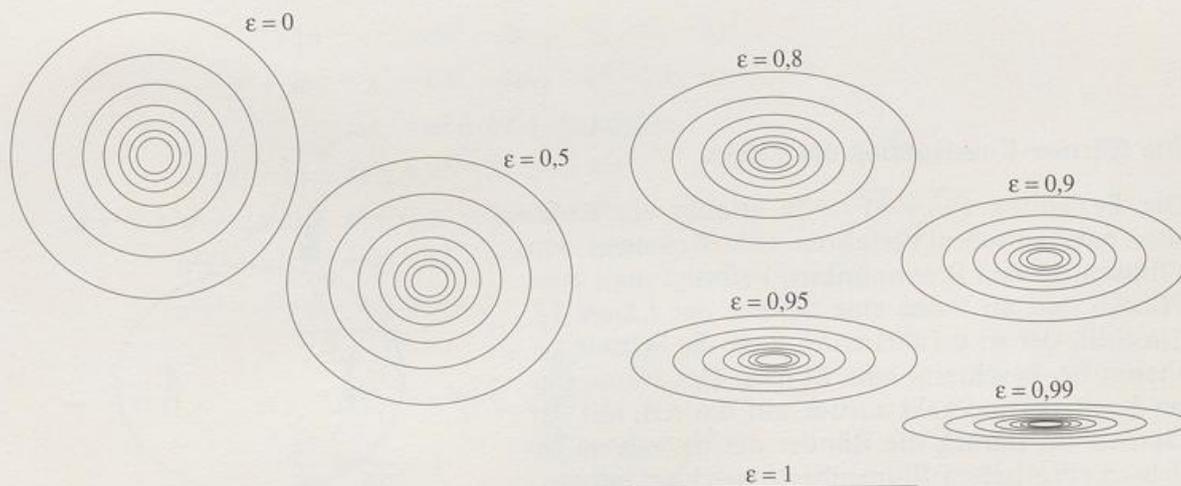
Wegen $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ist $0 \leq \varepsilon \leq 1$

Für die Grenzfälle gilt

$\varepsilon = 0$, das heißt $a = b$: Kreis

$\varepsilon = 1$, das heißt $b = 0$: Strecke

Konfokale Ellipsen mit $\overline{F_1F_2} = 2e = \text{const.}$



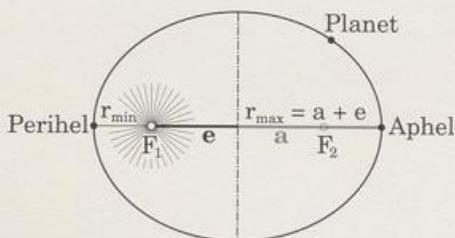
Die Ellipse in der Astronomie

Bis ins 16. Jahrhundert glaubte man, dass sich alle Gestirne auf Kreisbahnen oder auf Überlagerungen von Kreisbahnen bewegen. Als Johannes KEPLER (Weil der Stadt 1571 bis 1630 Regensburg) auf der Grundlage der Beobachtungen von Tycho BRAHE die Planetenbewegung mathematisch beschreiben wollte, musste er dieses Ideal der Kreisbahn aufgeben. Er stellte fest, dass die Planeten auf Ellipsenbahnen laufen, bei denen die Sonne in einem Brennpunkt steht.

Die Entfernung von Planet und Sonne ändert sich also während des Umlaufs. Der Punkt, bei dem die Entfernung am größten ist (r_{\max}), heißt **Aphel**; der Punkt, bei dem die Entfernung am kleinsten ist (r_{\min}), heißt **Perihel**. Die Ellipsenbahnen weichen nur sehr wenig von der Kreisform ab. Ihre numerischen Exzentrizitäten reichen von 0,007 (Venus) bis 0,25 (Pluto). Für die Erde gilt

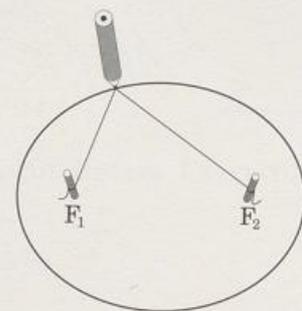
$$\begin{aligned} a &= 148,65 \cdot 10^6 \text{ km,} \\ b &= 148,63 \cdot 10^6 \text{ km,} \text{ daraus errechnet sich} \\ e &= 2,44 \cdot 10^6 \text{ km,} \\ \varepsilon &= 0,016 \\ r_{\min} &= a - e = 146,2 \cdot 10^6 \text{ km} \\ r_{\max} &= a + e = 151,1 \cdot 10^6 \text{ km.} \end{aligned}$$

Am 3. Juli (!) durchläuft die Erde das Aphel und am 2. Januar das Perihel.

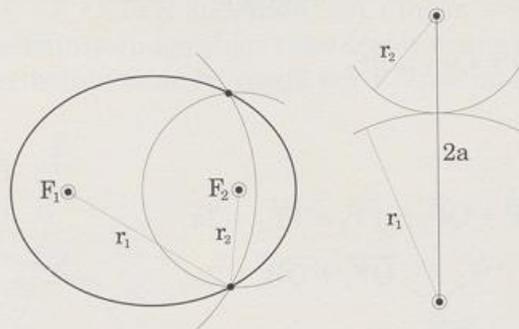


Die Gärtner-Konstruktion der Ellipse

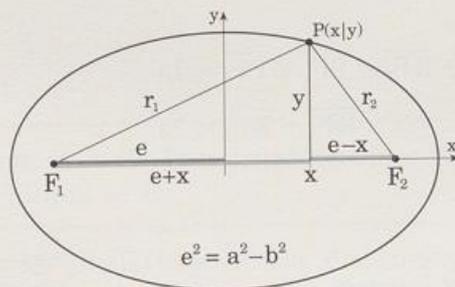
Die Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ erlaubt ein einfaches mechanisches Verfahren zum Erzeugen von Ellipsen. In den Brennpunkten befestigt man zwei Pflöcke und an ihnen eine Schnur der Länge $2a$. Ein Stift, der so geführt wird, dass die Schnur gespannt ist, beschreibt eine Ellipse. Der Name dieser Konstruktion geht zurück auf die Art, mit der Gärtner im Barock die Ränder der damals so beliebten elliptischen Blumenbeete markiert haben.



Die Ellipseeigenschaft, die der Gärtner-Konstruktion zugrunde liegt, führt auch zu einer Konstruktion einzelner Ellipsenpunkte: Man zeichnet um die Brennpunkte Kreise, deren Radien zusammen $2a$ ergeben; die Schnittpunkte sind Ellipsenpunkte.



Herleitung der Ellipsen-Gleichung aus der Beziehung $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$



$$r_1^2 = y^2 + (e + x)^2$$

$$r_2^2 = y^2 + (e - x)^2$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1 = 2a - r_2 \quad \parallel \text{quadrieren}$$

$$r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2$$

$$\cancel{y^2}(e + x)^2 = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{y^2} + (e - x)^2$$

$$\cancel{e^2} + 2ex + \cancel{x^2} = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{e^2} - 2ex + \cancel{x^2}$$

$$ar_2 = a^2 - ex \quad \parallel \text{quadrieren}$$

$$a^2 [y^2 + (e - x)^2] = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2y^2 + a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2y^2 + a^2x^2 - e^2x^2 = a^4 - a^2e^2$$

$$a^2y^2 + x^2 \underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2} = a^2 \underbrace{(a^2 - e^2)}_{b^2}$$

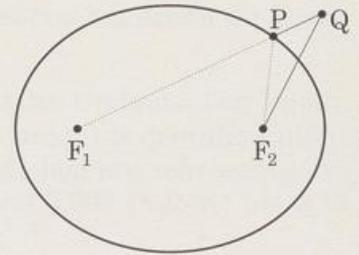
$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2 \quad \parallel : (a^2b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ein Punkt P liegt also genau dann auf der Ellipse, wenn die Summe der beiden Brenn-
strecken r_1 und r_2 gleich der Hauptachse $2a$ ist. Für einen Punkt Q, der außerhalb der El-
lipse liegt, ist die Summe der Brennstrecken größer als $2a$; für einen Punkt R, der inner-
halb liegt, ist sie kleiner als $2a$. Zur Begründung verwenden wir die Dreieck-Ungleichung.

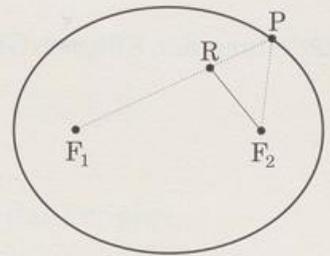
Im Dreieck QPF_2 gilt: $\overline{PQ} + \overline{QF_2} > \overline{PF_2}$

$$\begin{aligned} \overline{QF_1} + \overline{QF_2} &= \overline{PF_1} + \overline{QP} + \overline{QF_2} > \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \\ \overline{QF_1} + \overline{QF_2} &> 2a \end{aligned}$$



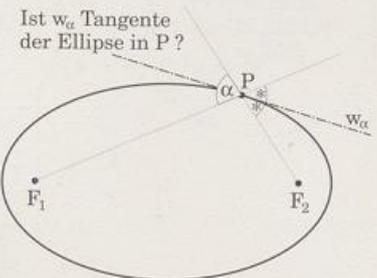
Im Dreieck RPF_2 gilt: $\overline{RP} + \overline{PF_2} > \overline{RF_2}$

$$\begin{aligned} \overline{RF_1} + \overline{RF_2} &< \overline{RF_1} + \overline{RP} + \overline{RF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \\ \overline{RF_1} + \overline{RF_2} &< 2a \end{aligned}$$

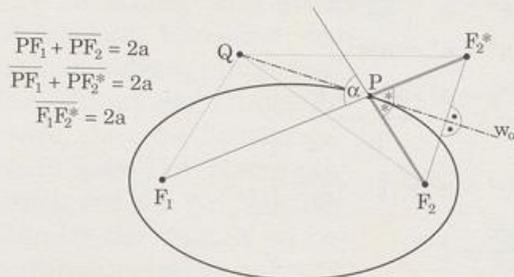


* Brennpunkt und Tangente

oder: Wie der Brennpunkt zu seinem Namen kommt.



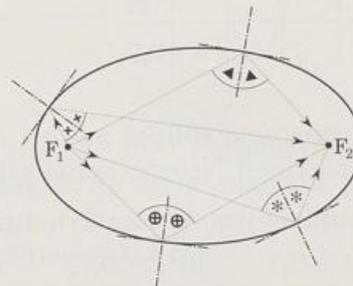
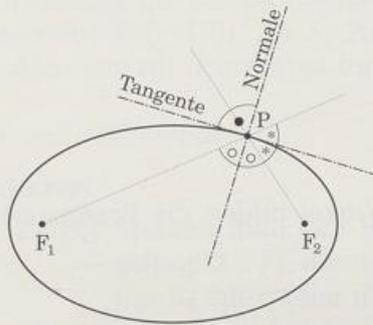
Das Bild zeigt einen Ellipsenpunkt P und eine Winkelhalbierende w_α der Brennstrahlen $[F_1P]$ und $[F_2P]$. Dem Augenschein nach ist w_α Tangente der Ellipse in P. Aber nicht nur dem Augenschein nach! Mit einem kleinen Trick lässt sich das beweisen: Man spiegelt einen der beiden Brennpunkte an w_α (Spiegelpunkt F_2^*). Wegen Achsensymmetrie ist $\overline{PF_2} = \overline{PF_2^*}$.



Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt dann (Dreieck-Ungleichung!):

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2^*} > \overline{F_1F_2^*} = 2a$$

Also gilt $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a \Rightarrow Q$ liegt außerhalb der Ellipse $\Rightarrow w_\alpha$ ist Tangente im Punkt P. Weil die beiden Winkelhalbierenden einer Geradenkreuzung aufeinander senkrecht stehen, ist die andere Winkelhalbierende Normale der Ellipse im Punkt P.

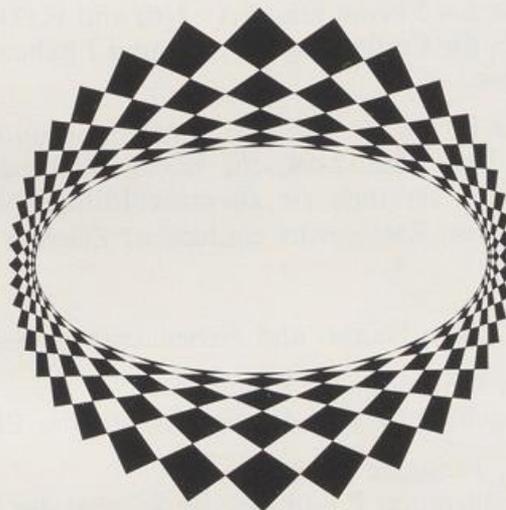


Damit haben wir den **Satz**:

Die beiden Winkelhalbierenden der Brennstrahlen eines Ellipsenpunkts P sind Tangente und Normale der Ellipse in P.

Wir haben so eine einfache Möglichkeit gefunden, die Tangenten in einem beliebigen Ellipsenpunkt zu konstruieren: Man halbiert den Winkel der Brennstrahlen, durch den die Ellipse geht.

Nach dem Reflexionsgesetz der Physik sind Einfallswinkel und Ausfallswinkel gleich groß. Alle von einem Brennpunkt ausgehenden (Licht-)Strahlen werden an der Ellipse so reflektiert, dass sie sich im andern Brennpunkt treffen. Weil die Wege aller Strahlen gleich lang ($= 2a$) sind, treffen sich die reflektierten Strahlen auch alle zum selben Zeitpunkt. (Anwendung dieses Effekts im Kapitel 9. II, 5)



Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Größen

	a	b	e	ε
a)	4	2		
b)	4		2	
c)	7			0,5
d)			4	0,8

2. Zeichne eine Ellipse mit $e = b = 4$. Welchen Winkel bilden die Brennstrahlen, die durch einen Nebenscheitel gehen?
3. Bestimme das Achsenverhältnis b/a bei Ellipsen mit
 a) $\varepsilon = 0,5$ b) $\varepsilon = 0,75$ c) $\varepsilon = 0,9$ d) $\varepsilon = 0,95$ e) $\varepsilon = 0,99$
4. Zeichne (mit Hilfe der Scheitelkrümmungs-Kreise) die Ellipse E_1 mit den Halbachsen $a = 4$ und $b = 3,5$ sowie die beiden Brennpunkte. Zeichne dann die Ellipse E_2 mit der gleichen linearen Exzentrizität wie E_1 , deren große Halbachse die Länge 2,5 hat. Berechne für beide Ellipsen die numerische Exzentrizität.
5. Zeichne (mit Hilfe der Scheitelkrümmungs-Kreise) die Ellipse E_1 mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 1,5$ sowie die beiden Brennpunkte. Zeichne dann die Ellipse E_2 mit der gleichen numerischen Exzentrizität wie E_1 , deren große Halbachse die Länge 4 hat. Berechne für beide Ellipsen die lineare Exzentrizität.
6. Der Komet Halley läuft auf einer Ellipsenbahn um die Sonne. Ein Umlauf dauert etwa 76 Jahre. Seine kleinste Entfernung bis zur Sonne ist $87,8 \cdot 10^6$ km, seine größte $5232,5 \cdot 10^6$ km. Berechne die Werte a , b , e und ε seiner Ellipsenbahn.
7. Berechne allgemein a , b , e und ε aus r_{\min} und r_{\max} einer Planetenbahn.
8. Von einer Ellipse mit $a = 5$ kennt man $F_1(-3|0)$ und $F_2(3|0)$. Konstruiere die Ellipsenpunkte, die von F_1 die Entfernungen 3, 5, 6 und 7 haben und zeichne damit näherungsweise die Ellipse.
9. Zeichne zwei Punkte F_1 und F_2 mit 8 cm Entfernung und um jeden dieser Punkte Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, ..., 10 cm. Suche alle Schnittpunkte P mit $PF_1 + PF_2 = 12$ cm und verbinde sie zu einer Ellipse. Welche weiteren Ellipsen ($a = ?$) kannst du in dem Kreisgewirr entdecken? Zeichne sie!

Ellipsentangenten

Wenn nichts vermerkt ist, liegen Haupt- und Nebenachse in den Koordinatenachsen.

10. Gegeben: $F_1(-4|0)$, Ellipsenpunkt $P(3|-2,5)$
 Konstruiere die Tangente in P und die vier Scheitel der Ellipse.
11. Gegeben: $F_1(-3|0)$, Tangente $y = 0,5x + 4$
 Konstruiere den Berührungspunkt P und die vier Scheitel der Ellipse.

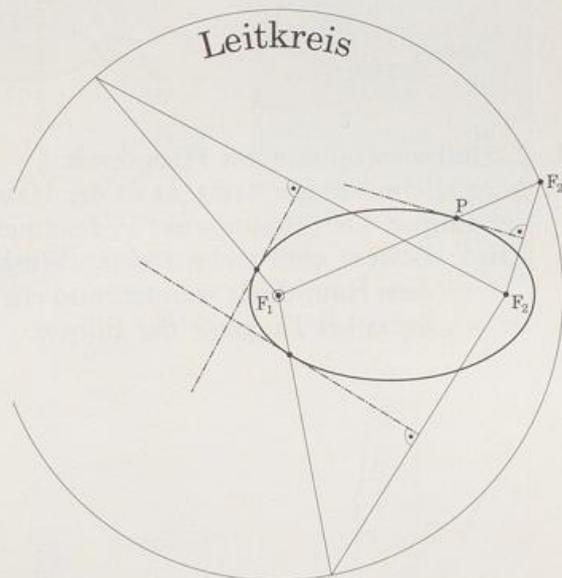
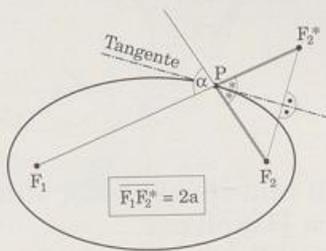
12. Gegeben: Halbachse $a = 5$, Tangente $y = -0,5x + 4$
Konstruiere die Brennpunkte und die Nebenscheitel der Ellipse.
13. Gegeben: $F_2(4|0)$, $a = 5$, Tangente $y = -\frac{1}{3}x + 3,5$ mit Berührungspunkt $P(3|2,5)$
Konstruiere den zweiten Brennpunkt und die vier Scheitel der Ellipse. (Die Ellipse liegt nicht symmetrisch zum Koordinatensystem!)
14. Gegeben: $F_1(-4|0)$, $a = 5$, Tangentensteigung $m = -0,5$
Konstruiere die Tangenten und die Berührungspunkte.
15. Gegeben: $F_1(-4|0)$, $a = 5$, Punkt $Q(1|4)$ außerhalb der Ellipse
Konstruiere die Tangenten durch Q .

Leitkreis und Hüllgeraden

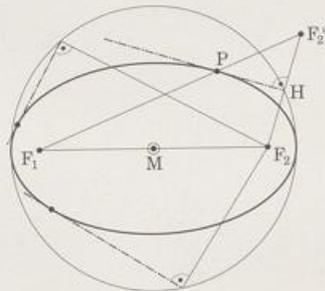
• 16. Leitkreis

- a) Zeige: Spiegelt man den Brennpunkt F_2 an irgendeiner Ellipsentangente (Spiegelpunkt F_2^*), dann liegen alle so erzeugten Spiegelpunkte auf dem Kreis um F_1 mit Radius $2a$.

Dieser Kreis heißt **Leitkreis der Ellipse zum Brennpunkt F_1** .



- b) Zeige: Der Mittelpunkt H der Strecke $[F_2F_2^*]$ liegt auf dem Hauptkreis mit Radius a (siehe Aufgabe a)).

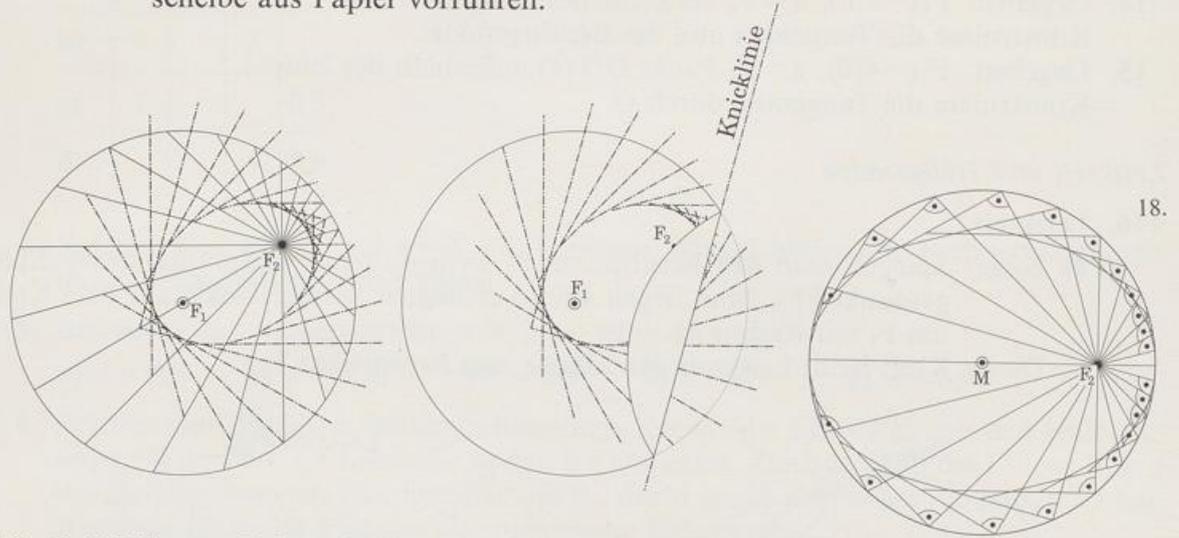


• 17. 1. Hüllkonstruktion mit Leitkreis

Man zeichnet einen Kreis; er ist der Leitkreis, sein Mittelpunkt F_1 ist ein Brennpunkt der Ellipse. Den andern Brennpunkt F_2 zeichnet man in den Leitkreis.

Zeige: Verbindet man F_2 mit irgendeinem Kreispunkt L , dann ist die Mittelsenkrechte von $[F_2L]$ Tangente der Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 .

Diese Konstruktion lässt sich auch eindrucksvoll durch Falten einer Kreisscheibe aus Papier vorführen.



• 18. 2. Hüllkonstruktion mit Hauptkreis

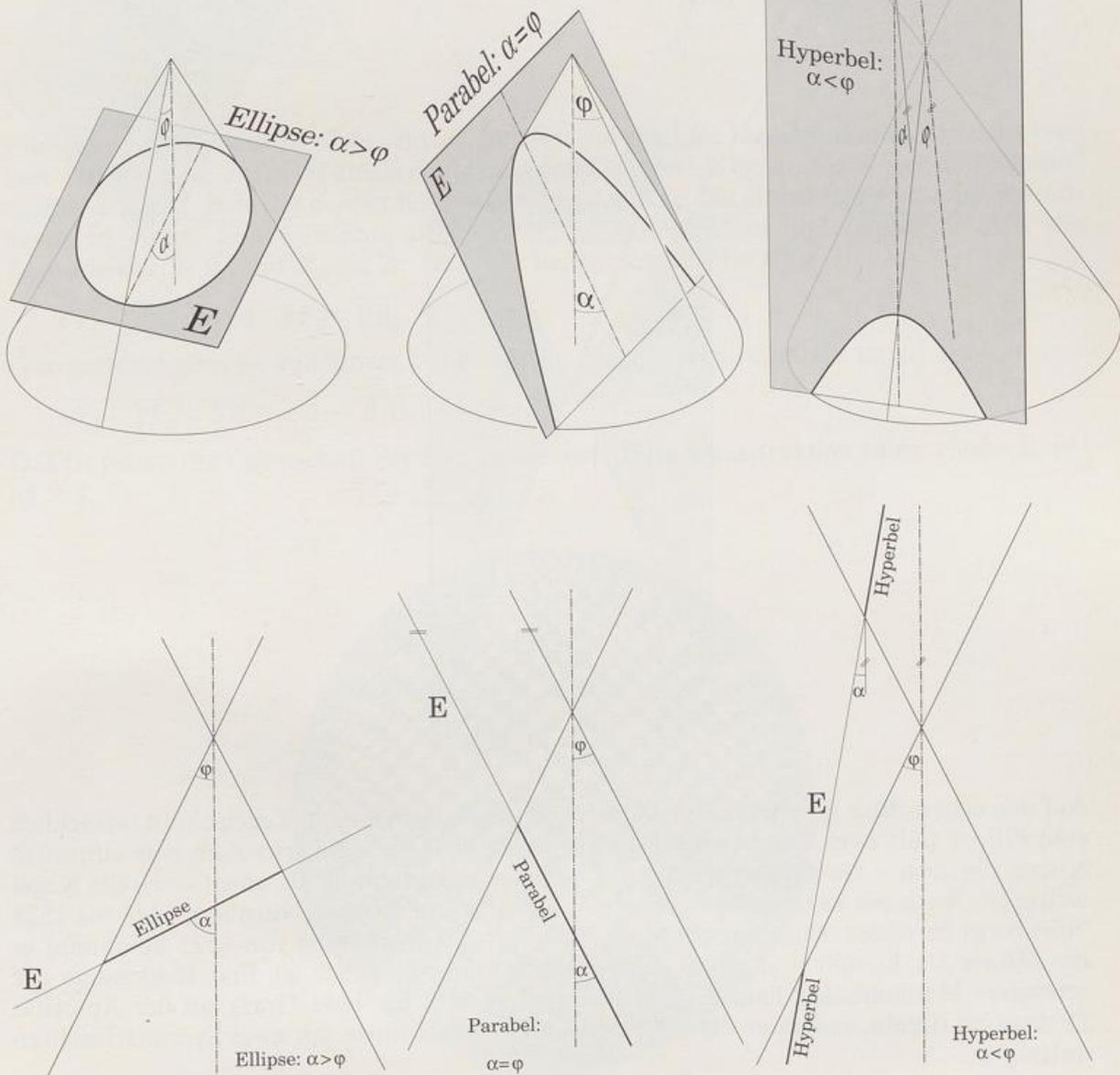
Man zeichnet einen Kreis; er ist der Hauptkreis, sein Mittelpunkt M ist Mittelpunkt der Ellipse. Den Brennpunkt F_2 zeichnet man in den Hauptkreis.

Zeige: Bewegt man einen rechten Winkel (Geodreieck!) so, dass sein Scheitel auf dem Hauptkreis wandert und ein Schenkel durch F_2 geht, dann ist der andere Schenkel Tangente der Ellipse.

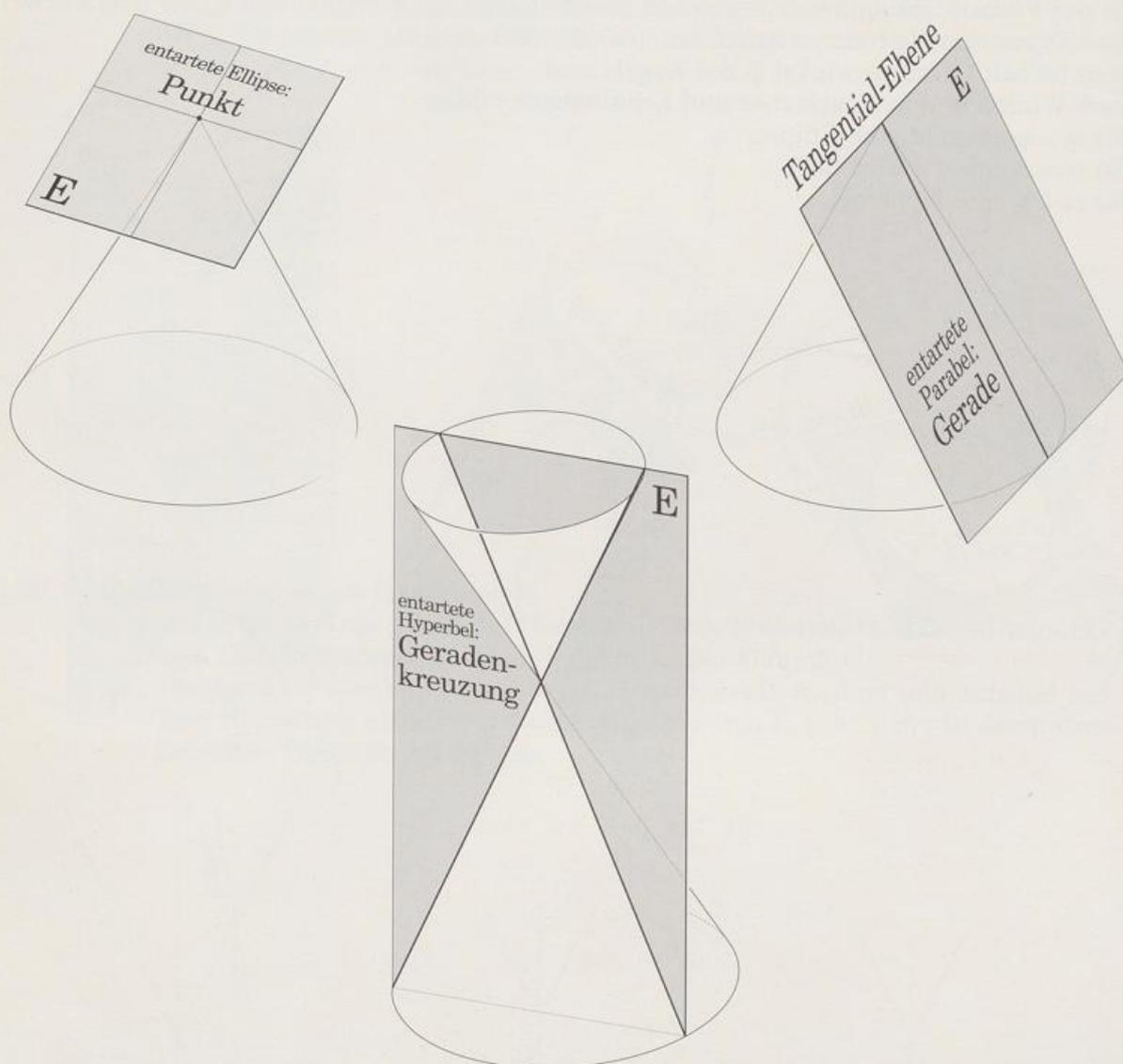
II. Kegelschnitte

1. Überblick

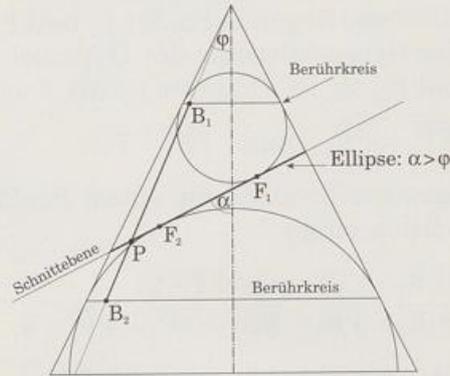
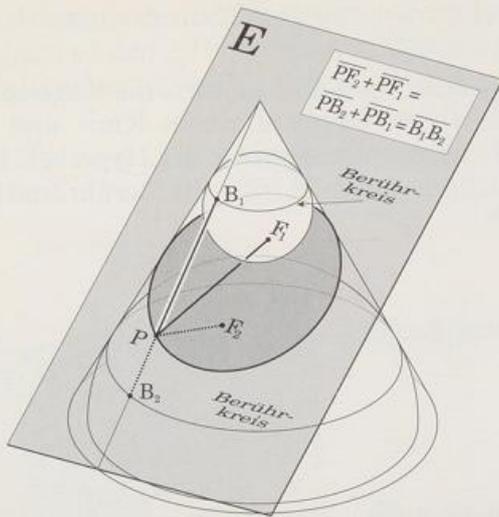
In der Vorbemerkung haben wir schon erwähnt, dass beim Schnitt von Kegel und Ebene drei Typen von Kurven entstehen können. Welcher entsteht, hängt ab vom halben Öffnungswinkel φ des Kegels und vom Winkel α , den Kegelachse und Schnittebene bilden:
für $\alpha > \varphi$ entsteht eine Ellipse,
für $\alpha = \varphi$ eine Parabel und
für $\alpha < \varphi$ eine Hyperbel.



Wenn die Schnittebene die Kegelspitze enthält, dann entarten die Schnittkurven:
 die Ellipse zu einem Punkt (Kegelspitze),
 die Parabel zu einer Gerade (Mantellinie) und
 die Hyperbel zu einer Geradenkreuzung (zwei Mantellinien).



Auf den ersten Blick glaubt man nicht recht, dass der geschlossene Kegelschnitt tatsächlich eine Ellipse (mit zwei Symmetrieachsen also) sein soll. Eher erwartet man eine eiförmige Kurve, die oben – wo der Kegel enger ist – stärker gekrümmt ist als unten – wo der Kegel weiter ist. Auch ein so scharfer Beobachter wie Albrecht DÜRER (Nürnberg 1471 bis 1528 Nürnberg) ist dieser Täuschung erlegen. In seiner *Underweysung* von 1525 beschreibt er die Ellipse als *Eierlini* = *darumb daß sie schier einem Ei gleich ist*. Erst 1640 wagte der schweizer Mathematiker Paul GULDIN (St. Gallen 1577 bis 1643 Graz), an der Autorität DÜRERS zu rütteln, indem er die wirkliche Gestalt der Ellipse mit zwei Symmetrieachsen aufzeigte.



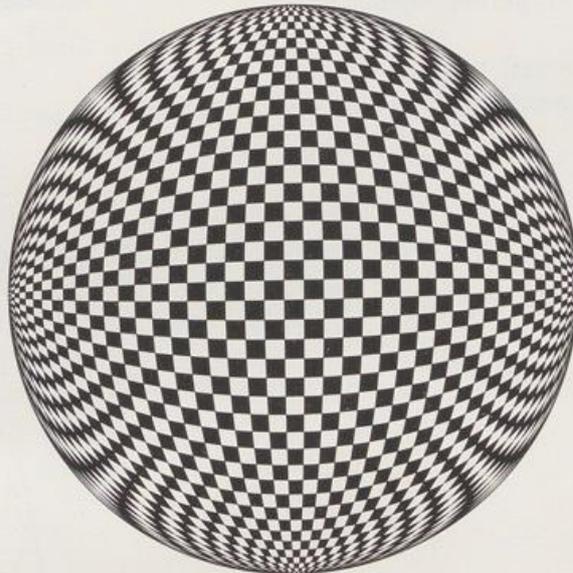
Für uns ist der Nachweis nicht schwer, weil wir auf die Idee Dandelin zurückgreifen können. Analog zum Zylinder stecken wir in den Kegel zwei Kugeln, die Kegel und Schnitt-ebene berühren. Jede der beiden Kugeln berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnitt-ebene in einem Punkt (Brennpunkte F_1 und F_2). Die Mantellinie durch P trifft die Berührkreise in B_1 und B_2 , sie ist Tangente beider Kugeln. Es gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PB_2}$$

(Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an eine Kugel sind gleich lang.)

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2} (= \text{const.})$$

Das ist genau die Eigenschaft der Ellipse, die zur Gärtnerkonstruktion führt. (Siehe Kapitel 9. I, 3)



2. Die Hyperbel

Wieder stecken wir in den Kegel zwei Dandelin-Kugeln, jetzt aber so, dass die Kegelspitze dazwischen liegt. Jede der beiden Kugeln berührt den Kegel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt: F_1 und F_2 . F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte der Hyperbel**. F_1F_2 ist eine **Symmetrieachse** der Hyperbel. Die Mantellinie durch P trifft die Berührkreise in B_1 und B_2 , sie ist Tangente beider Kugeln. Es gilt

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PB_2}$$

(Tangentenabschnitte von einem Punkt aus an eine Kugel sind gleich lang.)

$$\begin{aligned} \overline{B_1B_2} & \text{ ist konstant } (=k) \\ \overline{B_1B_2} = \overline{PB_2} - \overline{PB_1} &= \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Die Hyperbel besteht aus zwei Teilen, man nennt sie auch **Äste** der Hyperbel. Liegt P auf dem bei F_2 liegenden Ast, dann ergibt eine entsprechende Überlegung

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k \quad \textcircled{2}$$

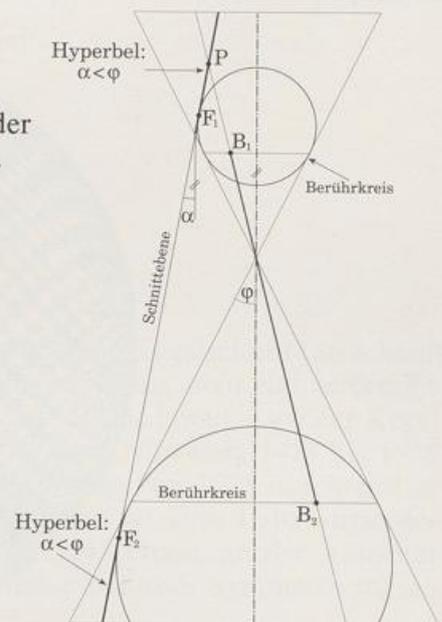
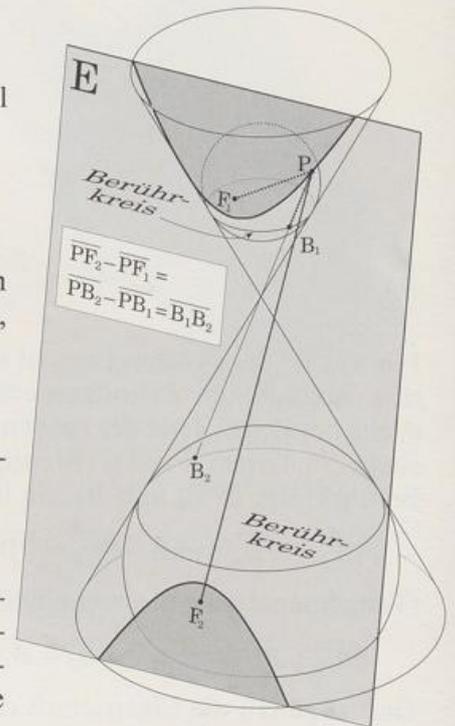
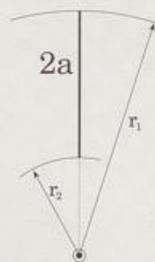
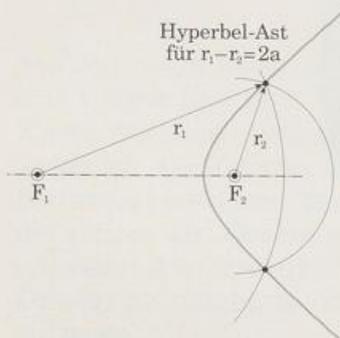
Die Gleichungen ① und ② lassen sich zur kennzeichnenden Eigenschaft der Hyperbel zusammenfassen:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k.$$

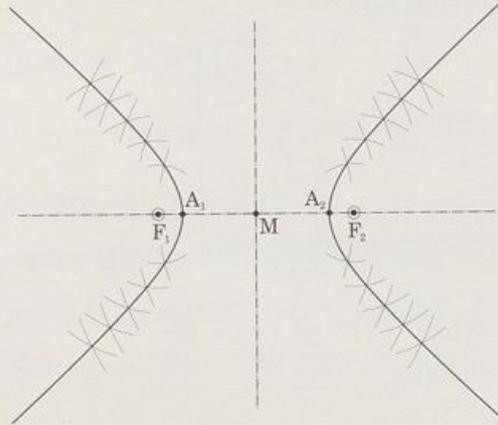
Für jeden Hyperbelpunkt P ist der Betrag der Differenz seiner Entfernungen von F_1 und F_2 eine Konstante. Diese Definition unterscheidet sich von der der Ellipse nur im Rechenzeichen! Wie bei der Ellipse bezeichnet man die Konstante k mit $2a$

$$\boxed{|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a} \quad \text{Hyperbel-Eigenschaft}$$

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir jetzt Punkte der Hyperbel konstruieren, wenn F_1 , F_2 und a bekannt sind.



Der Betrag in der Bedingung $|r_1 - r_2| = 2a$ erlaubt eine Vertauschung von r_1 und r_2 und ermöglicht so den 2. Hyperbel-Ast. Dieser ist symmetrisch zum 1. Ast, Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte von F_1 und F_2 .



Bezeichnungen

Das Symmetriezentrum M heißt **Mittelpunkt** der Hyperbel. Die Schnittpunkte A_1, A_2 von Hyperbel und einer Symmetrieachse heißen **Scheitel**. Dabei gilt

$$\overline{A_1 F_2} - \overline{A_1 F_1} = 2a \quad \text{oder wegen} \quad \overline{A_1 F_1} = \overline{A_2 F_2}$$

$$\overline{A_1 F_2} - \overline{A_2 F_2} = 2a$$

$$\overbrace{A_1 A_2} = 2a$$

$$\overline{A_1 M} - \overline{M A_2} = a, \quad a \text{ heißt } \mathbf{reelle\ Halbchse}.$$

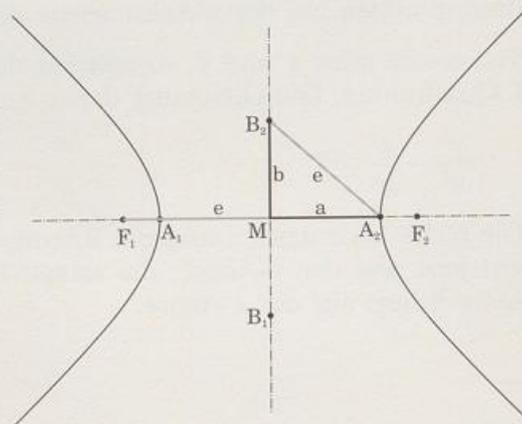
$$\overline{F_1 M} = \overline{F_2 M} = e, \quad e \text{ heißt } \mathbf{lineare\ Exzentrizität}.$$

$$\frac{a}{b} = \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ heißt } \mathbf{numerische\ Exzentrizität}.$$

Ähnlich wie bei der Ellipse definiert man eine zweite Halbchse b durch

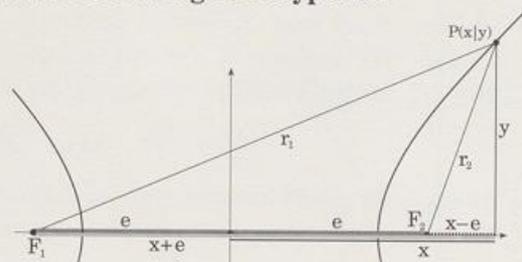
$$b^2 = e^2 - a^2$$

Trägt man b von M aus auf der 2. Symmetrieachse ab, so ergeben sich zwei Punkte B_1 und B_2 , die aber nicht auf der Hyperbel liegen. Deshalb nennt man b **imaginäre Halbchse**. Im Gegensatz zur Ellipse muss hier a nicht größer sein als b .



Ähnlich wie bei der Ellipse lassen sich auch die Punkte der Hyperbel mit einer Gleichung festlegen. Wir verwenden dafür nur die Beziehung $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$.

Die Mittelpunkt-Gleichung der Hyperbel



$$r_1^2 = y^2 + (x + e)^2 \quad e^2 = a^2 + b^2 \quad r_2^2 = y^2 + (x - e)^2$$

$$|r_1 + r_2| = 2a$$

$$r_1 = \pm 2a - r_2 \quad \parallel \text{quadrieren}$$

$$r_1^2 = 4a^2 \pm 4ar_2 + r_2^2$$

$$y^2(x + e)^2 = 4a^2 \pm 4ar_2 + y^2 + (x - e)^2$$

$$x^2 + 2xe + e^2 = 4a^2 \pm 4ar_2 + x^2 - 2xe + e^2$$

$$xe - a^2 = \pm ar_2 \quad \parallel \text{quadrieren}$$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2[y^2 + (x - e)^2]$$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2$$

$$x^2 \underbrace{(e^2 - a^2)}_{b^2} - y^2 a^2 = a^2 \underbrace{(e^2 - a^2)}_{b^2}$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \parallel : (a^2b^2)$$

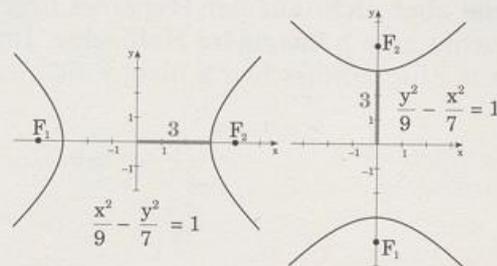
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Das ist die Mittelpunkt-Gleichung der Hyperbel mit der reellen Halbachse a und den Brennpunkten auf der x -Achse sowie der imaginären Halbachse b auf der y -Achse.

Vertauscht man x und y , so spiegelt man die Hyperbel an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Die Gleichung der so gespiegelten Hyperbel ist

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Die reelle Halbachse a und die Brennpunkte liegen jetzt auf der y -Achse, die imaginäre Halbachse b liegt auf der x -Achse.



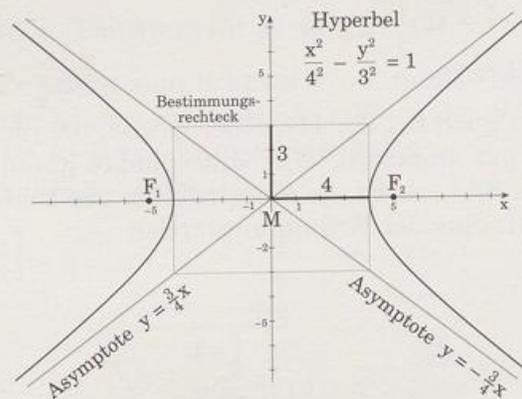
Die Asymptoten der Hyperbel

Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ lässt sich umformen zu $|y| = \frac{b}{a} |x| \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Speziell im

I. Quadranten ($x > 0, y > 0$) ergibt sich $y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$.

Für sehr große Werte von x ist $\frac{a^2}{x^2}$ fast null, das heißt, die Hyperbel unterscheidet sich fast nicht mehr von der Gerade mit der Gleichung $y = \frac{b}{a} x$. Aus Symmetriegründen gilt das Entsprechende in den anderen Quadranten. Die beiden Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{b}{a} x$ und $y = -\frac{b}{a} x$ heißen **Asymptoten** der Hyperbel. Es gilt: Für große $|x|$ -Werte (also auch für große $|y|$ -Werte) unterscheidet sich die Hyperbel kaum noch von ihren Asymptoten.

Wegen $\frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{b}{a} x$ (für $x > 0$) verläuft die Hyperbel im I. Quadranten immer unterhalb ihrer Asymptote. In größerer Entfernung von den Scheiteln geben die Asymptoten den Verlauf der Hyperbel im Groben wieder. Man zeichnet die Asymptoten als Verlängerungen der Diagonalen des *Bestimmungsrechtecks* mit Mittelpunkt M und den Seiten $2a$ und $2b$.



$$\text{Hyperbel: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Asymptoten: } y = \pm \frac{b}{a} x$$

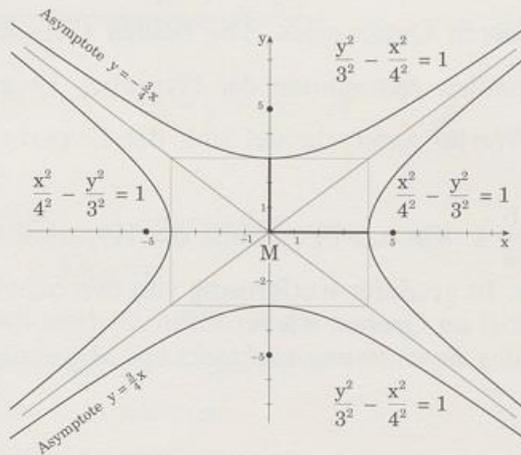
Zu einem Bestimmungs-dreieck gibt es zwei Hyperbeln mit denselben Asymptoten.

Die eine hat die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ihre reelle Halbachse ist a , ihre Brennpunkte liegen auf der x -Achse.

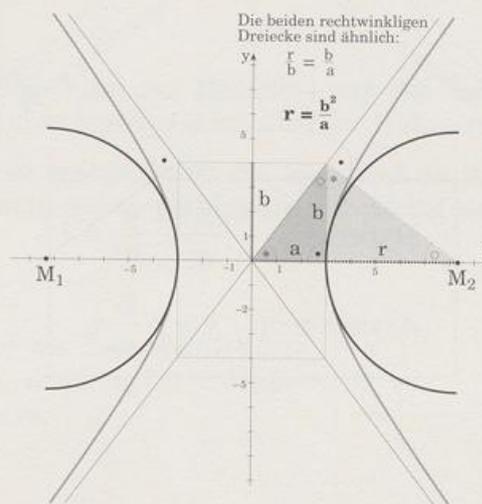
Die andre hat die Gleichung $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

ihre reelle Halbachse ist b , ihre Brennpunkte liegen auf der y -Achse.

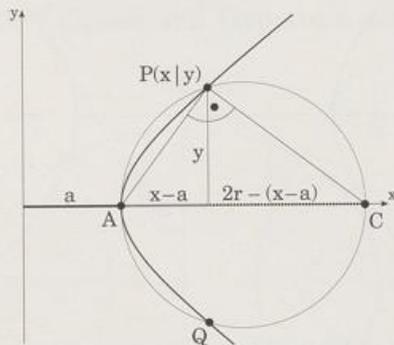


* Die Scheitel-Krümmungskreise

Wie bei der Ellipse gibt es auch bei der Hyperbel Kreise, die die Hyperbel in der Umgebung ihrer Scheitel recht gut annähern. Die Mittelpunkte liegen aus Symmetriegründen auf der reellen Achse. Das Bild erklärt die Konstruktion des Mittelpunkts und die Herleitung der Formel für den Radius der Krümmungskreise.



Die mathematische Begründung ist ähnlich wie bei der Ellipse.
 Ein Kreis mit Mittelpunkt auf der x-Achse, der durch einen Hyperbelscheitel geht, schneidet die Hyperbel im Allgemeinen in zwei weiteren Punkten P und Q.



Für die Koordinaten von P und Q gelten zwei Gleichungen:

I. $y^2 = (x - a)(2r - x + a)$ (Höhensatz im Dreieck ACP)

II. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ (Hyperbelgleichung)

Gleichsetzen liefert: $(x - a)(2r - x + a) = \frac{b^2}{a^2}(x - a)(x + a)$

das ergibt eine quadratische Gleichung für x: $(x - a) \left[(2r - x + a) - \frac{b^2}{a^2}(x + a) \right] = 0$.

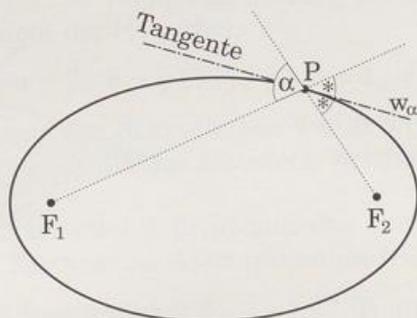
Eine Lösung ist $x_1 = a$, sie gehört zum Scheitel. r soll nun so bestimmt werden, dass auch die 2. Lösung x_2 , für die die Klammer [...] gleich null ist, den Wert a hat. Geometrisch bedeutet das, dass die Punkte A, P und Q zusammenfallen.

Setzen wir in [...] a für x ein, so ergibt sich für r

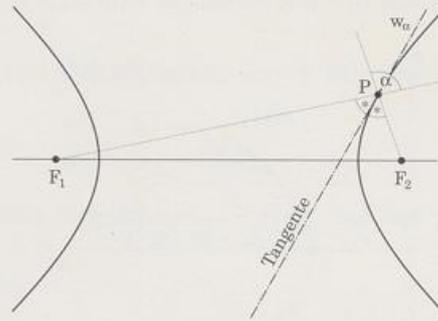
$$\left[(2r - a + a) - \frac{b^2}{a^2}(a + a) \right] = 0 \Rightarrow 2r = 2 \frac{b^2}{a} \Rightarrow r = \frac{b^2}{a}$$

*Tangenten der Hyperbel

Bei der Ellipse ist die Winkelhalbierende des Außenwinkels bei P im Dreieck F₁F₂P Tangente im Punkt P.



Ähnliches gilt bei der Hyperbel: Die Halbierende des Innenwinkels bei P im Dreieck F_1F_2P ist Tangente im Punkt P.

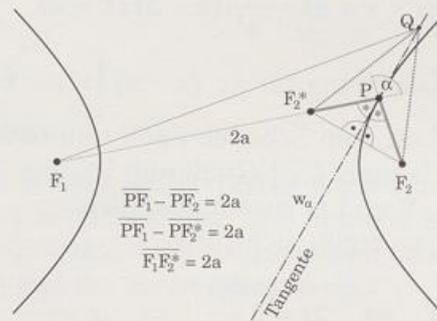


Zum Beweis spiegelt man einen der beiden Brennpunkte an der Winkelhalbierenden w_α (Spiegelpunkt F_2^*). Wegen Achsensymmetrie ist $\overline{PF_2} = \overline{PF_2^*}$.

Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt dann (Dreieck-Ungleichung!):

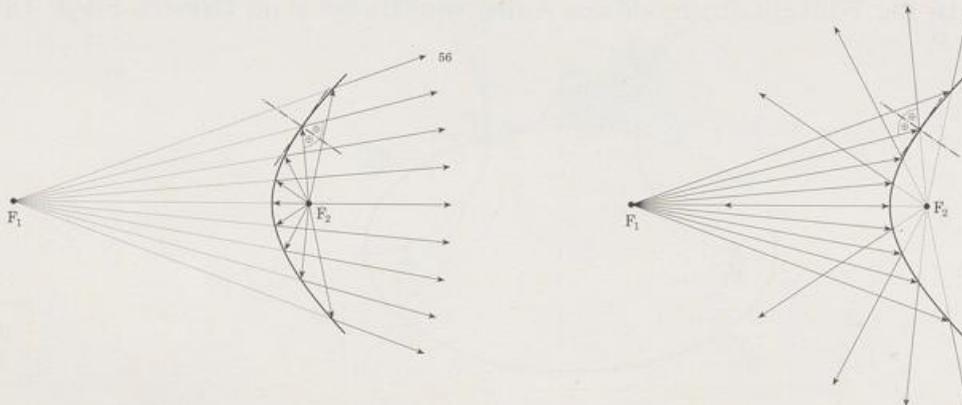
$$\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{QF_1} - \overline{QF_2^*} < \overline{QF_2^*} + \overline{F_1F_2^*} - \overline{QF_2^*} = \overline{F_1F_2^*} = 2a$$

Also gilt $\overline{QF_1} - \overline{QF_2} < 2a \Rightarrow Q$ liegt nicht auf der Hyperbel $\Rightarrow w_\alpha$ ist Tangente im Punkt P.

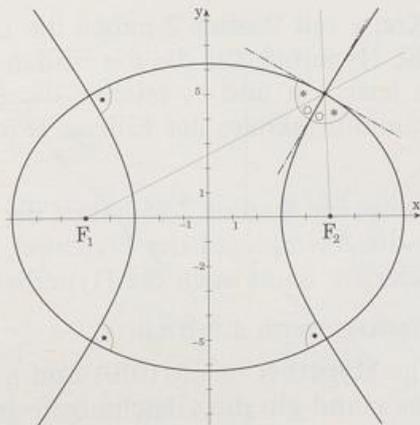


Folgerungen

- a) Licht, das von einem Brennpunkt ausgeht, wird an der Hyperbel so reflektiert, als ob es vom andern Brennpunkt käme.



- b) Zeichnet man zu zwei gegebenen Brennpunkten eine zugehörige Ellipse und Hyperbel, so schneiden sich diese in vier Punkten. In jedem Schnittpunkt sind die Tangenten von Hyperbel beziehungsweise Ellipse die Winkelhalbierenden des Innen-, beziehungsweise Außenwinkels der Brennstrahlen, das heißt, sie stehen aufeinander senkrecht. Man sagt auch: Konfokale Ellipsen und Hyperbeln schneiden sich rechtwinklig.

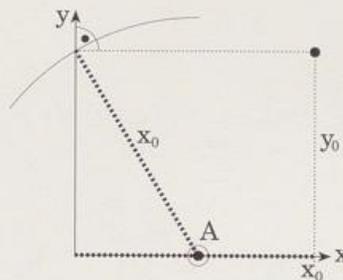


Hyperbel-Aufgaben

Bis auf Aufgabe 12. liegen alle erwähnten Hyperbeln symmetrisch zum Ursprung und haben die Brennpunkte auf der x-Achse.

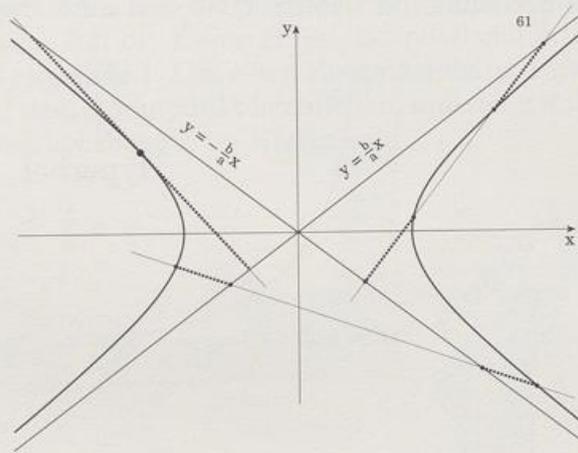
1. Zeichne die zwei Hyperbeln mit $a = 2, b = 1$ und $a = 4, b = 3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem und berechne die Schnittpunkte.
2. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel h mit $A_2(4|0)$ durch $P(5|3)$?
3. Bestimme die Gleichung der Hyperbel; zeichne die Scheitel, die Brennpunkte und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.
 a) $a = 3, b = 4$ b) $a = 2, e = \sqrt{13}$ c) $b = 1, e = \sqrt{2}$
4. Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 6 (waagrecht). Skizziere die Hyperbeln, für die das Rechteck Bestimmungsrechteck ist.
5. Eine Hyperbel hat den Scheitel $A_2(2|0)$ und den Brennpunkt $F_2(2\sqrt{2}|0)$. Bestimme a, b und e . Zeichne die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.
6. Eine Hyperbel hat die Brennpunkte $F_{2,1}(\pm 3,75|0)$ und geht durch $P(5|3)$. Konstruiere die Scheitel, die Asymptoten und skizziere die Hyperbel.

7. Eine Hyperbel hat die Asymptoten $y = \pm 2,4x$ und einen Scheitel $A_1(-2,5|0)$. Bestimme a , b und e . Skizziere die Hyperbel.
8. Die Gerade durch $P(1|0)$ und $Q(-2|-3)$ berührt eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_{2,1}(\pm 3|0)$. Konstruiere den Berührungspunkt B , die Scheitel und die Asymptoten; skizziere die Hyperbel.
9. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2 haben die Entfernung 5. Zeichne die Ellipse und die Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Anleitung: Berechne jeweils a und b , zeichne die Asymptoten der Hyperbel und die anderen beiden Krümmungskreise der Ellipse. (Für die Ellipse: Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat)
10. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit Radius 2,25 haben die Entfernung 12,5. Zeichne die Kreise und *konstruiere* die Asymptoten der Hyperbel, für die die beiden Kreise Krümmungskreise sind. Skizziere dann auch die Hyperbel.
11. Eine Hyperbel heißt **gleichseitig**, wenn $a = b$ gilt.
- Zeichne eine gleichseitige Hyperbel mit $M(0|0)$ und $a = 2$. Berechne e und den Krümmungskreis-Radius r und gib die Gleichungen der Asymptoten an.
 - Begründe folgende Konstruktion für die Punkte $(x_0|y_0)$ einer gleichseitigen Hyperbel.

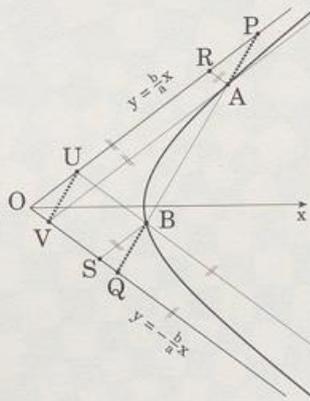


12. Zeichne die Halbachsen und die Lage der Brennpunkte einer Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ (siehe auch Aufgabe 19.).
13. Zeige:
Für den Punkt $P(e|p)$ über dem Brennpunkt von Ellipse (Mittelpunkt $M(0|0)$, Querformat) oder Hyperbel gilt
- $$p = \frac{b^2}{a}$$
- p heißt **Formparameter**. p ist auch der Radius der Krümmungskreise.
14. Gegeben sind die Hyperbel $h: 4x^2 - 9y^2 = 16^2$ und die Gerade $g: y = 2x - 24$.
- Berechne die Schnittpunkte A und B der Gerade und der Hyperbel.
 - Berechne die Schnittpunkte P und Q der Gerade und der Hyperbel-Asymptoten.
 - Berechne den Mittelpunkt M_{AB} von $[AB]$ und M_{PQ} von $[PQ]$. Folgerung?

15. Gegeben sind die Hyperbel $h: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und die Gerade $g: y = mx + t$. A und B seien die Schnittpunkte von g und h , P und Q seien die Schnittpunkte von g und den Hyperbel-Asymptoten. Berechne die x -Werte der Mittelpunkte von $[AB]$ und $[PQ]$ – VIETA erspart viel Rechnerei! – und begründe damit den Satz: Bei jeder Hyperbel-Sekante sind die beiden Abschnitte zwischen Hyperbel und Asymptote gleich lang.



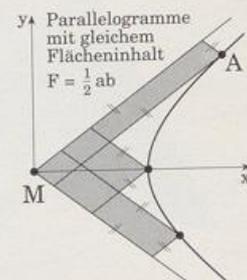
16. A und B seien Punkte der Hyperbel $h: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Zeige mit Hilfe des Satzes der vorigen Aufgabe: Die Parallelogramme OVAR und OSBU sind flächengleich. Folgere dazu zunächst aus dem Satz der vorigen Aufgabe, dass die Strecken $[AB]$, $[BQ]$ und $[UV]$ gleich lang und parallel sind.



17. 1. Flächensatz

Zeige:

Zeichnet man durch einen Hyperbelpunkt A die Parallelen zu den Asymptoten, so entsteht ein Parallelogramm mit den Gegenecken A und M (Mittelpunkt der Hyperbel). Dieses Parallelogramm hat für jeden Hyperbelpunkt den Flächeninhalt $\frac{1}{2} ab$.



18. Umkehrung des 1. Flächensatzes

Zeige:

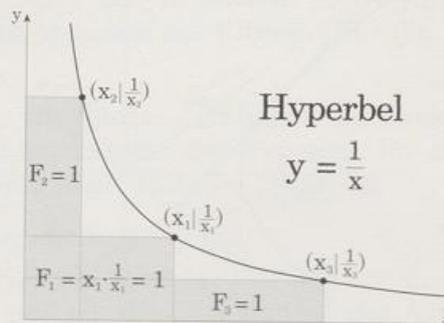
Vom 1. Flächensatz gilt auch die Umkehrung:

Zeichnet man in einen Winkel flächengleiche Parallelogramme, bei denen eine Ecke im Scheitel liegt und die Seiten parallel zu den Schenkeln sind, dann liegen die freien Ecken auf einem Hyperbelast.

19. Zeige: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel. Was sind ihre

Asymptoten?

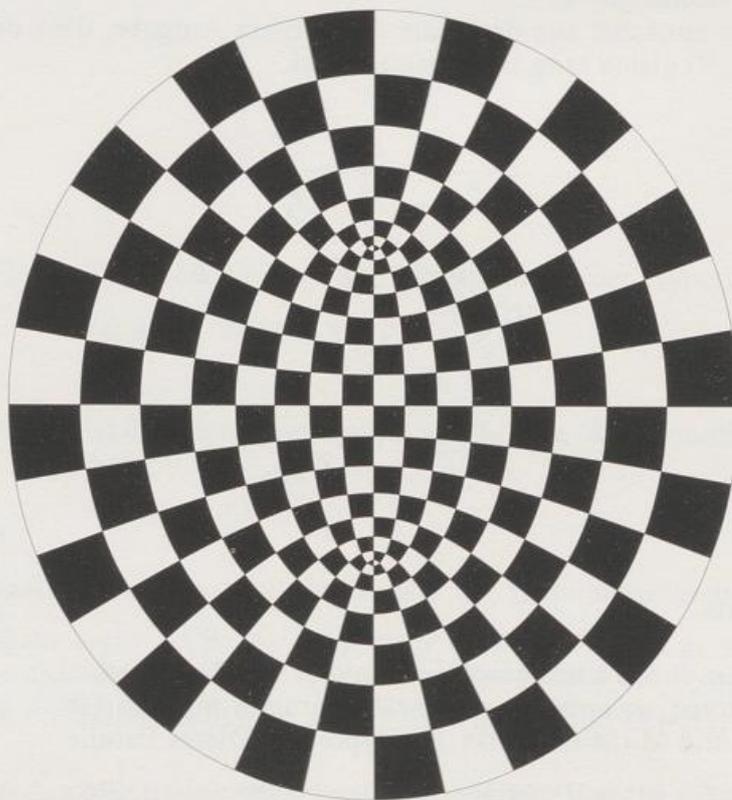
(Tip: 17. und 18.)



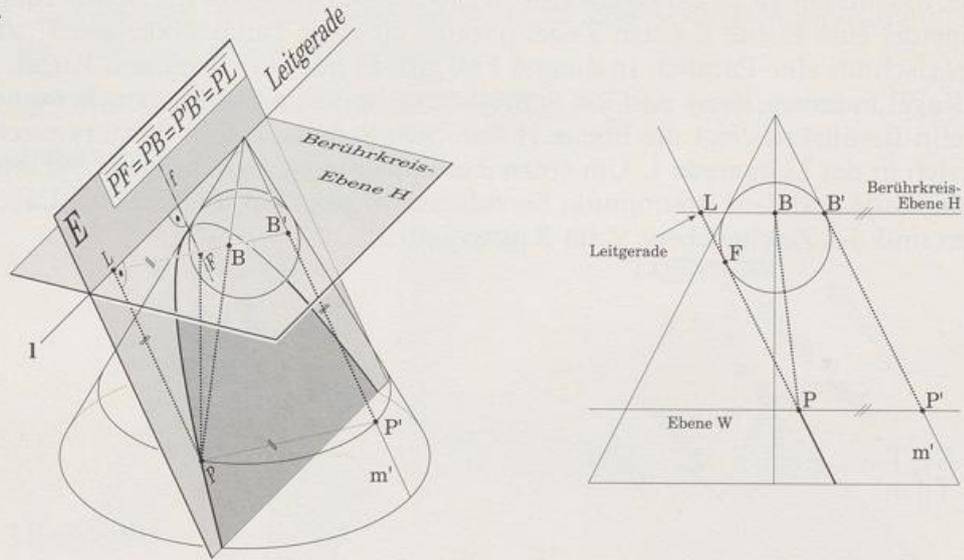
20. 2. Flächensatz

Zeige:

Jede Hyperbel-Tangente und die Asymptoten schließen ein Dreieck vom Flächeninhalt $a \cdot b$ ein.



Die Tangentialebene T berührt den Kegel in der Mantellinie m' .
 m' und die Kegelachse bestimmen die Zeichenebene Z .
 Schnittebene E , Tangentialebene T und Berührkreisebene H stehen senkrecht auf Z ; man sieht E , T und H deshalb als Geraden, wenn man senkrecht auf die Zeichenebene Z schaut.



Weil l die Schnittgerade von H und E ist, steht sie auch senkrecht auf Z ; sie erscheint als Punkt, wenn man senkrecht auf Z schaut.

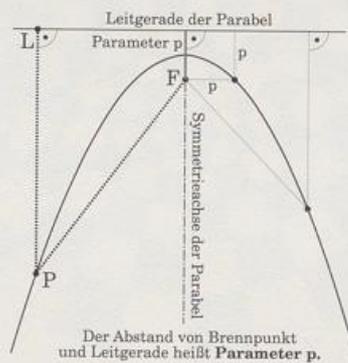
E und Z schneiden sich in der Symmetrieachse f der Parabel; deshalb steht f senkrecht auf der Leitgerade l .

Wir wählen einen beliebigen Parabelpunkt P . Die Mantellinie durch P trifft den Berührkreis in B . Es gilt $\overline{PF} = \overline{PB}$ (gleich lange Tangentenabschnitte). Die Ebene W , die parallel ist zu H und durch P geht, schneidet die Mantellinie m' in B' . Es gilt $\overline{PB} = \overline{P'B'}$.

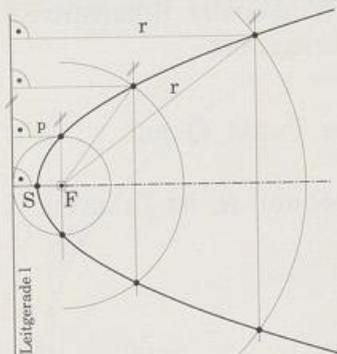
Das Lot von P auf die Leitgerade l erzeugt den Lotfußpunkt L . Es gilt $PL \perp l$ (beide sind Lote auf l) und $f \parallel m'$ (Z schneidet E in f und T in m'), also ist $PL \parallel m'$.

Die Ebenen W und H schneiden aus den Parallelen m' und PL die gleich langen Strecken $[PL]$ und $[P'B']$ aus. Also gilt $\overline{PL} = \overline{P'B'} = \overline{PB} = \overline{PF}$.

Für jeden Parabelpunkt ist die Entfernung vom Brennpunkt so groß wie sein Abstand von der Leitgerade. Anders formuliert: Eine Parabel ist der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernung von einem gegebenen Punkt gleich ist ihrem Abstand von einer gegebenen Gerade.



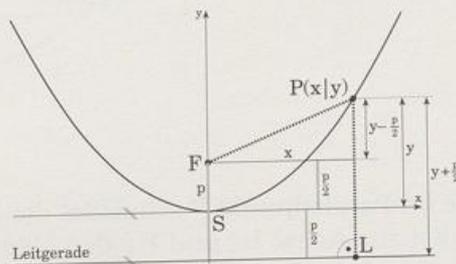
Diese Eigenschaft gibt uns eine einfache Möglichkeit, Parabelpunkte zu konstruieren, wenn die Leitgerade l und der Brennpunkt F gegeben sind: Man schneidet eine Parallele zur Leitgerade im Abstand r mit einem Kreis um F mit Radius r .



S ist derjenige Parabelpunkt, der von der Leitgerade den kleinsten Abstand hat. Er halbiert die Abstandstrecke zwischen F und l und heißt **Scheitel** der Parabel. Scheitel S und Brennpunkt F haben die Entfernung $0,5p$.

Die Scheitelform der Parabel

Im Algebra-Unterricht haben wir die Kurve mit der Gleichung $y = ax^2$ als Parabel kennen gelernt. Wir müssen jetzt zeigen, dass der Kegelschnitt, den wir Parabel genannt haben, auch einer solchen Gleichung genügt. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitel und die y -Achse durch den Brennpunkt. Aus der Eigenschaft $\overline{PF} = \overline{PL}$ leiten wir die Parabelgleichung her.



$$\overline{PF} = \overline{PL}$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2} \quad \parallel \text{quadrieren}$$

$$x^2 + y^2 - yp + \frac{p^2}{4} = y^2 + yp + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 = 2py$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2p} x^2} \quad \text{Scheitelform der Parabel}$$

*Tangenten der Parabel

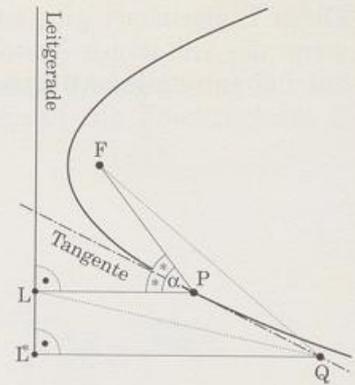
Wie bei Ellipse und Hyperbel ist auch die Parabeltangente die Winkelhalbierende geeigneter Geraden: Im Parabelpunkt P halbiert sie den Winkel der Brennstrecke $[PF]$ und des Lots $[PL]$ auf die Leitgerade.

Beweis

Für jeden von P verschiedenen Punkt Q auf w_α gilt:

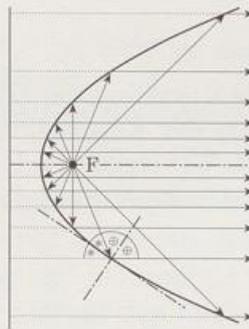
$$\overline{QL^*} < \overline{QL} = \overline{QF}.$$

Also liegt Q nicht auf der Parabel und w_α ist Tangente.

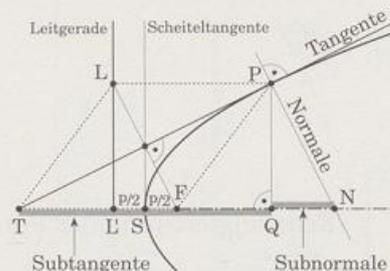


Folgerungen

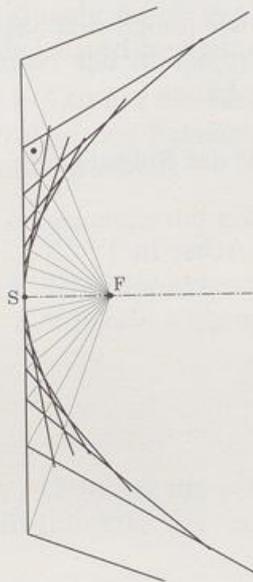
- a) Licht, das vom Brennpunkt ausgeht, wird an der Parabel so reflektiert, dass es die Parabel senkrecht zur Leitgerade, also parallel zur Achse verlässt. (Scheinwerfer)
Umgekehrt: Strahlung, die parallel zur Achse einfällt, wird im Brennpunkt gebündelt. (Parabol-Antenne)



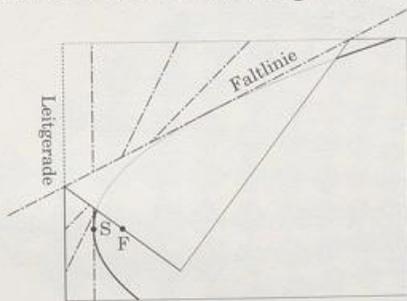
- b) Die Tangente im Parabelpunkt P schneidet die Parabelachse im Punkt T . Weil $\overline{PL} = \overline{PF}$ und PL parallel zur Achse ist und PT den Winkel bei P halbiert, ist $PLTF$ eine Raute. Der Mittelpunkt M der Raute liegt auf der Scheiteltangente, weil diese Mittelparallele im Dreieck FLL' ist.



Auf dieser Eigenschaft beruht die Konstruktion der Parabel als Hüllkurve ihrer Tangentenschar: Man zeichnet die Scheiteltangente und den Brennpunkt. Gleitet der Scheitel eines rechten Winkels auf der Scheiteltangente und geht ein Schenkel durch den Brennpunkt, dann ist der andere Schenkel Tangente der Parabel.



Die Eigenschaft, dass die Parabeltangente den Winkel zwischen Brennweite und Lot auf die Leitgerade halbiert, liegt auch der folgenden Faltkonstruktion zu Grunde: Auf einem Blatt markiert man einen Punkt als Brennpunkt. Faltet man das Blatt so, dass die Kante auf dem Brennpunkt zu liegen kommt, dann ist die Knicklinie eine Parabeltangente.

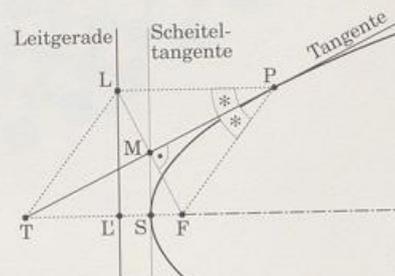


Aus dem Bild mit der Raute liest man auch ab:

$$\overline{TF} = \overline{LP} = \overline{SQ} + \frac{p}{2}$$

$$\overline{TF} = \overline{TS} + \frac{p}{2}$$

also ist $\overline{TS} = \overline{SQ}$, das heißt, S halbiert die **Subtangente** (senkrechte Projektion der Tangentenstrecke [PT] auf die Parabelachse).



Diese Eigenschaft erlaubt eine einfache Konstruktion der Tangente in einem Parabelpunkt: Man projiziert den Berührungspunkt P senkrecht auf die Achse, das ist Q . Q an S gespiegelt ergibt T . PT ist die gesuchte Tangente.

Die **Normale** in P (Lot auf die Tangente) schneidet die Achse in N .

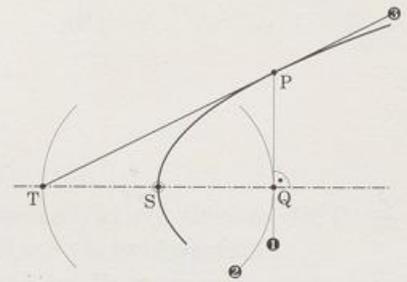
Dann gilt $\overline{TF} = \overline{FN}$, weil LF Mittelparallele im Dreieck TPN ist.

Damit gilt auch $\overline{QN} = \overline{L'F} = p$, und wir haben den Satz:

Die **Subnormale** $[QN]$ (senkrechte Projektion der Normalstrecke $[PN]$ auf die Parabelachse) hat für alle Parabelpunkte die Länge p .

Konstruktion der Parabeltangente mit der Subtangente

- ① Lot auf P auf Achse: Q
- ② Kreis um S mit $r = \overline{SQ}$ schneidet Achse in T
- ③ PT ist Tangente



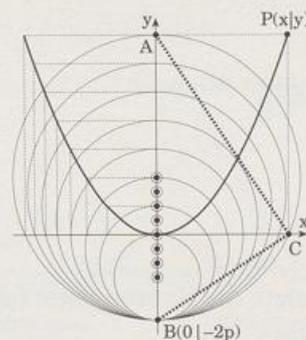
Aufgaben

1. Von einer Parabel ist der Brennpunkt F und die Leitgerade l bekannt. Konstruiere einige Parabelpunkte und skizziere die Parabel. Gib zur Kontrolle die fehlende Koordinate des Parabelpunkts P an.

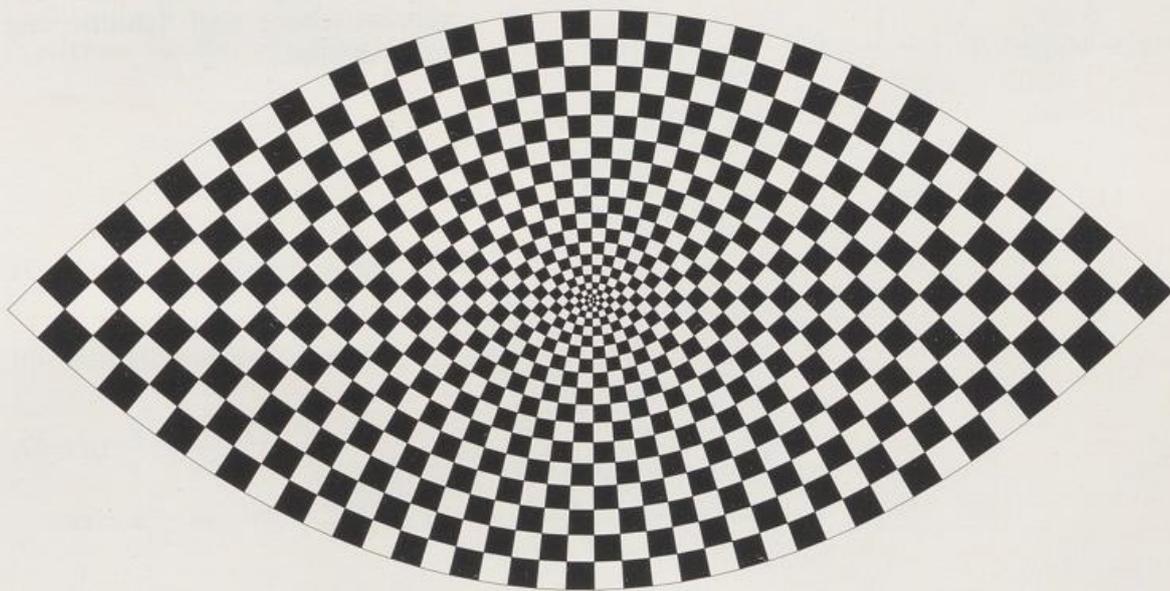
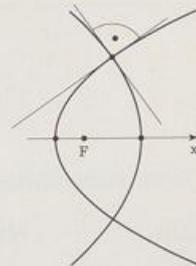
- a) $l: y = -1$ $F(0|0)$ $P(2|?)$
- b) $l: x = -1$ $F(1|0)$ $P(4|?)$
- c) $l: y = x$ $F(2|-2)$ $P(4|?)$

2. Parabelkonstruktion von WERNER

Der Nürnberger Geistliche Johannes WERNER veröffentlichte in seinem Todesjahr 1522 eine einfache Konstruktion von Parabelpunkten. Beschreibe und begründe sie und führe sie für $B(0|-3)$ aus.



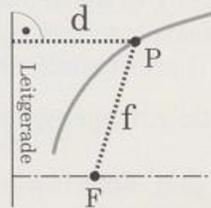
3. Zeige: Die Sehne, die im Brennpunkt senkrecht auf der Parabelachse steht, hat die Länge $2p$.
4. Zeige: Für jeden Parabelpunkt P ist das Dreieck gleichschenkelig, dessen Seiten auf Brennstrahl, Normale und Achse liegen.
5. Eine Parabel mit Scheitel $S(1|0)$ geht durch $P(4|2)$; ihre Achse ist die x -Achse. Konstruiere die Tangente der Parabel P und bestimme aus der Zeichnung den Wert von p .
6. Eine Parabel mit Brennpunkt $F(5|0)$ hat die Tangente mit der Gleichung $2y = x$; ihre Achse ist die x -Achse. Konstruiere den Scheitel, die Leitgerade und einige Parabelpunkte, darunter auch den Berührungspunkt B .
7. Gegeben sind zwei konfokale entgegengesetzt geöffnete Parabeln mit gemeinsamer Achse.
Zeige: Die Tangenten in den Schnittpunkten stehen aufeinander senkrecht. (Dazu sagt man: Konfokale Gegenparabeln schneiden sich senkrecht.)
8. Eine Parabel mit Brennpunkt $F(2|0)$ hat die y -Achse als Leitgerade. Konstruiere diejenigen Parabelpunkte, die auf der Gerade mit der Gleichung $y = -x + 6$ liegen.



*4. Die Leitgerade

Auch bei Ellipse und Hyperbel gibt es Leitgeraden, die eine ähnliche Rolle spielen wie die Leitgerade der Parabel. Sie ergeben sich auch dort als Schnitt von Berührkreisebene und Schnittebene. Deshalb haben Ellipse und Hyperbel zwei Leitgeraden, für jeden Brennpunkt eine. Bezeichnen wir mit d den Abstand eines Kurvenpunkts P von der Leitgerade und mit f seine Entfernung vom Brennpunkt F , dann gilt für alle drei Kegelschnitt-Typen

$$\frac{f}{d} \text{ ist konstant}$$

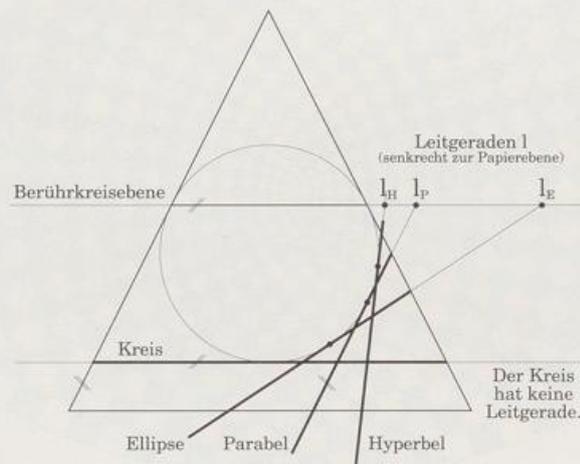


Diese Konstante ist bei Ellipse und Hyperbel nichts anderes als die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a}$. (Nachweis siehe unten)

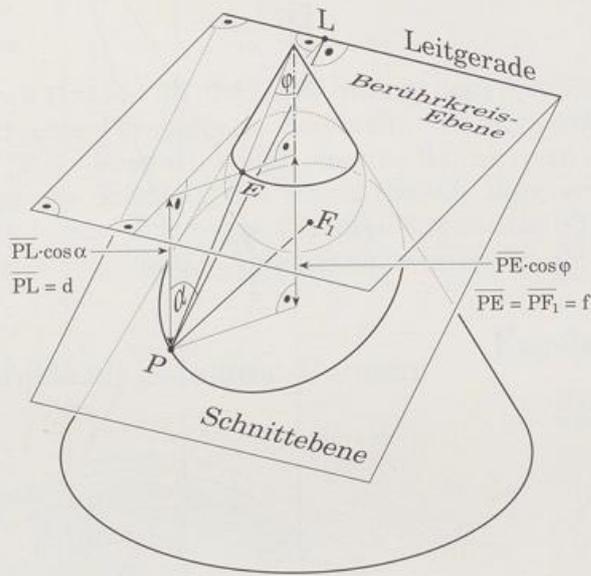
Je nach der Größe von ε bekommt man

- eine Ellipse $\varepsilon = \frac{f}{d} < 1$, also $f < d$
- eine Parabel $\varepsilon = \frac{f}{d} = 1$, also $f = d$
- eine Hyperbel $\varepsilon = \frac{f}{d} > 1$, also $f > d$

Allerdings lässt sich der Kreis als Sonderfall der Ellipse ($\varepsilon = 0$) nicht mit Leitgerade und Brennpunkt erzeugen, weil dann Berührkreisebene und Schnittebene parallel sind.



Zum Beweis der Konstanz von f/d bei der Ellipse projiziert man die Strecken [PL] und [PE] senkrecht auf die Kegelachse.

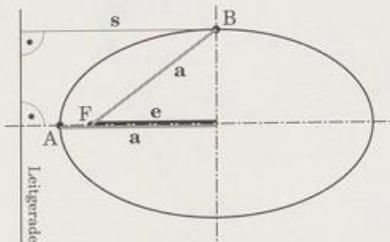


$$\overline{PL} \cdot \cos \alpha = \overline{PE} \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{f}{d} = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \quad (\text{konstant})$$

Für die Hyperbel läuft der Beweis entsprechend, bloß ist hier $\alpha = \varphi$, also $\cos \alpha > \cos \varphi$, also $\varepsilon > 1$.

Nachweis für die Gleichheit $\frac{f}{d} = \varepsilon$



im Bild ist
 $a = 5$
 $e = 4$
 $\varepsilon = 0,8$
 $s = 6,25$

Für den Nebenscheitel B gilt $\frac{f}{d} = \frac{a}{s}$

Für den Hauptscheitel A gilt $\frac{f}{d} = \frac{a - e}{s - a}$

Also ist $\frac{a}{s} = \frac{a - e}{s - a}$

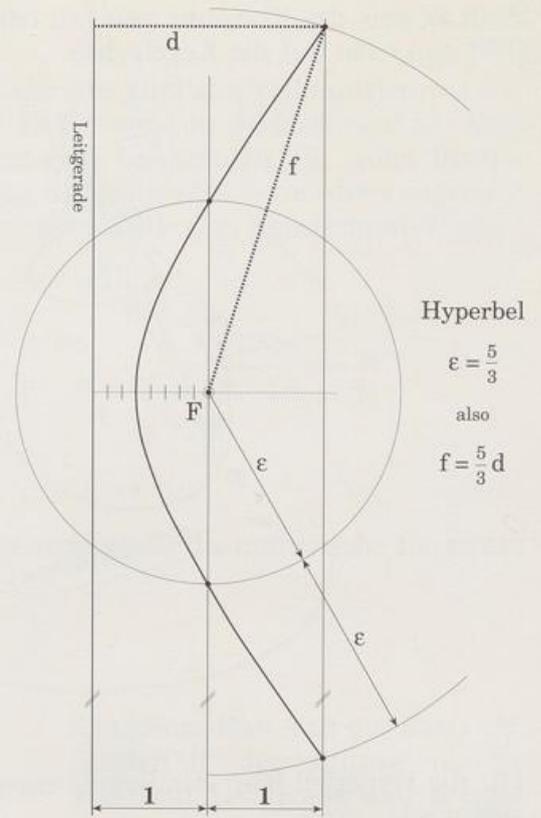
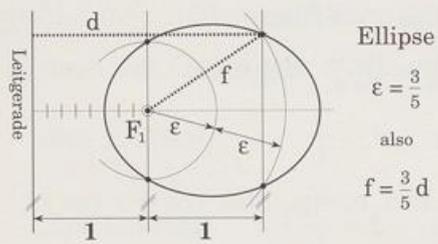
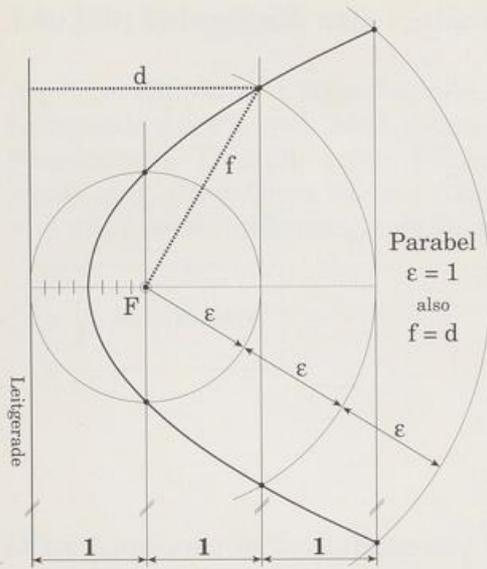
$$as - a^2 = as - es$$

$$\frac{a}{s} = \frac{e}{a}$$

↓ ↓

$$\frac{f}{d} = \varepsilon$$

Für die Hyperbel geht der Beweis entsprechend.



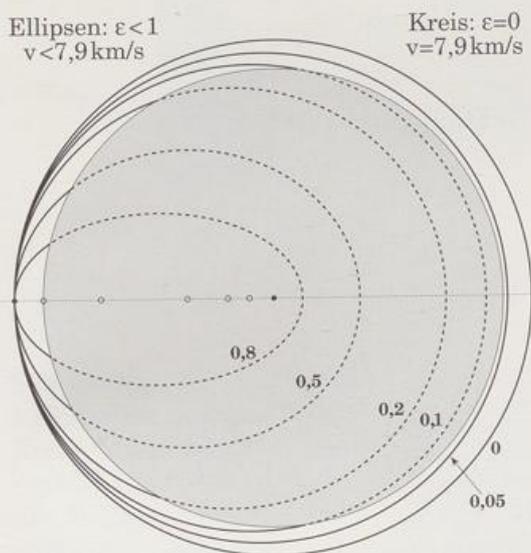
5. Anwendungen

Auf Kegelschnitte trifft man in Natur, Technik und Architektur.

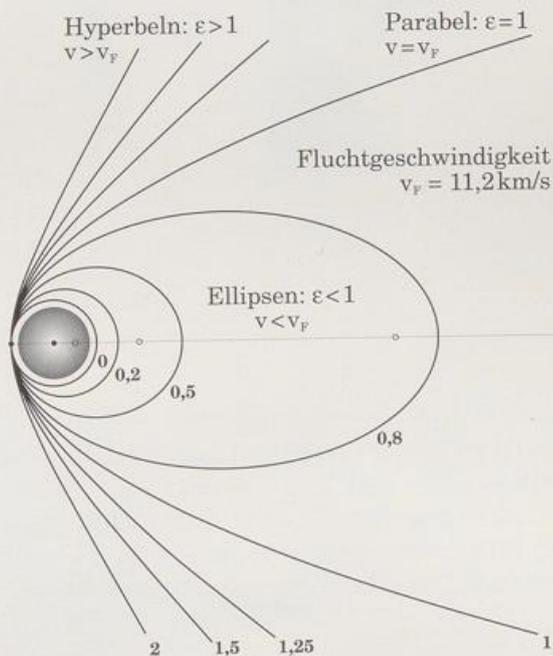
Bahnkurven

Galileo GALILEI (1564 bis 1642) hat Anfang des 17. Jahrhunderts erkannt, dass ein geworfener Körper eine Parabelbahn beschreibt. Dank KEPLER (1571 bis 1630) und NEWTON (1643 bis 1727) wissen wir heute, dass die Bahnkurven eigentlich Ellipsen sind, die aber in der Gegend des Scheitels, des Abwurfpunkts also, sehr gut durch Parabeln angenähert werden. Es lassen sich sogar alle drei Kegelschnitt-Typen beim Werfen erzeugen. Ihre Form hängt allein von der Abwurfgeschwindigkeit ab.

Kegelschnitte als Satelliten-Bahnen



Kegelschnitte als Satelliten-Bahnen



Im Makrokosmos der Astronomie findet man Kegelschnitte als Flugbahnen von Raketen, Planeten, Kometen ...

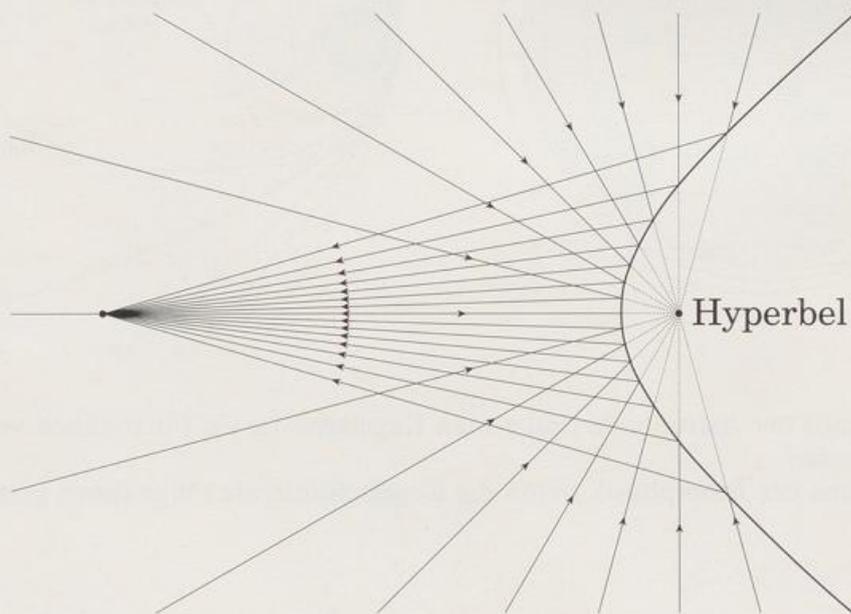
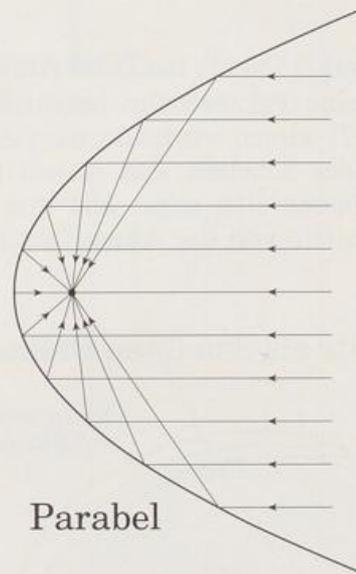
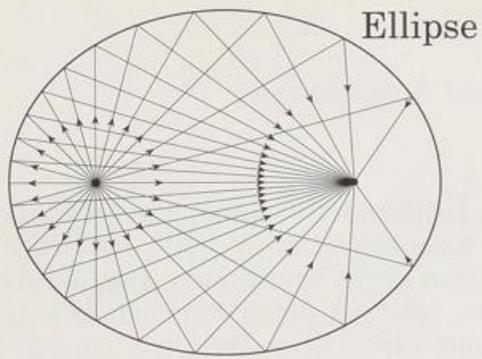
Im Mikrokosmos der Atomphysik treten die Kegelschnitte als Flugbahnen geladener Teilchen auf.

Reflexionen

Die Reflexionseigenschaften von Spiegeln, deren Querschnitte Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sind, nutzt vor allem die Technik.

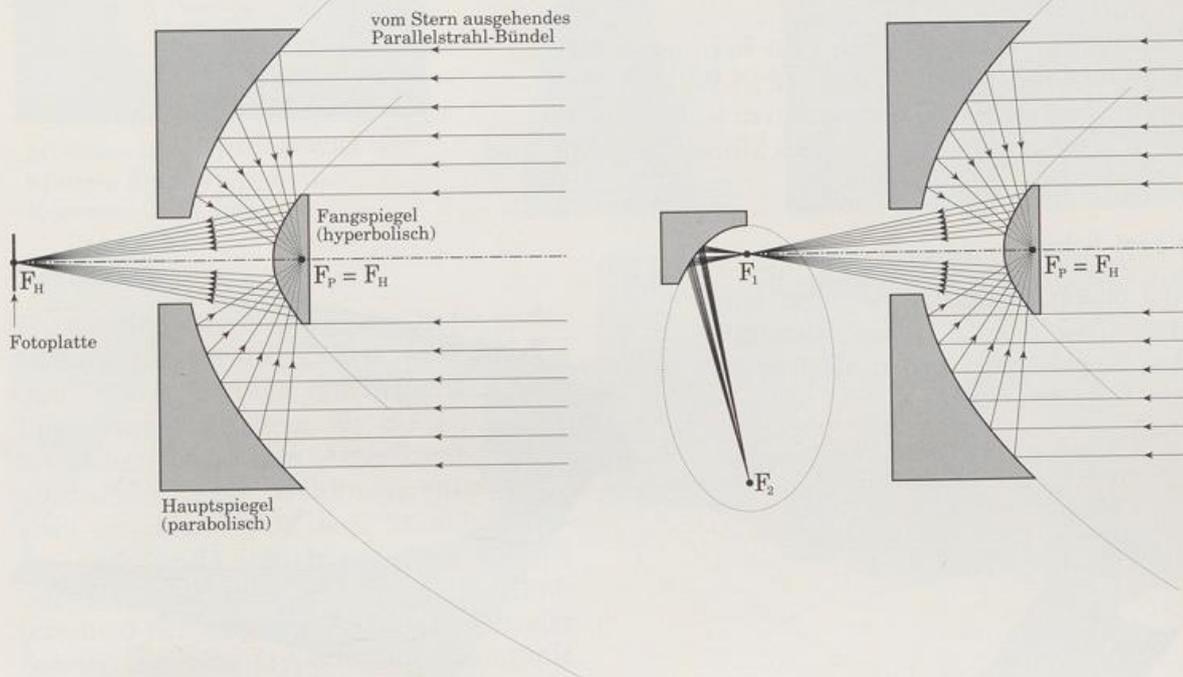
Mit Parabolspiegeln erzeugt man Parallelstrahl-Bündel, zum Beispiel in Sendeantennen (Richtfunk) oder Autoscheinwerfern (Fernlicht).

Mit Parabolspiegeln empfängt man Parallelstrahl-Bündel, zum Beispiel in Empfangsantennen für kosmische Strahlung und Satelliten-Fernsehen oder in astronomischen Spiegel-



fernrohren. Im *Cassegrain-Teleskop* ist ein Parabolspiegel mit einem hyperbolisch gekrümmten Spiegel gekoppelt. Mit dieser Spiegelkombination erzielt man eine Brennweite, die größer ist als die des Parabolspiegels allein. (Ein Fernrohr vergrößert um so stärker, je länger seine Brennweite ist.) Man könnte sogar ein Teleskop mit Spiegeln bauen, in denen alle drei Kegelschnitt-Typen vorkommen.

Cassegrain-Fernrohr



Seit es den *Nierenlithotripter* gibt, das ist ein Nierenstein-Zerbrösler, lassen sich Nierensteine ohne blutige Operation entfernen. Sein Funktionsprinzip ist recht einfach: In einem Brennpunkt eines Ellipsenspiegels sendet ein starker Funke einen Knall aus – das ist eine Stoßwelle. Der Patient ist so justiert, dass im andern Brennpunkt sein Nierenstein sitzt. Die am Ellipsenspiegel reflektierte Stoßwelle konzentriert sich auf den Nierenstein und bewirkt, dass eine dünne Außenschicht abplatzt. Einige hundert Funkenknalle zerbröseln so den Stein zu Gries.

Nierenstein-Zerbrösler



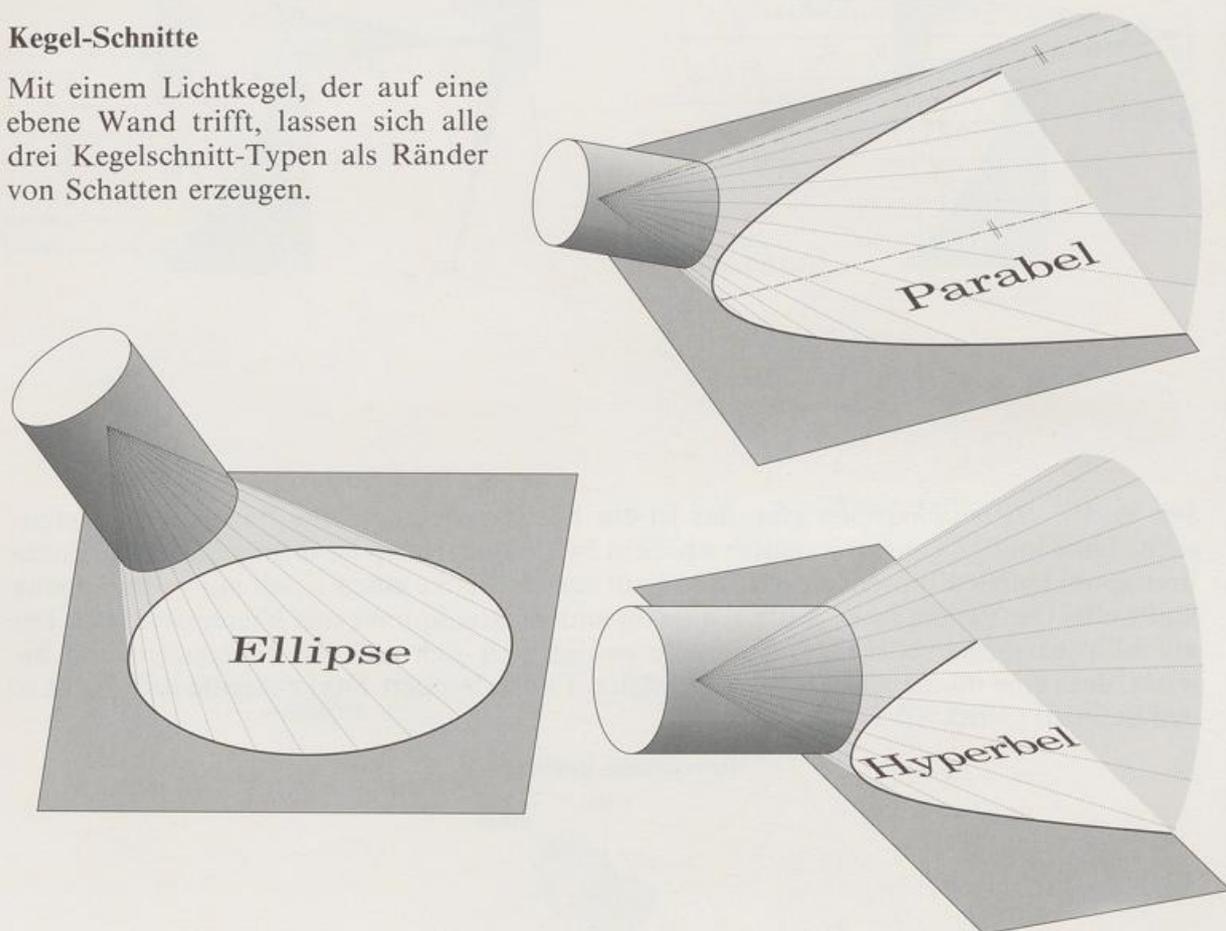
Flüstergalerien sind raffinierte Einrichtungen in Schlössern und Residenzen: Eine ellip- tisch gewölbte Decke überspannt zwei Räume so, dass in jedem Raum ein Brennpunkt liegt. Findet ein (geflüsteres) Gespräch im Brennpunkt des einen Raums statt, dann kann man es im Brennpunkt des andern Raums abhören. Lauschangriffe sind also schon seit der Renaissance durch trickreiche Nutzung einer Ellipsen-Eigenschaft in der Architektur möglich!

Flüstergewölbe finden sich zum Beispiel

- in der Vorhalle der Residenz in Würzburg
- im Karyatiden-Saal des Louvre in Paris
- in einem Raum des Castello Sforzesco in Mailand
- in St. Paul's in London.

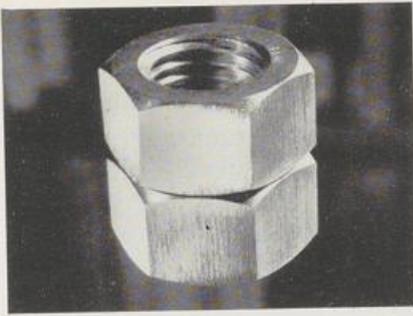
Kegel-Schnitte

Mit einem Lichtkegel, der auf eine ebene Wand trifft, lassen sich alle drei Kegelschnitt-Typen als Ränder von Schatten erzeugen.



Beim Anspitzen eines sechskantigen Bleistifts entstehen Hyperbeln als Schnitte eines Kegels (im Spitzer) mit Ebenen (Bleistift), die parallel sind zur Kreisachse. Ähnlich kommen auch die Hyperbeln auf Gewindemuttern zustande.

Bei der Sonnenuhr wirft ein fester Stab einen Schatten, der die wahre Sonnenzeit angibt. Die Schattenspitze beschreibt jeden Tag eine andere Kurve (*Datumlinie*). Diese Kurve entsteht als Schnitt der Bildebene und des Kegels, den die Verbindungsgeraden Stabspitze–Sonne bilden. Sie ist deshalb ein Kegelschnitt, und zwar meistens eine Hyperbel.

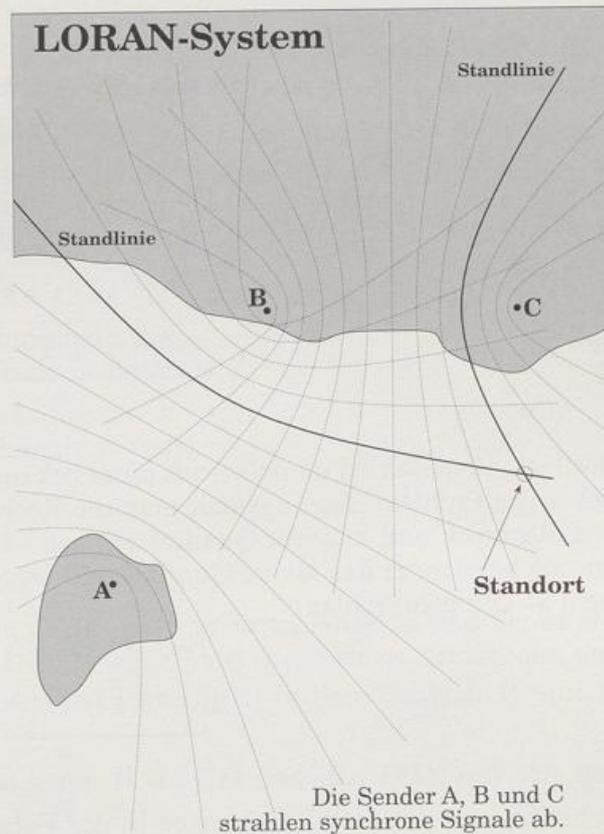


Modebewusste Messingmutter beim Mustern ihrer hyperbolischen Konturen vorm Spiegel



Navigation

Hyperbeln spielen eine große Rolle in der Ortung von Schiffen. Das LORAN-System (LONG RANGE Navigation) ist ein Funkortungsverfahren für die Langstreckenpeilung (von den Amerikanern während des Zweiten Weltkriegs entwickelt). Drei verschiedene ortsfeste Stationen senden gleichzeitig Signale aus, die ein Schiff oder Flugzeug empfängt. Der Laufzeitunterschied der empfangenen Signale zweier Sender legt eine Hyperbel als Standlinie fest (die Sender stehen in den Brennpunkten). Der Standort ergibt sich als Schnittpunkt von zwei oder drei Hyperbeln. Die Genauigkeit bei Auswertung der Bodenwellenimpulse liegt bei 5 km, bei Auswertung der Raumwellenimpulse bei 15 km. Die Reichweite der Sender beträgt tagsüber 1400 km und nachts etwa das Doppelte. Das LORAN-System überdeckt fast vollständig den Nordatlantik sowie große Teile des Indischen Ozeans.



6. Geschichtliches

Etwa um 350 v. Chr. erfindet MENAICHMOS, der Lehrer Alexanders des Großen, die Kegelschnitte als Kegel-Schnitte zur Lösung geometrischer Probleme, bei denen man mit der klassischen Methode (Zirkel, Lineal) nicht weiterkommt. Er löst zum Beispiel das Delische Problem der Würfelverdopplung über den Schnitt von Parabeln: Aus $x^2 = ay$ und $y^2 = 2ax$ folgt nämlich $x = a\sqrt[3]{2}$.

Mit den Kegelschnitten ist es auch möglich, einen Winkel in drei gleich große Winkel zu zerlegen.

Nur das dritte der drei klassischen Probleme, die Quadratur des Kreises, kann MENAICHMOS nicht lösen.

APOLLONIOS von Perge (262 bis 190) untersucht die Kegelschnitte eingehend und schreibt seine *Konika*, acht Bücher über Kegelschnitte: I bis IV sind griechisch überliefert, V bis VII liegen arabisch vor und VIII ist verloren gegangen. Im Gegensatz zu MENAICHMOS, der für jeden Kegelschnitt-Typ einen neuen Kegel braucht, weil er immer senkrecht zu einer Mantellinie schneidet, bekommt APOLLONIOS alle Kegelschnitte an einem Kegel durch Schnitte unter verschiedenen Winkeln. Er treibt *geometrische Algebra*, indem er versucht, quadratische Gleichungen über Flächengleichheiten zu lösen:

Die Gleichung $ax = b^2$ ist gelöst, wenn es gelingt, zu einer gegebenen Rechteckseite a die andere Rechteckseite x so zu finden, dass dieses Rechteck flächengleich ist einem Quadrat mit gegebener Seitenlänge b . (paraballein = vergleichen, gleich sein)

Typ: $ax = b^2$

Zur Lösung der Gleichung $ax + x^2 = b^2$ braucht man die Rechteckseite x so, dass Rechteck- und Quadratfläche (Seite x) zusammen so groß sind wie das Quadrat mit Seitenlänge b . APOLLONIOS bezeichnet das kleine Quadrat mit der Seite x als *überschießendes Quadrat*. (hyperballein = über ein Ziel hinauswerfen, übers Ziel hinausschießen)

Typ: $ax + x^2 = b^2$

Weil negative Zahlen damals noch nicht bekannt sind, schafft die Gleichung $ax - x^2 = b^2$ ein neues Problem. Jetzt braucht man die Rechteckseite x so, dass der Flächenunterschied von Rechteck und kleinem Quadrat so groß ist wie das Quadrat mit Seitenlänge b . APOLLONIOS bezeichnet das kleine Quadrat mit der Seite x als *unterschießendes Quadrat*. (elleipein = mangeln, fehlen)

Typ: $ax - x^2 = b^2$

Schreibt man die drei Gleichungen in der Form

$$y^2 = ax$$

$$y^2 = ax + x^2$$

$$y^2 = ax - x^2$$

so ergeben sich Gleichungen von Parabeln, Hyperbeln und Ellipsen. Die Mittelpunkte dieser Hyperbeln und Ellipsen liegen nicht im Koordinatenursprung.

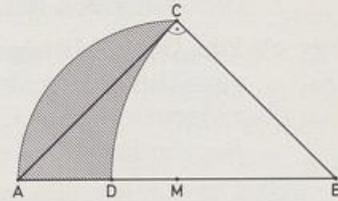
Nach den Griechen kümmert man sich kaum noch um die Kegelschnitte. Erst Johannes WERNER (1468 bis 1522) erweckt sie zu neuem Leben in seiner Schrift *Elemente der Kegelschnitte*. Darin steht zum Beispiel eine einfache Parabelkonstruktion mittels einer Schar von Kreisen mit gemeinsamem Berührungspunkt (siehe Kapitel 9. II, 3).

Aufgaben aus der Besonderen Prüfung (1985 bis 1988)

Planimetrie

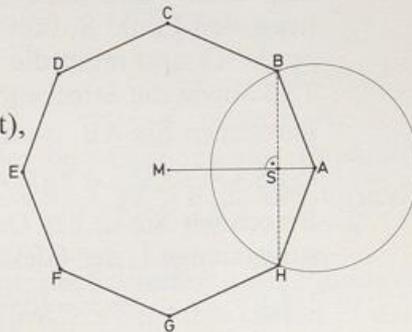
I. Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig-rechtwinklig mit $\overline{AC} = \overline{BC} = a$. Der Punkt M halbiert die Basis [AB]. M ist der Mittelpunkt des Kreisbogens \widehat{AC} und B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens \widehat{DC} .

- Berechnen Sie den Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a!
- Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a!



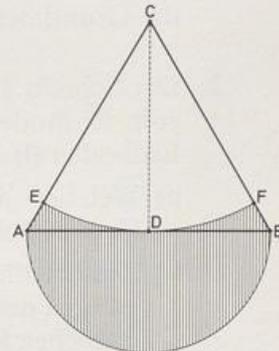
II. Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck, dessen Mittelpunkt M von jedem Eckpunkt 4 Längeneinheiten entfernt ist. Dieses Achteck wird von einem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $r = \overline{AB}$ geschnitten. Berechnen Sie:

- die Länge der zwischen den Punkten H und B liegenden Strecke (Ergebnis: $4\sqrt{2}$ Längeneinheiten),
- den Inhalt des Vierecks ABMH,
- den Umfang des Achtecks,
- den Bruchteil der Kreisfläche, die innerhalb des Achtecks liegt (Angabe des Ergebnisses in Prozent),
- die Länge der innerhalb des Achtecks liegenden Kreisbogens (Ergebnis auf eine Dezimale genau).



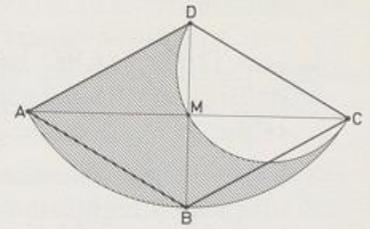
III. Die Figur zeigt ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge $2a$ und der Höhe [CD], ferner einen Halbkreis mit dem Durchmesser [AB] sowie einen Kreisbogen um C mit Radius \overline{CD} , der die Dreieckseiten [AC] und [BC] in den Punkten E und F schneidet.

- Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Höhe \overline{CD} und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (Teilergebnis: $\overline{CD} = a\sqrt{3}$)
- Die in der Figur schraffiert gezeichnete Fläche wird begrenzt vom Kreisbogen um C mit dem Radius \overline{CD} , vom Halbkreis über [AB] sowie von den Strecken [AE] und [BF]. Zeigen Sie, dass diese Fläche inhaltsgleich der Fläche des Dreiecks ABC ist.



IV. Gegeben sei eine Raute ABCD mit der Seitenlänge s . Die Länge der Diagonale [BD] sei ebenfalls s .

- Berechnen Sie die Diagonalenlänge $e = \overline{AC}$ sowie den Flächeninhalt der Raute ABCD in Abhängigkeit von s .
- Bestimmen Sie den Abstand d des Mittelpunkts M der Raute von der Seite [AB] in Abhängigkeit von s .
- Um D als Mittelpunkt ist ein Kreisbogen mit Radius s gezeichnet. Berechnen Sie die Länge dieses Bogens zwischen A und C in Abhängigkeit von s . Begründen Sie Ihren Ansatz!
- Der Kreisbogen zwischen D und C geht durch M . Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche für $s = 4$ cm. Begründen Sie Ihren Ansatz!



Trigonometrie

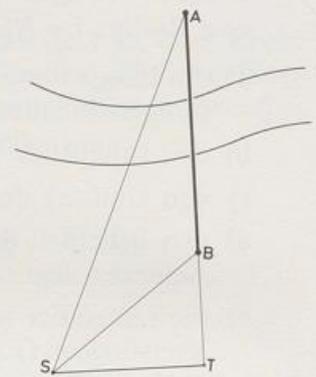
- I. 1. Die Entfernung zweier auf verschiedenen Seiten eines Flusses liegender Punkte A und B soll bestimmt werden. Man wählt dazu einen nicht auf der Gerade AB liegenden Punkt S , fällt von S das Lot auf AB (Lotfußpunkt T) und misst die Größen und Winkel BSA und TSB sowie die Strecke $[ST]$.

Berechnen Sie \overline{AB} , wenn

$$\sphericalangle BSA = 30,5^\circ, \quad \sphericalangle TSB = 37,0^\circ \quad \text{und} \quad \overline{ST} = 795 \text{ m gilt.}$$

2. Berechnen Sie in der Grundmenge $G = [0; 2\pi]$ die Lösungsmenge L der Gleichung

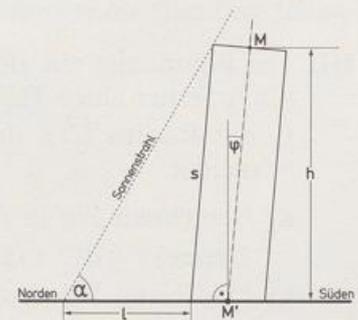
$$1 + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = (\cos x)^2.$$



- II. 1. Berechnen Sie die Lösungsmenge L der Gleichung

$$2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) - \sin(-x) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3};$$

die Grundmenge ist $G = \left[0; \frac{1}{2}\pi\right]$.

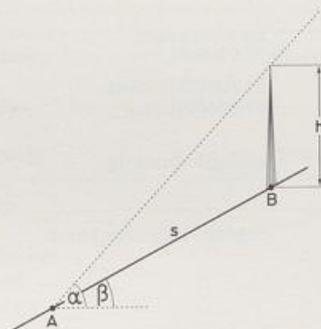


2. Der Schiefe Turm von Pisa hat die Neigung $\varphi = 4,45^\circ$ gegenüber der Senkrechten zum Erdboden. Der Mittelpunkt M der Dachplattform liegt $54,87$ m über dem Erdboden ($h = 54,87$ m; siehe Skizze)
- Welchen Abstand a hat der Mittelpunkt M von der Lotrechten durch den Grundflächenmittelpunkt M' ?
 - Die nördliche Seite s des Turms (siehe Skizze) beträgt $55,39$ m. Wie groß ist die Länge l des Turmschattens, wenn die Sonne im Winkel $\alpha = 60^\circ$ über der Erde in südlicher Richtung steht?

III. 1. Gegeben ist der Term $\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)}{\sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x}}$.

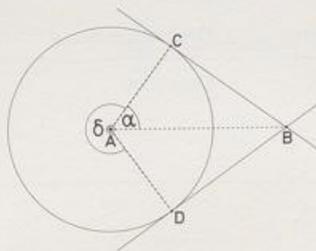
- a) Geben Sie an, für welche $x \in [-\pi; \pi]$ der Term definiert ist und begründen Sie Ihre Antwort.
 b) Nun sei $0 < x < \pi$. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

2. Ein Turm der Höhe $h = 25$ m steht auf einem Hang, der unter dem Winkel $\beta = 28^\circ$ gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge $\overline{AB} = s$ des Turms beträgt bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenabstand 45 m. Berechnen Sie den Höhenwinkel α , unter dem die Sonne erscheint, auf Grad genau. Übertragen Sie dazu die nachstehende Skizze auf Ihr Blatt und ergänzen Sie diese mit geeigneten Bezeichnungen.



IV. 1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Einheitskreises oder des Graphen der Funktion $x \mapsto \sin x$ die Lösungsmenge der Ungleichung $2 \cdot \sin x + \sqrt{2} > 0$ in der Grundmenge $[0; 2\pi]$.

2. Gegeben ist der Kreis um A mit dem Radius 35 mm; die Entfernung der Punkte A und B beträgt 60 mm. Die Tangenten von B an den Kreis berühren diesen in den Punkten C und D. (Bei den Ergebnissen in den folgenden Teilaufgaben sind die Längen auf mm und die Winkel auf ganze Grad zu runden.)
 a) Berechnen Sie die Länge des Tangentenabschnitts [BC] sowie den Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$.
 b) Bestimmen Sie den Mittelpunktswinkel δ sowie die Länge des zugehörigen Kreisbogens CD (siehe Figur). Welchen Umfang hat somit die Gesamtfigur, die sich aus den Tangentenabschnitten [BC] und [BD] und dem zu δ gehörigen Kreisbogen CD zusammensetzt?



Wortkunde: Griechisch

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
ἀξίωμα axioma	Wertschätzung, Forderung	Axiom (das)		Grundvoraussetzung
ἁρμονία harmonia	Verbindung; Ebenenmaß	Harmonie		Übereinstimmung, Einklang
ἄρμος harmos	Fuge, Gelenk	Harmonika		Musikinstrument
(ἄρμος ist verwandt mit ›Arm‹ und ›arma‹ (lat.: Geräte, Waffen))		Harmonium		Musikinstrument
βάσις basis	Schritt, Fuß Grundlage	Basis basieren auf	Schritt	Grundlage, -linie, -fläche, -zahl beruhen auf, sich gründen auf
γῆ gä	Erde, Feld Land, Grund (Vorsilbe)	Geometrie	Landmessung	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren
γέω- geo-		Geografie Geologie	Erdbeschreibung Erdwissenschaft	Erdkunde Lehre von Entstehung und Bau der Erde
		geozentrisch	erdmittelpunktig	auf die Erde als Mittelpunkt bezo- gen
γράφειν grafein	(ein)ritzen, schreiben zeichnen	Grafik	Schreib-, Zeichenkunst	Sammelbegriff für Holzschnitt, Kupferstich, Lithografie und Handzeichnung
γράμμα gramma	Buchstabe, (In)Schrift Geschriebenes, Zeichnung	Griffel Fotografie	Lichtzeichnung	Schreib-, Zeichenstift Verfahren zur Herstellung von Bil- dern, die durch Licht erzeugt wer- den
(γράφειν ist verwandt mit ›kerben‹)		Geografie Paragraf	Erdbeschreibung Danebengeschriebenes	Erdkunde mit § numerierter kleiner Ab- schnitt
		Parallelogramm Programm	Nebeneinandergeschriebenes Vorhergeschriebenes	Viereck mit parallelen Seiten festgelegter Ablauf einer Veran- staltung, von Befehlen (Computer- Programmierung)
		Pentagramm Diagramm	Fünfzeichnung	fünfeckiger Stern, Drudenfuß zeichnerische Veranschaulichung
		Telegraf, -gramm	Fernschreiber, -schreiben	Fernschreiber, Fernschreiben
γωνία gonia	Winkel(maß), Ecke	Gon	Winkel	Gradmaß des Winkels: 100 Gon = 90°
(γωνία ist verwandt mit ›Knie‹)		Goniometrie Polygon (das) Diagonale	Winkelmessung Vieleck Dürcheck	Rechnung mit Winkelfunktionen Vieleck Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken
		Pentagon (das)	Fünfeck	Fünfeck, amerikanisches Vertei- digungsministerium (fünfeckiger Grundriss)
		Trigonometrie	Dreiecksmessung	Dreiecksberechnung, -messung
διά dia	durch, zwischen, auseinander	Diagonale Diagramm Diapositiv	Dürcheck	Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken zeichnerische Veranschaulichung durchsichtiges Positiv eines Fotos

Wortkunde: Griechisch

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
ἔδρα hedra Sitz(-platz, -fläche); Wohnsitz; Tempel συνέδριον Sitzung; Rat; synedrion Gerichtshof καθέδρα Lehrstuhl katedra	Polyeder (das) Tetraeder (das), Oktaeder (das) Dodekaeder (das), Ikosaeder (das) Sanhedrin (der)	Vielsitz	Vielflach, von ebenen Flächen begrenzter Körper Vierflach, Achtflach, Zwölfflach, 20-Flach jüdischer Gerichtshof
ἐπίπεδον Ebene, Fläche epipedon	Parallelepiped	Parallelflach	Parallelflach: Körper mit sechs paarweise parallelen Seitenflächen
κατά kata (her)unter, nieder	Katheten Katheter (der) Kathode	Herabhängende Hinablasser Ausgang, Heimkehr	Dreieckseiten, die einen rechten Winkel bilden Röhrchen, das in Körperorgane eingeführt wird negative Elektrode
κρίσις krisis (Unter-, Ent-)Scheidung, Urteil κριτήριον Kennzeichen kritarion	Krise Kriterium Kritik kritisch		Entscheidungssituation, Höhe-, Wendepunkt entscheidendes Kennzeichen Beurteilung, (oft) Tadel streng prüfend, tadelnd, bedenklich
μέτρον Maß metron -μετρία -messung -metria	Meter Geometrie Planimetrie Stereometrie Symmetrie	Maß Landmessung Flachmessung Raummessung Ebenmaß	Längeneinheit Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren Lehre von den ebenen Figuren Lehre von den räumlichen Figuren Ebenmaß, Spiegelungsgleichheit
ὄβελός obelos (Brat)Spieß; Spitzsäule	Obelisk (der)		freistehender Spitzpfeiler
ὀρθός ortos aufrecht, gerade recht, richtig	orthogonal Orthogon (das) Orthografie	rechtwinklig	rechtwinklig, senkrecht Rechteck Rechtschreibung
παρά para (da)neben, vorbei, gegen	parallel Parallelogramm Parallelprojektion Parabel Paragraf paradox	nebeneinander Nebeneinandergeschriebenes Danebenwurf Danebengeschriebenes gegen die Meinung	gleich laufend Viereck mit parallelen Seiten durch parallele Strahlen verursachter Schatten Wurflinie mit § numerierter kleiner Abschnitt scheinbar widersinnig
περίοδος periodos Herumgehen, regelmäßige Wiederkehr	Periode		(sich wiederholender) Zeitabschnitt, sich unendlich oft wiederholende Ziffergruppe in Dezimalzahlen

Wortkunde: Griechisch

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
πολύ viel poly	Polygon Polyeder Polynom Polygamie	Vieleck Vielfläche Vielausdruck Vielheirat	Vieleck Vielfach, Vielfächner mehrgliedriger Rechenausdruck Vielehe
πρίειν zersägen pr̄iein	Prisma		ebenflächiger Körper, dessen Deck- und Grundfläche parallel-kongruent sind
ὑπό unter, unterhalb hypo	Hypotenuse Hypothese	Daruntergespannte Unterlage, Unterstellung	Strecke »unter«, gegenüber dem rechten Winkel unbewiesene Annahme
τράπεζα Tisch trapeza	Trapez	Tisch	Viereck mit zwei parallelen Seiten
χορδή Darm, Darmseite chordā (χορδή ist verwandt mit Kord, Kordel, Garn)	Chordale		Gerade durch die Schnitt- punkte zweier Kreise

Wortkunde: Latein

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
associare vereinigen, verbinden	assoziiieren Assoziativgesetz		Vorstellungen verbinden mit Klammerregel: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)c = a(bc)$
cavea Höhle, Käfig	konkav	hohl	nach innen gewölbt
circus Kreis, Ring	Zirkus zirka zirkulieren Zirkel Zirkelschluss	Zirkus, Rennbahn ringsherum kreisen sich im Kreis drehender Beweis	Zirkus ungefähr im Umlauf sein Gerät zum Kreiszeichnen und Streckenabtragen Beweis, bei dem die Behauptung in der Voraussetzung steckt
commutare verändern, vertauschen	Kommutativgesetz		Vertauschungsregel: $a + b = b + a$ $ab = ba$
congruens übereinstimmend	kongruent	übereinstimmend	deckungsgleich
contra gegen	Kontraposition		Ableitung einer negativen Aussage aus einer positiven
facies (äußeres) Aussehen Gesicht	Facette Fassade Fasson (die)		geschliffene Vieleckfläche bei Edelsteinen Stirn-, Vorderseite Muster; (Zu)Schnitt

Wortkunde: Latein

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
<i>finis</i>	Grenze, Ende	Finale Finish definieren definitiv	abgrenzen	Schlussatz, -teil, Endrunde letzter Schliff, Endkampf begrifflich bestimmen endgültig
<i>gradus</i>	Schritt, Stufe	Grad degré (Franz.), degree (Engl.)		Einheit der Winkel- und der Temperaturmessung Grad
<i>intervallum</i>	Zwischenraum	Intervall (das)		Zeitabstand, Zeitspanne, Abstand zusammen- oder nacheinander klingender Töne
<i>invertere</i>	umdrehen, umkehren	invers		umgekehrt
<i>linea</i> (linea ist verwandt mit Leine)	Faden, Linie	Linie Lineal linear	Linie	Linie Gerät zum Zeichnen gerader Li- nien geradlinig
<i>mensura</i>	Messen	kommensurabel		mit gleichem Maß messbar
<i>modus</i>	Maß, Art	Modus Mode Modifikation ummodelln Modell		Verfahrensweise, Form, häufigster Wert (Statistik) herrschender Zeitgeschmack Änderung ändern, umformen Muster, Vorbild
<i>ordo</i>	Reihenfolge (An)Ordnung Rang	Orden ordnen Order ordinär Ordinalzahl Ordinate koordinieren Koordinaten	Entwicklung: ordentlich → gewöhnlich → niedrig → gemein → vulgär beiordnen	Ehrenzeichen ordnen Befehl, Auftrag Ordnungszahl: 1. 2. 3. usw. y-Wert eines Punkts im Koordina- tensystem aufeinander abstimmen auf den Ursprung bezogene Zah- len
<i>passus</i>	Schritt	Pass passieren Passant Passante		amtlicher Passierschein vorbeigehen, auf die andre Seite gehen Fußgänger Gerade, die mit einem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat
<i>plenus</i>	voll, vollständig	Plenum komplett komplementär Komplementwinkel Supplement Supplementwinkel	Volles vollmachend	Vollversammlung des Parlaments vollständig ergänzend Winkel, die sich zu 90° ergänzen Ergänzungsband, -teil Winkel, die sich zu 180° ergänzen

Wortkunde: Latein

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
<i>postulare</i> fordern (das Stammwort ist <i>poscere</i> : fordern <i>poscere</i> ist verwandt mit <i>forschen</i>)	Postulat postulieren	Forderung fordern	logische und notwendige Annahme, die unbewiesen, aber glaubhaft ist ein Postulat aufstellen
<i>proicere</i> hin(aus)werfen nach vorn werfen	projizieren Projekt Projektil		Körper in einer Ebene abbilden großangelegte Unternehmung Geschoss
<i>proportio</i> Verhältnis	Proportion proportional		Verhältnisleichung verhältnisleich
<i>quadrum</i> Viereck	Quader Quadrat Quadrant		Körper mit lauter rechteckigen Flächen rechtwinkliges Viereck mit gleich langen Seiten eines der vier Felder im Koordi- naten-system
<i>ratio</i> Berechnung: Verhältnis	Ration rationale Zahlen irrationale Zahlen	berechneter Anteil	zugewiesener Anteil, Verpflegungssatz Verhältniszahlen, Brüche Zahlen, die nicht als Brüche darstellbar sind
<i>regere</i> (gerade) richten, lenken	regieren Rektor Rektifikation korrigieren korrekt	Leiter Geradmachung berichtigen	herrschen Schulleiter Bestimmung der Länge einer Kurve berichtigen richtig
<i>rota</i> Rad, Scheibe (<i>rota</i> ist verwandt mit Rad)	rotieren Rotation Rotor	kreisförmig drehen	umlaufen, sich um eine Achse drehen Drehung sich drehender Teil einer elektri- schen Maschine
<i>scalae</i> Treppe, Leiter	Skala Skalar (der) eskalieren		Maßeinteilung in Messgeräten durch einen reellen Zahlen- wert bestimmte Größe sich stufenweise steigern
<i>secare</i> (ab)schneiden	Sekte Sekante Sektor Sekans Kosekans Insekt	Abschneider schneidend Eingeschnittenes	kleine Glaubensgemeinschaft die sich von einer größeren abgespalten hat Gerade, die einen Kreis schneidet Ausschnitt, (Sach)Gebiet Hypotenuse/Ankathete Hypotenuse/Gegenkathete Kerbtier: Tier mit meist drei deutlich voneinander abgesetzten Körperteilen (Kopf-Brust-Hinterleib)

Wortkunde: Latein

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
<i>struere</i> schichten, aufbauen (<i>struere</i> ist verwandt mit streuen)	Struktur konstruieren konstruktiv instruieren instruktiv Instrument	Gefüge, Bauwerk aufschichten, (er)bauen unterrichten, ausrüsten	Aufbau, innere Gliederung eine Figur zeichnerisch darstellen, die Bauart einer Maschine, eines Gebäudes entwerfen aufbauend in Kenntnis setzen, anleiten lehrreich Gerät
<i>tangere</i> berühren	Tango Tangente Tangens Kotangens Takt Kontakt	ich berühre Berührende berührend	aus der Habanera entstandener spanisch-kubanischer Volkstanz Gerade, die einen Kreis berührt Gegenkathete/Ankathete Ankathete/Gegenkathete Ablauf von Tönen und Bewegungen nach einem bestimmten Zeitmaß Verbindung (durch Berührung), Fühlungsnahme
<i>trans-cendere</i> überschreiten, hinübersteigen	transzendent	überschreitend	nicht mit Wurzeln darstellbar, übers Algebraische hinausgehend, die Grenzen der Erfahrung und der sinnlichen Wahrnehmung überschreitend
<i>transferre</i> hinübertragen, verschieben	Transfer Translation	Übertrag Übertragung, Verschiebung	Zahlung ins Ausland in fremder Währung Verschiebung
<i>triplus</i> dreifach	Tripel (das) Tripelkonzert Tripelfuge	Dreifaches	mathematische Größe aus drei Elementen Konzert für drei Soloinstrumente und Orchester Fuge mit drei selbständigen Themen
<i>vehere</i> fahren, tragen	Vehikel vehement Vektor konvex	Fahrzeug auffahrend Fahrer, Träger zusammengetragen	klappriges, altmodisches Fahrzeug stürmisch gerichtete Größe nach außen gewölbt, erhaben

Griechisches Alphabet

A α Alpha	I ι Iota	P ρ Rho
B β Beta	K κ Kappa	Σ σ Sigma
Γ γ Gamma	Λ λ Lambda	T τ Tau
Δ δ Delta	M μ My	Υ υ Ypsilon
E ε Epsilon	N ν Ny	Φ φ Phi
Z ζ Zeta	Ξ ξ Xi	X χ Chi
H η Eta	Ο ο Omikron	Ψ ψ Psi
Θ θ Theta	Π π Pi	Ω ω Omega

Das deutsche Alphabet in deutscher Schreifschrift und in Antiquabuchstaben

A α a œ	J j j j	S σ s f
B β b b	K κ k k	T τ t t
C c c c	L l l l	U υ u u
D d d d	M m m m	V υ v v
E e e e	N n n n	W w w w
F f f f	O o o o	X x x x
G g g g	P p p p	Y y y y
H h h h	Q q q q	Z z z z
I i i i	R r r r	

Register

- Additionstheoreme 166, 167
Al-Kasi 22
Allzweckstöpsel 62
Aphel 226
Apollonios 205, 262
Arbelos 44
Archimedes 21, 44, 50, 74, 78
Aryabhata 112
Asymptote 239
axiale Streckung 210
- Beruni 156
Bestimmungsdreieck 6
Bibel 21
Big Ben 39
Bogenlänge 29
Böschungswinkel 65
Bradwardine 7
Brahe 226
Brahmagupta 22
Breidenbach 16
- Cassegrain-Teleskop 258
Ceulen 11, 22
Cheops 37
Cicero 76
cosec 109
- Dandelin 223
Deutsches Museum 123
Doppelwinkel-Formeln 169
Drehwinkel 137
Dubois 62
Dudeney 61
Durchmesser 208
Dürer 92, 158, 159, 234
- Ellipsenfläche 217
Ellipsenumfang 217
Ellipsenzirkel 218
Eratosthenes 41
Erdinger 10
Estremow 17
Eudoxos 76
Euklid 69
Euler 21, 24
Exzentrizitäten 224
- Fagnano-Ellipse 222
Fermat 10
Fermat'sche Primzahl 10
Fibonacci 22, 43
Flüstergalerie 260
Formparameter 244
- Galilei 257
Gärtner-Konstruktion 226
Gauss 10, 16
Gitterpunktverfahren 34
gleichseitige Hyperbel 244
goniometrische Gleichungen 172
Grandville 92
Gregory 19, 23
Guldin 234
Guldin'sche Regeln 91
- Halbachse 208
Halbmond 130
Halbwinkel-Formeln 169
Halbwinkelsätze 154
Hauptachse 208
Hauptkreis 208
Hauptscheitel 208
Hermes 10
Heron 17, 181
Hippokrates 44
Höhen-Parallaxe 124
Höhenlinien 102
Horizontalparallaxe 123
Hüllkonstruktion 232
Humboldt 102
Huygens 158
- imaginäre Halbachse 237
Isohypsen 102
- Jahresparallaxe 130
Jakobstab 113
Jamnitzer 59, 72
- Kalotte 81
Kegelstumpf 57
Kepler 153, 226, 257
Kernschatten 123
Kochansky 37
konstruierbare ganzzahlige
 Winkel 170
Kosekans 109
Kosinussatz 145
Kote 102
Kreisring 43
Kugelabschnitt 81
Kugelausschnitt 82
Kugeldreieck 80
Kugeldreikant 81
Kugelhaube 81
Kugelkeil 80
Kugelschicht 83
Kugelsegment 81
Kugelsektor 82
- Kugelzone 83
Kugelzweieck 79
- Lacaille 161
Lalande 161
Lambert 24, 158
Landvermessung 101
Leitgerade 247, 254
Leitkreis 231
Leonardo da Vinci 158, 159
Lindemann 24
lineare Exzentrizität 224, 237
Loran-System 261
- Mascheroni 157
Menaichmos 261
Mittagshöhe 114
Mollweide 154
Mondentfernung 161
Monte-Carlo-Methode 36, 74
- n-Eck, einbeschrieben 11
n-Eck, umbeschrieben 13
Nebenscheitel 208
Neuneck 16
Newton 23, 257
Nierenlithotripter 259
Nikolaus von Kues 158
Normale 252
numerische Exzentrizität 225, 237
- Papierstreifen-Konstruktion 212
Pappos 91
Papyrus Rhind 21
Pauker 10
Perihel 226
Periode 184
Pi (π) 23
Platon 21
Platonische Körper 89, 90
Polarachse 141
Polarkoordinaten 141
Pol 141
Postula 160
Pothenot 162
Produkt-Summen-Formeln 171
Projektionssatz 146
Projektionssatz im Raum 127
Ptolemaios 37, 155
Pyramiden-Methode 77
- Quadrat 8
Quadratur des Kreises 24, 157

reelle Halbachse 237
regelmäßiges n-Eck 6
Renaldini 160
Richelot 10
Riementrieb 40, 108
Rückwärtseinschneiden 162
Rutherford 22

Salinon 50
Scheibenmethode 69
Scheitel 208, 237
Scheitel-Krümmungskreise 219,
240
Schwab 19
Sechseck 9
sec 109
Seemeile 29
Segner 73
Sehnenformel 143
Schwinkel 118
Seifenblasen-Methode 78
Sekans 109
Sektorfläche 31
Shanks 22
Sharp 22
Siebeneck 16
Sinus, Name 112

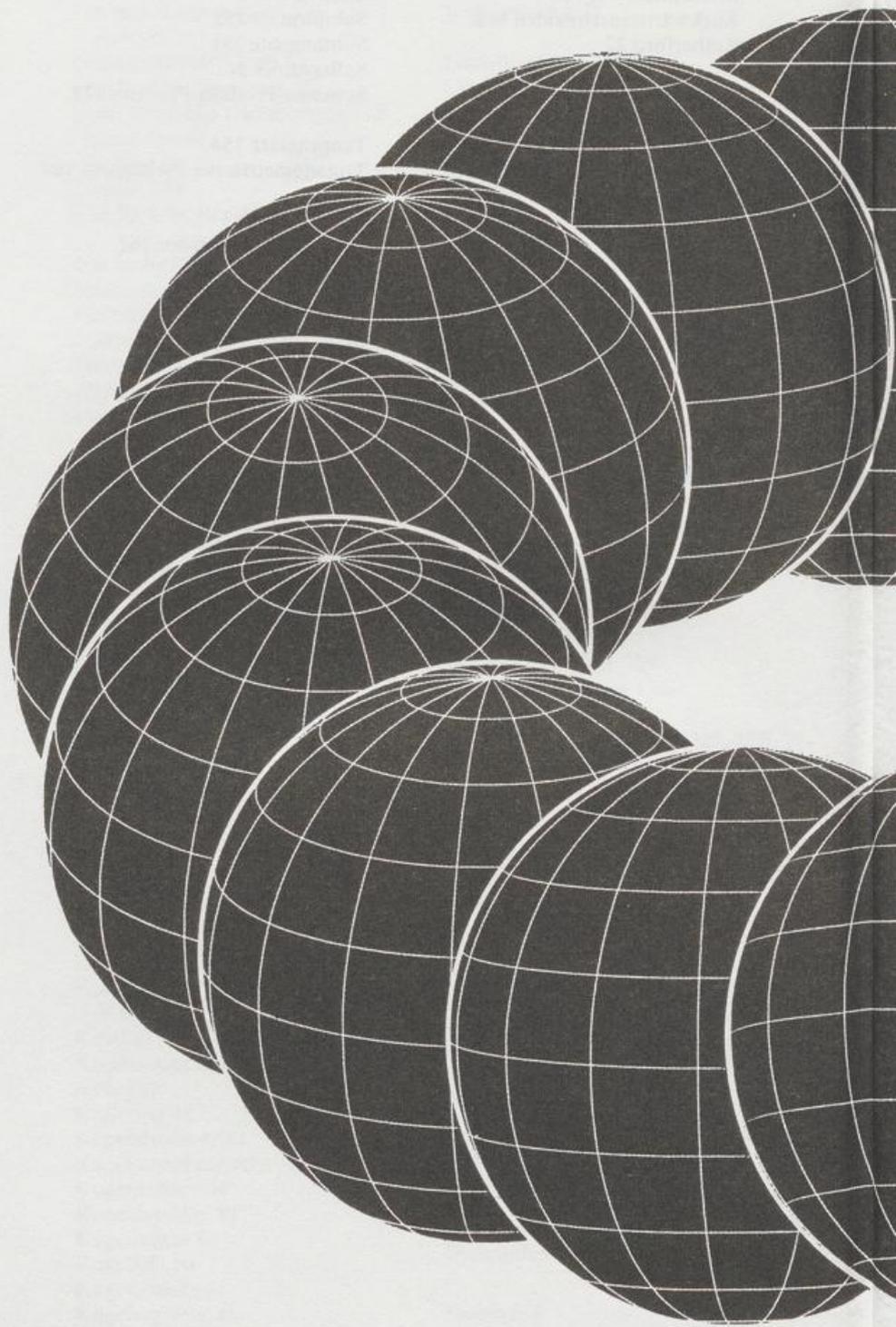
Sinussatz 142
Snellius 162, 163
Snellius-Hansen 162
Steigung 100
Sternvieleck 7
Subnormale 252
Subtangente 251
Sulbasutras 21
Summen-Produkt-Formeln 172

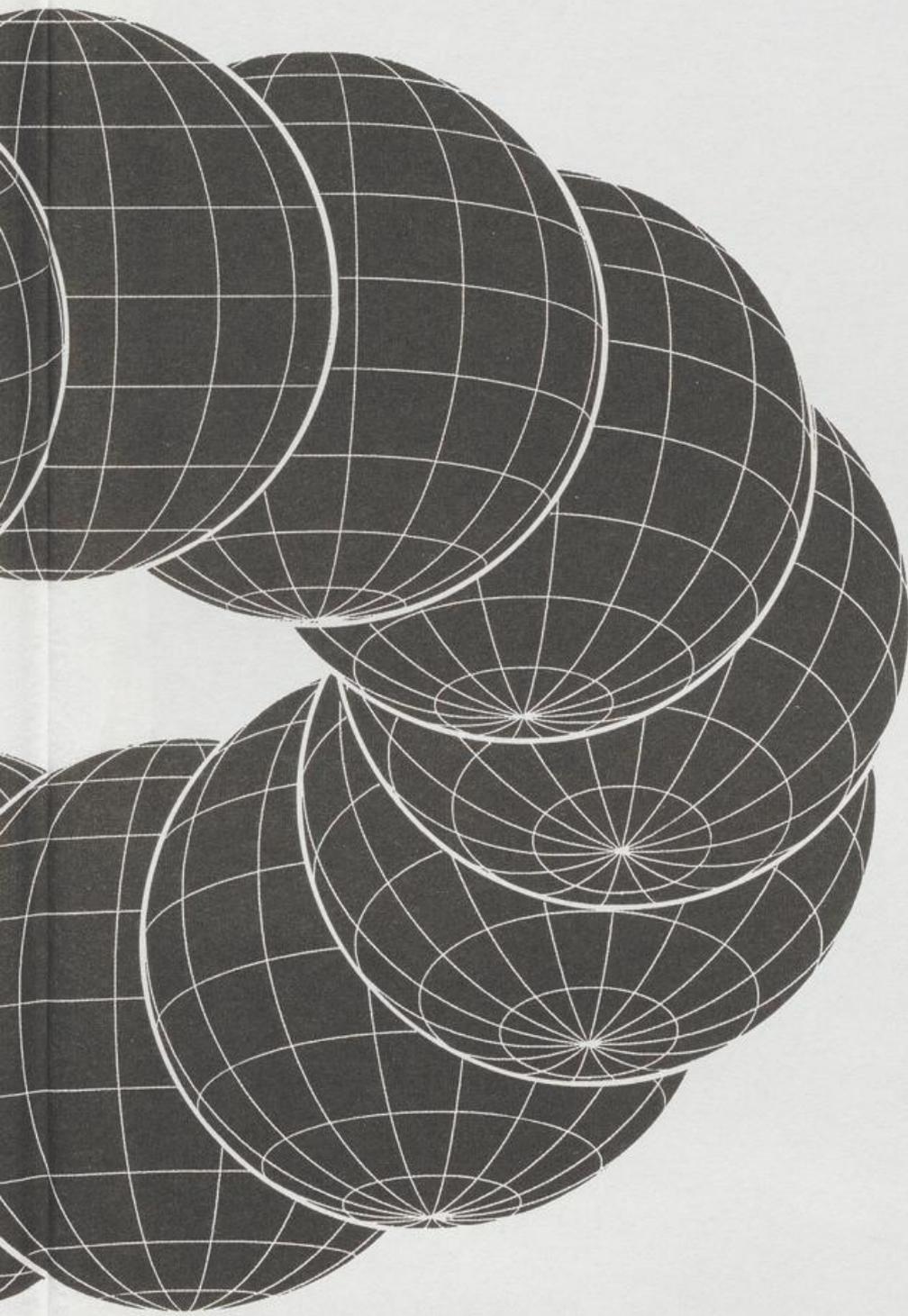
Tangenssatz 154
Trigonometrischer Pythagoras 109

Vieta 23
Vorwärtseinschneiden 162

Wallis 23
Warusfel 37
Werner 252, 262
Willi 160
Winkeldrittung 157
Würfelverdopplung 157

Zehneck 9
Zhang Heng 22
Zu Chong-Zhi 22







ISBN 3-486-03268-2



9 773486 032681

Bestell-Nr. 03268-2

10

Anschauliche Geometrie

Oldenbourg