Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

Barth · Federle · Haller

Algebra

9

Oldenbourg

Algebra
9

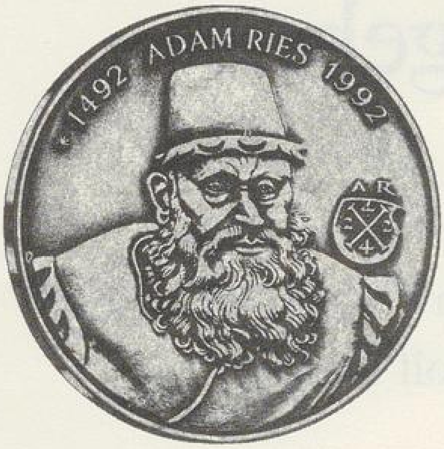
Friedrich Barth · Reinhold Federle
Rudolf Haller

Ὦ βασιλεῦ, κατὰ μὲν τὴν χώραν ὁδοί
εἰσιν ἰδιωτικαὶ καὶ βασιλικαί, ἐν δὲ
τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσίν ἐστιν ὁδὸς μία.

Durch Dein Land, o König, führen freilich
gewöhnliche Wege und Königsstraßen,
in der Mathematik aber gibt es für alle
nur einen Weg.

Menaichmos
zu Alexander dem Grossen

Oldenbourg



Adam-Ries-Preis
1993

Autoren und Verlag wurden für die Lehrbücher
Algebra 7 bis *Algebra 10*
mit dem Adam-Ries-Preis ausgezeichnet,
der vom Adam-Ries-Bund e. V.,
Annaberg-Buchholz, verliehen wird.

Zur Widmung auf Seite 1 siehe Seite 8.

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

5., verbesserte Auflage 2001 RE
Unveränderter Nachdruck 05 04 03 02 01
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Zeichnungen: Peter-Friedrich Kropf, Herrsching
Umschlag: Gert Krumbacher
Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau

ISBN 3-486-**11296**-1

Inhalt

Vorwort 7
Zur Widmung auf der Titelseite 8

1 Die reellen Zahlen 9

1.1 Das Problem der Quadratverdoppelung 10
1.2 Irrationale Zahlen; Intervallschachtelungen 14
**1.3 Rechnen mit Intervallschachtelungen 18
1.4 Die Menge der reellen Zahlen 21
**1.5 Ein Vergleich der Zahlenmengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ 25

2 Die Quadratwurzel 31

2.1 Definition der Quadratwurzel 33
**Zur Geschichte von »Wurzel« und Wurzelzeichen 34
2.2 Berechnung von Quadratwurzeln 38
2.2.1 Intervallschachtelungsverfahren 38
2.2.2 Iterationsverfahren 38
**2.2.3 Divisionsverfahren 42
**Zur Geschichte 44
2.3 Rechenregeln für Quadratwurzeln 50
**2.4 Zur Geschichte der irrationalen Zahlen 58
2.5 Wurzelgleichungen 64
2.5.1 Einfache Wurzelgleichungen 64
**2.5.2 Wurzelgleichungen mit Parametern 68

3 Die quadratische Gleichung 71

3.1 Was ist eine quadratische Gleichung? 72
**Zur Geschichte der quadratischen Gleichung 72
3.2 Spezialfälle von quadratischen Gleichungen 74
3.2.1 Die rein quadratische Gleichung 74
3.2.2 Die Konstante ist null 79
3.3 Die quadratische Ergänzung 80

3.4	Diskriminante und Lösungsformel	83
	**Zur Geschichte der Lösungsformel	86
3.5	Der Satz von VIETA	102
3.6	Weitere Textaufgaben	112
3.7	Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen	117
3.7.1	Wurzelgleichungen	117
3.7.2	Die biquadratische Gleichung	122
**3.7.3	Kubische Gleichungen	125
**3.7.4	Reziproke Gleichungen	129
**3.8	Gleichungssysteme, die auf quadratische Gleichungen führen	134
4	**Quadratfunktion und Wurzelfunktion**	143
4.1	Quadratfunktion und Normalparabel	145
**4.2	Normalparabel und Gerade	147
4.3	Die Wurzelfunktion	152
4.3.1	Definition der Wurzelfunktion	152
4.3.2	Die Umkehrfunktion	153
4.3.3	Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion	157
**4.3.4	Graph der Wurzelfunktion und Gerade	158
5	**Die allgemeine quadratische Funktion**	159
5.1	Die verschobene Normalparabel	160
5.1.1	Verschiebung in y-Richtung	160
5.1.2	Verschiebung in x-Richtung	161
5.1.3	Zusammengesetzte Verschiebung	162
5.2	Streckung der Normalparabel	165
	**Zum Namen »Parabel«	168
5.3	Die allgemeine verschobene Parabel	172
5.4	Parabeln und Geraden	176
5.4.1	Parabel und x-Achse	176
**5.4.2	Parabel und Gerade	178
**5.4.3	Parabel und Parabel	182

6 Quadratische Ungleichungen 185

6.1 Lösungsverfahren 186
6.2 Extremwertaufgaben 189

****Anhang Lineare Interpolation** 196

Register 200
Bildnachweis 202

Bildnisse von Mathematikern

Aristoteles 60.1 – Bolzano 29.1 – Cantor 26.1 – Cardano 93.1 und 141.1 – Dedekind 24.1 – Euler 101.1 – Fermat 192.1 – Galilei 175.1 – Lagrange 130.1 – de Moivre 129.1 – Ohm 99.1 – Platon 10.1 – Sylvester 84.1 – Viète 104.1

Kennzeichnung der in Bayern nicht allgemein verbindlichen Stoffgebiete

Fakultative Abschnitte sind durch zwei vorangestellte Sterne (**) gekennzeichnet.

Kennzeichnung der Aufgaben

Rote Zahlen bezeichnen Aufgaben, die auf alle Fälle bearbeitet werden sollen.
• bzw. : usw. bezeichnen Aufgaben, die etwas mehr Ausdauer erfordern, weil sie entweder schwieriger oder zeitraubender oder beides sind. Je mehr Punkte, desto mehr Mühe!
Zitiert werden die Aufgaben unter der Seite und der Nummer. So bedeutet 21/**10** die Aufgabe **10** auf Seite 21.

Nummerierung von Definitionen, Sätzen, Abbildungen und Tabellen

Die Zahl vor dem Punkt gibt die Seite an, die Zahl nach dem Punkt nummeriert auf jeder Seite. Abb. 40.2 bedeutet beispielsweise die 2. Abbildung auf Seite 40.

Vorwort

Algebra 9 soll in Fortsetzung der Bände *Algebra 7* und *8* den Teil der Algebra darstellen, der üblicherweise in der 9. Jahrgangsstufe behandelt wird. Im Zentrum stehen zwei Themen:

(1) die Einführung der **reellen Zahlen** und der Umgang mit ihnen, insbesondere das Rechnen mit **Quadratwurzeln**;

(2) die Lösung von **quadratischen Gleichungen** und in diesem Zusammenhang erste Bekanntschaft mit **quadratischen Funktionen** und ihren Graphen, den **Parabeln**.

Beide Themen spielen in der Geschichte der Mathematik eine bedeutende Rolle. Wie in den vorangegangenen Büchern ist auch hier wieder versucht worden die historischen Bezüge ausführlich und gut lesbar darzustellen. Interessierte Schüler finden auf diesen Seiten eine Vielzahl von Informationen und Anregungen, die ihnen die Algebra vielleicht etwas spannender und weniger blutleer erscheinen lassen.
Das Buch soll als Angebot verstanden werden und bietet daher an manchen Stellen auch Ausblicke und Erweiterungen, die zur Bereicherung des Unterrichts beitragen können, die aber nicht zum Pflichtstoff gehören. Die entsprechenden Abschnitte sind durch ** gekennzeichnet.
Der Aufgabenteil ist wieder sehr reichhaltig und bietet Aufgaben von der Fingerübung bis zum echten mathematischen Problem. Auch hier soll der Lehrer eine seiner Klasse und seinen Vorstellungen angemessene Auswahl treffen können. Zur Erleichterung sind die Aufgaben gekennzeichnet: Rote Zahlen bedeuten Aufgaben, die eigentlich jeder Schüler bearbeiten sollte. Die Kennzeichnung durch •, :, … weist auf Aufgaben hin, die mühsamer oder schwieriger sind als das, was üblicherweise verlangt wird. Sie sind auch als »Futter« für Schüler gedacht, denen die »normale Kost« zu wenig abverlangt. So soll das Buch sowohl für schwächere Schüler genügend Erklärungen und einfache Beispiele als auch für interessiertere Schüler die Möglichkeit zur intensiveren Beschäftigung mit der Algebra bereithalten.

München, im Mai 1989 *Die Verfasser*

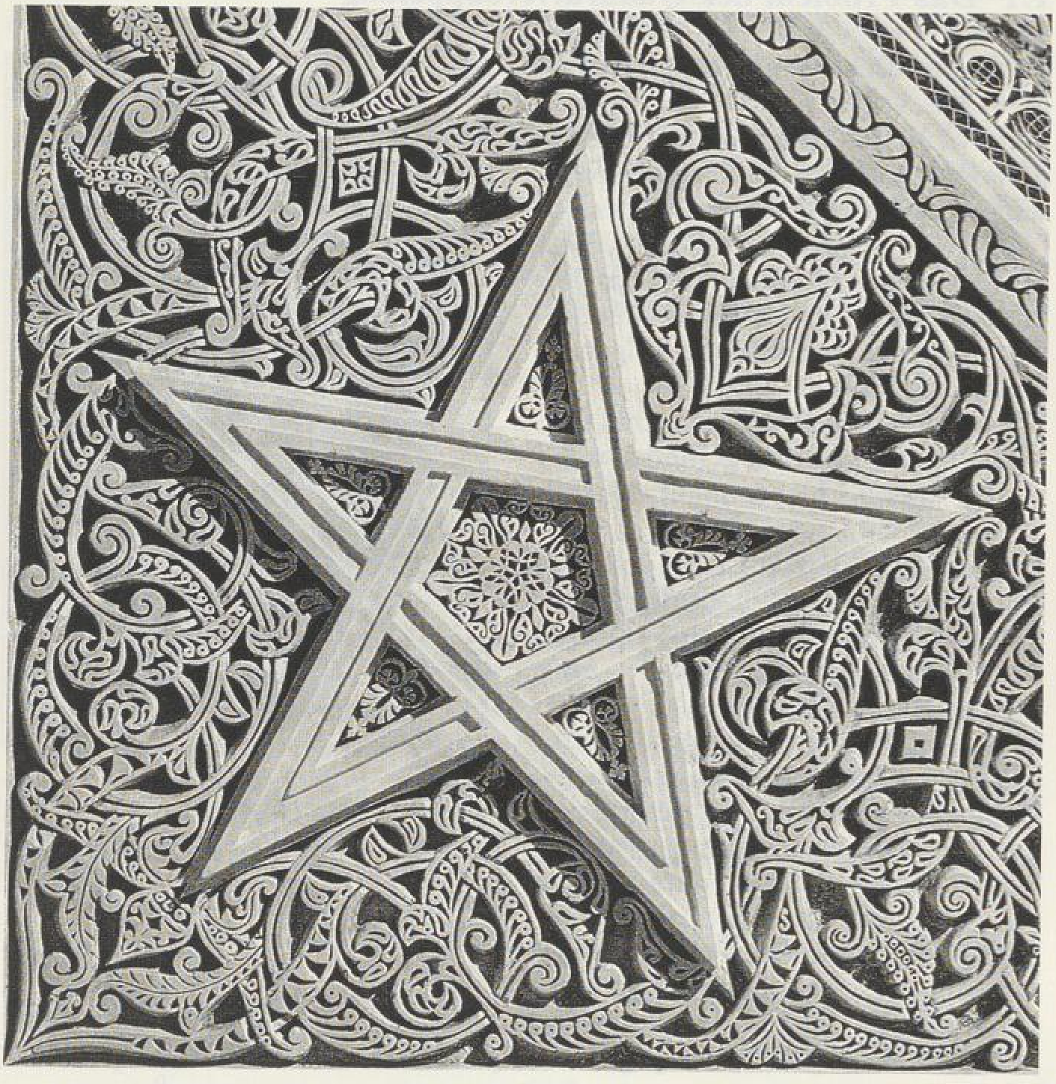
Zur Widmung auf der Titelseite

Menaichmos lebte um die Mitte des 4. Jh.s v. Chr., war ein Schüler des Eudoxos und Freund Platons. Er schuf die ersten Ansätze zur Kegelschnittlehre. Die Anekdote, Menaichmos habe auf Alexanders Frage, ob es keinen leichteren Zugang zur Mathematik gebe, die auf der Titelseite zitierte Antwort gegeben, wurde von Stobaios (5. Jh. n. Chr.) in seiner *Anthologia* überliefert. Da sonst nirgends berichtet wird, dass Alexander neben Aristoteles noch einen besonderen Lehrer für Mathematik gehabt haben soll, halten einige sie für eine Nachbildung der Erzählung, dass Euklid diese Antwort Ptolemaios I. (reg. 305–283 v. Chr.) auf dessen gleich lautende Frage gegeben habe. Andere hingegen nehmen an, dass die Menaichmos-Anekdote die ursprüngliche sei und später auf den berühmteren Euklid übertragen worden sei.
Die Anekdote über Euklid überlieferte uns der bedeutende Neuplatoniker Proklos (410/411 Byzanz – 17.4.485 Athen) in seinem *Kommentar zum I. Buch von Euklids Elementen*:
Καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιβαλὼν καὶ τῷ πρώτῳ [Πτολεμαίῳ] μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου, καὶ μέντοι καί φασιν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστιν περὶ γεωμετρίαν ὁδὸς συντομωτέρα τῆς στοιχειώσεως· ὁ δὲ ἀπεκρίνατο, μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν.

Denn Archimedes, der nach dem ersten Ptolemaios lebte, erwähnt Euklid und erzählt auch in der Tat, Ptolemaios habe ihn einmal gefragt, ob es nicht für die Mathematik einen kürzeren Weg gebe als die Lehre der *Elemente*. Er aber antwortete, es führe kein königlicher Weg zur Mathematik.

NB: Wir haben bewusst das griechische *geometria* mit *Mathematik* übersetzt; denn bis ins 17. Jh. verwendete man das Wort Geometrie im Sinne von Mathematik.

1 Die reellen Zahlen



Pentagramm – Siegel Salomonis – Drudenfuß
Gipsschnittstukkatur aus Marokko

Das magische Zeichen, das 5-mal A, das große griechische Alpha, enthält und deswegen auch Pentalpha heißt, symbolisiert das Weltall, die Vollkommenheit und auch die Gesundheit. Es diente den PYTHAGOREERN (500–350 v. Chr.) und später den NEUPLATONIKERN (3.–6. Jh. n. Chr.) als Zeichen ihres Bundes. – SALOMO, König von Israel und Juda (um 965–926 v. Chr.), galt in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung bis ins Mittelalter hinein als großer Zauberer; das Pentagramm wurde zu seinem Siegel. – Die Drude ist eine Hexe, ein weiblicher Nachtgeist, der für Alpträume und Magendrücken verantwortlich ist. Ihr Fußabdruck, der Drudenfuß, ist, auf die Schwelle gezeichnet, ein Abwehrsymbol gegen Druden, später ein allgemeines Bannzeichen gegen Geister und den Teufel (siehe GOETHE, *Faust* 1. Teil, Vers 1394ff.)

1 Die reellen Zahlen

1.1 Das Problem der Quadratverdoppelung

Der griechische Philosoph PLATON (428–348 v. Chr.) beschreibt in seinem vor 389 v. Chr. verfassten Dialog *Menon* (82b–85b) die Lehrmethode seines berühmten Lehrers SOKRATES (470–399 v. Chr.). Er schildert, wie SOKRATES einem mathematisch ungebildeten Sklaven seines Freundes MENON dazu verhilft, die folgende Aufgabe zu lösen:

Zu einem gegebenen Quadrat soll ein zweites Quadrat gefunden werden, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist.

Der Sklave schlägt zunächst vor jede Seite des gegebenen Quadrats (Abbildung 10.2) zu verdoppeln, erkennt dann aber, dass sich dabei der Flächeninhalt vervierfacht (Abbildung 10.3). Das gesuchte Quadrat darf nur halb so groß sein; man muss also die Fläche des großen Quadrates halbieren. Die Lösung, zu der SOKRATES den Sklaven anleitet, beruht darauf, dass von jedem der vier Teilquadrate die Hälfte weggenommen wird, indem man sie, wie Abbildung 10.4 zeigt, durch Diagonalen zerschneidet. ABCD ist dann das gesuchte Quadrat. Seine Seite ist die Diagonale des gegebenen Quadrats.

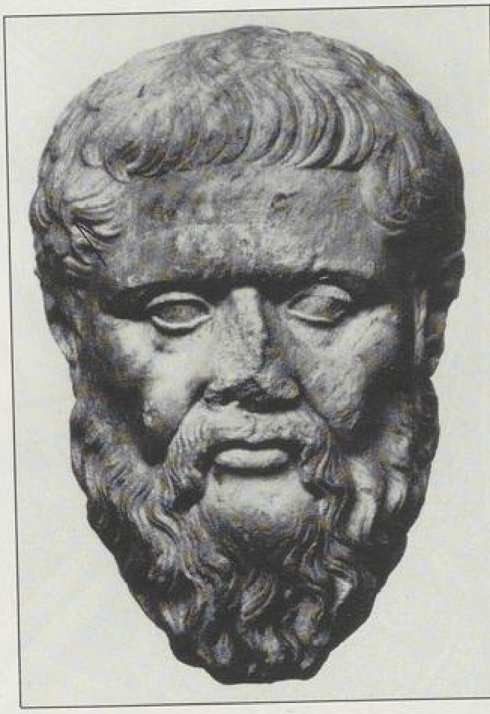


Abb. 10.1 PLATON, eigentlich ARISTOKLES (428 Athen oder Ägina – 348 Athen) Kaiserzeitliche römische Kopie nach dem Werk des SILANION, entstanden wohl bald nach 348 v. Chr. München, Glyptothek

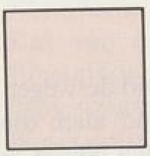


Abb. 10.2 gegebenes Quadrat

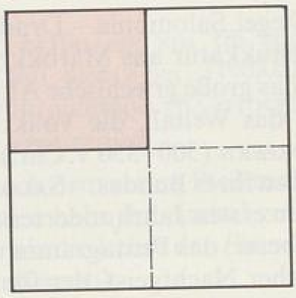


Abb. 10.3 Quadrat mit doppelter Seitenlänge

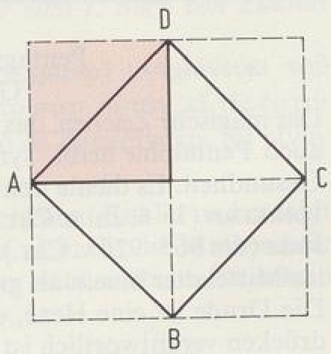


Abb. 10.4 Quadrat mit doppeltem Flächeninhalt

Uns interessiert die Frage, wie lang die Seite des Lösungsquadrats ist. Das hängt natürlich von der Größe des gegebenen Quadrats ab. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, dass es sich um das Einheitsquadrat handelt, also um das Quadrat mit der Seitenlänge 1 (d.h. 1 Längeneinheit). Sein Flächeninhalt ist damit ebenfalls 1 (d.h. 1 Flächeneinheit). Da somit das Lösungsquadrat ABCD den Flächeninhalt 2 besitzt, muss für seine Seitenlänge x gelten: $x \cdot x = 2$, kurz $x^2 = 2$.
Um die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats angeben zu können muss man also diese Gleichung lösen. Man erkennt leicht, dass x eine Zahl zwischen 1 und 2 sein muss, denn es ist $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$; also muss $1 < x < 2$ gelten. Eine genauere Eingrenzung von x erhält man, indem man die Quadrate von 1,1; 1,2; 1,3; ... berechnet; wegen $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$ gilt: $1{,}4 < x < 1{,}5$. Ebenso findet man mit Hilfe des Taschenrechners schnell die Ergebnisse

$$1{,}41 < x < 1{,}42$$
$$1{,}414 < x < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < x < 1{,}4143.$$

Können wir auf diesem Wege den genauen Wert von x finden?
Sicherlich nicht! Denn wenn man einen Dezimalbruch mit einer, zwei, drei, ... Stellen nach dem Komma quadriert, erhält man eine Zahl mit zwei, vier, sechs, ... Stellen nach dem Komma, also niemals eine ganze Zahl.* Die Gleichung $x^2 = 2$ kann somit keinen endlichen Dezimalbruch als Lösung haben.
Neben den ganzen Zahlen und den endlichen Dezimalbrüchen gehören zu der uns zur Verfügung stehenden Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auch Brüche, deren Dezimalentwicklung unendlich und periodisch ist. Das sind bekanntlich diejenigen Brüche, deren Nenner nach vollständigem Kürzen noch einen von 2 und 5 verschiedenen Primfaktor enthalten. Gibt es unter ihnen eine Lösung von $x^2 = 2$?
Angenommen, $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ wäre eine solche Lösung; dabei sei dieser Bruch vollständig gekürzt. Da x keine ganze Zahl ist, muss $q > 1$ gelten. Durch Quadrieren erhält man $x^2 = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$. Dieser Bruch kann aber keine ganze Zahl sein; denn, da p und q teilerfremd sind, lässt er sich nicht kürzen, und wegen $q > 1$ ist sein Nenner von 1 verschieden. Das heißt aber: **Es gibt keinen Bruch, dessen Quadrat den Wert 2 hat**.
Das Ergebnis unserer Überlegungen lautet somit: Die Gleichung $x^2 = 2$ ist mit rationalen Zahlen nicht lösbar. Wir sind mit den uns zur Verfügung stehenden Zahlen nicht in der Lage die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats anzugeben. Man erkennt leicht, dass es neben $x^2 = 2$ noch viele andere, ebenso einfache Gleichungen gibt, die in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar sind. Weitere Beispiele findest du in den folgenden Aufgaben.

* Wir setzen dabei voraus, dass die letzte Stelle der zu quadrierenden Zahl jeweils nicht 0 ist.

Aufgaben

1. Zeige: Die folgenden Gleichungen haben keine rationalen Lösungen.
   a) $x^2 = 3$ **b)** $x^2 = 6$ **c)** $x^2 = 8$ **d)** $x^2 = 500$

2. Die folgenden Gleichungen sind in $\mathbb{Q}$ lösbar. Gib alle Lösungen an.
   a) $x^2 = 1$ **b)** $x^2 = 4$ **c)** $x^2 = 121$ **d)** $x^2 = 625$
   e) $x^2 = \frac{9}{16}$ **f)** $x^2 = 2\frac{7}{9}$ **g)** $x^2 = 0{,}64$ **h)** $x^2 = 0{,}0004$

• **3.** Beweise: Die Gleichung $x^2 = n, n \in \mathbb{N}$, ist genau dann in $\mathbb{Q}$ lösbar, wenn n eine Quadratzahl ist.

4. Der folgende auf den Begriff »gerade Zahl« sich stützende Beweis für die Unlösbarkeit der Gleichung $x^2 = 2$ in der Menge $\mathbb{Q}$ wurde bereits von ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) in seinen *Analytica priora* (I. 23. 41a. 23–27) angedeutet und ist als Anhang zu Buch X der *Elemente* des EUKLID (um 300 v. Chr.) überliefert.

> Angenommen, der vollständig gekürzte Bruch $\frac{p}{q}$ sei eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Dann gilt
>
> $$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad \| \cdot q^2$$
> $$p^2 = 2q^2$$
>
> Daher ist p^2 und somit auch p eine gerade Zahl. Man kann deshalb $p = 2n$ setzen, mit $n \in \mathbb{N}$.
>
> $$(2n)^2 = 2q^2 \qquad \| : 2$$
> $$2n^2 = q^2$$
>
> Also ist auch q^2 und damit q eine gerade Zahl.

Begründe die angewandten Schlüsse. Erkläre, wieso die Annahme zu einem Widerspruch geführt hat und somit falsch ist.

• **5.** Der Beweis von Aufgabe **4**, bei dem die Teilbarkeit durch den Primfaktor 2 die entscheidende Rolle spielt, lässt sich auch auf andere Primfaktoren übertragen. Zeige nach dieser Methode, dass auch die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Q}$ unlösbar sind: **a)** $x^2 = 7$ **b)** $x^2 = 12$ **c)** $x^2 = 15$

6. Die Gleichung $x^2 = \frac{2}{3}$ hat keine rationale Lösung. Das kann man so beweisen: Aus $x^2 = \frac{2}{3}$ erhält man $(3x)^2 = 2 \cdot 3$ (Multiplikation mit 3^2). Mit der Substitution $z = 3x$ wird daraus $z^2 = 6$, eine in $\mathbb{Q}$ unlösbare Gleichung (vgl. Aufgabe **1b**).
   Begründe mit dieser Methode die Unlösbarkeit der Gleichungen
   a) $x^2 = \frac{1}{6}$, **b)** $x^2 = 2\frac{2}{7}$, **c)** $x^2 = 0{,}2$, **d)** $x^2 = 1{,}25$
   in der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

•• **7.** Beweise: Die Gleichung $x^2 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, ist in $\mathbb{Q}$ genau dann lösbar, wenn $p \cdot q$ eine Quadratzahl ist. (Hinweis: Beachte die Aufgaben **6** und **3**.)

8. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a, $a \in \mathbb{Q}^+$.

a) Bestimme die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt **1)** 4-mal, **2)** 49-mal, **3)** 2,25-mal, **4)** $\frac{25}{36}$-mal so groß ist.

b) Gibt es eine rationale Zahl, welche die Seitenlänge eines Quadrats mit dem **1)** 5fachen, **2)** 16fachen, **3)** 1,6fachen Flächeninhalt angibt?

9. Kannst du mit Hilfe rationaler Zahlen angeben, wie lang die Seiten folgender Figur sind?

a) Quadrat mit **1)** $15\,\text{m}^2$, **2)** $16\,\text{cm}^2$, **3)** $2{,}3\,\text{dm}^2$ Flächeninhalt

b) Rechteck mit dem Seitenverhältnis $2:3$ und **1)** $36\,\text{cm}^2$, **2)** $324\,\text{mm}^2$, **3)** $0{,}24\,\text{m}^2$ Flächeninhalt

10. Dem Problem der Quadratverdoppelung entspricht bei den Körpern das der Würfelverdoppelung:

Zu einem gegebenen Würfel soll ein zweiter Würfel gefunden werden, dessen Rauminhalt doppelt so groß ist.

Diese Aufgabe wird als **delisches Problem** bezeichnet aufgrund einer Erzählung des ERATOSTHENES (3. Jh. v. Chr.):
Als auf der Insel Delos die Pest wütete, wandten sich die Bewohner Hilfe suchend an Apollo. Sie erhielten den Auftrag, den würfelförmigen Altar in seinem Heiligtum zu verdoppeln, aber dabei die Gestalt zu bewahren.

a) Zeige, dass die Kantenlänge x eines Würfels, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das des Einheitswürfels, die Gleichung $x^3 = 2$ erfüllen muss.

•**b)** Begründe nach der bei $x^2 = 2$ angewandten Methode, dass auch die Gleichung $x^3 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar ist.

•**11.** Die Tatsache, dass es Streckenpaare gibt, deren Verhältnis sich nicht durch eine rationale Zahl ausdrücken lässt, wurde zuerst von den Griechen erkannt. Die PYTHAGOREER, deren Bundeszeichen das regelmäßige Fünfeck war (vgl. Abbildung 9.1), entdeckten gerade an diesem Fünfeck, dass – ebenso wie beim Quadrat – Seite und Diagonale kein rationales Verhältnis haben.

Aus der Ähnlichkeit der Fünfecke ABCDE und A′B′C′D′E′ in Abbildung 13.1 folgt, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale in beiden Fällen gleich ist.

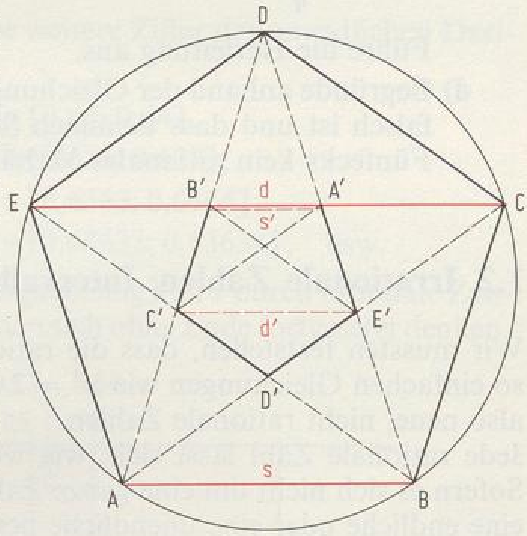


Abb. 13.1 Das regelmäßige Fünfeck

Es gilt also

$$\frac{d}{s} = \frac{d'}{s'}. \tag{1}$$

a) Weise nach, dass sich d' und s' folgendermaßen durch d und s ausdrücken lassen:

$$d' = d - s \quad \text{und} \quad s' = 2s - d \tag{2}$$

(Hinweis: Welche besondere Eigenschaft haben die Vierecke ABCB′, ABA′E, C′E′CA′ und C′E′B′E?)
Begründe sodann die Abschätzung

$$s < d < 2s. \tag{3}$$

b) Zeige mit Hilfe von (2), dass die Gleichung (1) durch die Substitution $x := \frac{d}{s}$ folgende Form erhält:

$$x = \frac{x-1}{2-x} \tag{4}$$

Welche Abschätzung für x ergibt sich aus (3)?

c) Aus der Annahme, ein Bruch $\frac{p}{q}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q sei Lösung der Gleichung (4), lässt sich folgende Gleichung herleiten:

$$p + q = \frac{p^2}{q} \tag{5}$$

Führe die Herleitung aus.

d) Begründe anhand der Gleichung (5), dass die in **c** gemachte Annahme falsch ist und dass demnach Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks kein rationales Verhältnis haben.

1.2 Irrationale Zahlen; Intervallschachtelungen

Wir mussten feststellen, dass die rationalen Zahlen schon zum Lösen von so einfachen Gleichungen wie $x^2 = 2$ nicht ausreichen. Dazu benötigen wir also neue, nicht rationale Zahlen.
Jede rationale Zahl lässt sich, wie wir wissen, als Dezimalzahl schreiben. Sofern es sich nicht um eine ganze Zahl handelt, erhält man dabei entweder eine endliche oder eine unendliche periodische Dezimalzahl.

Beispiele:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$; $\quad \frac{29}{22} = 1{,}3\overline{18}$; $\quad 3\frac{7}{100} = 3{,}07$

Natürlich kann man sich auch Dezimalzahlen vorstellen, bei denen die Ziffernfolge hinter dem Komma unendlich und nicht periodisch ist, zum Beispiel
0,63 633 6333 63333… oder
5,18 1188 111888 11118888…,
wobei man sich die Ziffernfolge nach der leicht erkennbaren Gesetzmäßigkeit endlos fortgesetzt denken muss. Dass man auch mit solchen Gebilden ebenso rechnen kann wie mit den rationalen Zahlen, ist keineswegs selbstverständlich. Darauf soll erst im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden. Diese neuen nicht rationalen Zahlen werden in der mathematischen Fachsprache als **irrationale*** Zahlen bezeichnet. Es gilt also

> **Definition 15.1:** Eine Zahl, deren Dezimalentwicklung unendlich und nicht periodisch ist, heißt **irrationale Zahl**.

Es ist nicht schwer, sich eine Vorstellung davon zu machen, wie die neuen irrationalen Zahlen in die bekannten rationalen Zahlen einzuordnen sind. Als Beispiel betrachten wir die irrationale Zahl $z = 0{,}63\,633\,6333\ldots$ und vergleichen sie mit geeigneten rationalen Zahlen. Die Ziffer 0 vor dem Komma sagt uns, dass z zwischen den ganzen Zahlen 0 und 1, also im Intervall $[0; 1]$ liegen soll:

$$0 \leqq z \leqq 1 \quad \text{d.h.} \quad z \in [0; 1]$$

Nimmt man die erste Stelle nach dem Komma hinzu, so ergibt sich die Abschätzung

$$0{,}6 \leqq z \leqq 0{,}7 \quad \text{d.h.} \quad z \in [0{,}6; 0{,}7].$$

Indem man so fortfährt und jeweils eine weitere Ziffer der unendlichen Dezimalzahl berücksichtigt, erhält man

$$\begin{aligned} 0{,}63 &\leqq z \leqq 0{,}64 && \text{d.h.} \quad z \in [0{,}63; 0{,}64], \\ 0{,}636 &\leqq z \leqq 0{,}637 && \text{d.h.} \quad z \in [0{,}636; 0{,}637], \\ 0{,}6363 &\leqq z \leqq 0{,}6364 && \text{d.h.} \quad z \in [0{,}6363; 0{,}6364], \\ 0{,}63633 &\leqq z \leqq 0{,}63634 && \text{d.h.} \quad z \in [0{,}63633; 0{,}63634], \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Man erreicht so eine immer schärfere Eingrenzung von z durch rationale Zahlen. Die Folge der Intervalle für z muss man sich ohne Ende fortgesetzt denken.

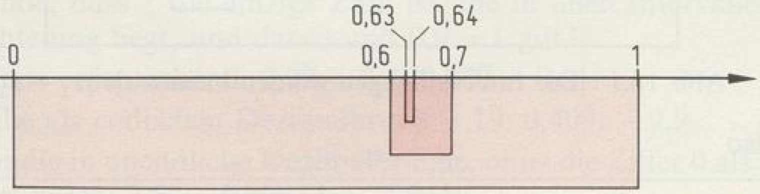


Abb. 15.1 Intervalle für $z = 0{,}636336333\ldots$

* irrational = nicht rational. Zur Geschichte dieses Wortes siehe Seite 63.

Man erkennt leicht (Abbildung 15.1), dass diese Intervalle »ineinander geschachtelt« sind, d. h., dass das jeweils nächste ganz im vorausgehenden enthalten ist. Die Längen dieser Intervalle sind der Reihe nach $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$; sie nehmen schnell ab und werden beliebig klein, d. h., jede positive Zahl, auch wenn sie noch so klein ist, wird von den Intervalllängen schließlich unterschritten. Für eine solche Intervallfolge führt man eine passende Bezeichnung ein:

Definition 16.1: Eine Folge von unendlich vielen abgeschlossenen Intervallen, bei welcher
(1) jedes Intervall in allen vorangehenden enthalten ist und
(2) die Intervallängen beliebig klein werden,
heißt **Intervallschachtelung**.

Das vorausgehende Beispiel zeigt, dass und wie man zu einer irrationalen Zahl eine Intervallschachtelung angeben kann. Aber auch für rationale Zahlen gibt es Intervallschachtelungen. Das zeigen die folgenden

Beispiele:

1) $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$
Intervallschachtelung: $[0; 1]$, $[0{,}6; 0{,}7]$, $[0{,}66; 0{,}67]$, $[0{,}666; 0{,}667]$, …

2) $1\frac{7}{22} = 1{,}3\overline{18}$
Intervallschachtelung:
$[1; 2]$, $[1{,}3; 1{,}4]$, $[1{,}31; 1{,}32]$, $[1{,}318; 1{,}319]$, $[1{,}3181; 1{,}3182]$, …

3) $2{,}3 = 2{,}3\overline{0}$(!)
Intervallschachtelung: $[2; 3]$, $[2{,}3; 2{,}4]$, $[2{,}30; 2{,}31]$, $[2{,}300; 2{,}301]$, …

Man kann also für alle Zahlen, gleichgültig ob rational oder irrational, Intervallschachtelungen angeben. Wichtig ist, dass durch eine solche Schachtelung die entsprechende Zahl eindeutig bestimmt ist. Es können nämlich niemals zwei verschiedene Zahlen allen Intervallen einer Intervallschachtelung angehören. Denn ein Intervall, in dem zwei verschiedene Zahlen z_1 und z_2 liegen, muss mindestens eine Länge $|z_1 - z_2|$ haben. Diese positive Zahl wird aber bei einer Intervallschachtelung von den Intervalllängen schließlich unterschritten, da diese ja beliebig klein werden (Abbildung 16.1).

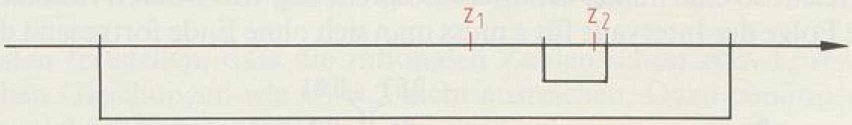


Abb. 16.1 Die Intervalllängen werden kleiner als $|z_1 - z_2|$.

Es gilt also

Satz 16.1: Jede rationale oder irrationale Zahl kann man durch eine Intervallschachtelung eindeutig festlegen.

Aufgaben

1. Entwickle die folgenden Zahlen in Dezimalbrüche:

a) $\frac{7}{25}$ **b)** $\frac{91}{35}$ **c)** $\frac{35}{91}$ **d)** $\frac{8}{15}$ **e)** $\frac{9}{15}$
f) $\frac{15}{32}$ **g)** $\frac{1}{17}$ **h)** $9\frac{10}{11}$ **i)** $\frac{53}{360}$ **k)** $\frac{54}{360}$

2. Gib drei neue Beispiele für unendliche nicht periodische Dezimalbrüche an. Beschreibe jeweils die Regel, nach der die Ziffernfolge sich endlos fortsetzen soll.

3. Begründe, dass die folgenden unendlichen Dezimalzahlen irrational sind. (Hinweis: Untersuche das Auftreten der Ziffer 0. Gibt es beliebig lange Abschnitte, die nur aus Nullen bestehen?)

a) $x = 0{,}12345678910111213\ldots$; d.h., die Ziffernfolge nach dem Komma entsteht durch »Hintereinanderschreiben aller natürlichen Zahlen«.

b) $y = 0{,}149162536496481100121\ldots$; d.h., die Ziffernfolge nach dem Komma entsteht durch »Hintereinanderschreiben aller Quadratzahlen«.

c) $z = 0{,}1\,2\,6\,24\,120\,720\,5040\ldots$; der k-te Abschnitt der Ziffernfolge nach dem Komma ergibt sich hier durch die Berechnung des Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, wofür man kurz $k!$ schreibt, gelesen »k Fakultät«.

4. Welche der folgenden Dezimalzahlen stellen irrationale Zahlen dar? (Die Ziffernfolge soll sich nach der erkennbaren Gesetzmäßigkeit endlos fortsetzen.)

a) $0{,}367999\ldots$ **b)** $-1{,}343443444\ldots$ **c)** $5{,}211221122211\ldots$
d) $-7{,}727727727\ldots$ **e)** $0{,}204080160\ldots$ **f)** $-4{,}32100000\ldots$

5. Stelle fest, ob die angegebene Intervallfolge eine Intervallschachtelung ist.

a) $[5; 6], [5{,}6; 5{,}7], [5{,}66; 5{,}67], [5{,}666; 5{,}667], \ldots$
b) $[0; 2], [0{,}9; 1{,}1], [0{,}99; 1{,}01], [0{,}999; 1{,}001], \ldots$
c) $[3; 3{,}5], [3; 3{,}05], [3; 3{,}005], [3; 3{,}0005], \ldots$
d) $[1; 2], [2; 2{,}1], [3; 3{,}01], [4; 4{,}001], \ldots$
e) $[-2; -1], [-2{,}1; -1{,}9], [-2{,}11; -1{,}99], [-2{,}111; -1{,}999], \ldots$
f) $[-1; 2], [-0{,}1; 0{,}2], [-0{,}01; 0{,}02], [-0{,}001; 0{,}002], \ldots$

• **6. a)** Gib eine Intervallschachtelung für die Zahl $0{,}\overline{9}$ an.

b) Begründe, dass 1 die einzige Zahl ist, die in allen Intervallen dieser Schachtelung liegt, und dass somit $0{,}\overline{9} = 1$ gilt.

c) Begründe entsprechend: $0{,}0\overline{9} = 0{,}1$; $0{,}00\overline{9} = 0{,}01$.

d) Schreibe als endlichen Dezimalbruch: $1{,}1\overline{9}$; $0{,}40\overline{9}$; $-9{,}\overline{9}$.

e) Verwandle in unendliche Dezimalbrüche, ohne die Ziffer 0 als Periode zu verwenden: $2{,}5$; $-0{,}89$; 11; $-2{,}011$.

• **7.** Bei den bisher betrachteten Beispielen von Intervallschachtelungen entstand das jeweils nächste Intervall durch Zehnteilung des vorausgehenden. Manchmal werden auch andere Unterteilungsverfahren benützt.

a) Beschreibe die Regel, nach der die Intervallfolge $[0; 1]$, $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, $[\frac{4}{9}; \frac{5}{9}]$, $[\frac{13}{27}; \frac{14}{27}]$, $[\frac{40}{81}; \frac{41}{81}]$, ... konstruiert ist. Stelle die ersten vier Intervalle auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 9 cm dar.

b) Begründe, dass die in **a** angegebene Intervallfolge eine Intervallschachtelung ist. Welche Zahl wird durch sie festgelegt?

c) Vom »Halbierungsverfahren« spricht man, wenn das jeweils nächste Intervall eine der Hälften des vorausgehenden ist. Berechne die ersten fünf Intervalle einer Intervallschachtelung für die Zahl $\frac{2}{3}$, indem du mit $[0; 1]$ beginnst und die weiteren Intervalle nach dem Halbierungsverfahren bestimmst.

8. Gib Intervalle der Länge 1; 0,1; 0,01 und 0,001 an, in denen eine positive Lösung der Gleichung

a) $x^2 = 3$, **b)** $x^2 = 0{,}5$, **c)** $x^2 = 200$, **d)** $x^2 = \frac{4}{11}$

liegen müßte.

•9. Bestimme Intervalle mit den Längen 1; 0,1; 0,01 und 0,001, in denen die Kantenlänge eines Würfels liegen müsste, dessen Volumen n-mal so groß wie das des Einheitswürfels ist.

a) $n = 2$ **b)** $n = 10$ **c)** $n = 100$

**1.3. Rechnen mit Intervallschachtelungen

Wir haben schon erwähnt, dass man auch mit den irrationalen Zahlen sinnvoll rechnen kann. Das ist keineswegs selbstverständlich. Schon bei der Frage, wie mit ihnen die verschiedenen Rechenarten auszuführen sind, stößt man auf Schwierigkeiten. Da es sich um unendliche Dezimalzahlen handelt, kann man ja z. B. beim Addieren nicht wie bei endlichen Dezimalzahlen mit der letzten Stelle beginnen. Bei den periodischen Dezimalzahlen umgeht man dieses Problem, indem man sie durch die entsprechenden gewöhnlichen Brüche ersetzt, z. B. $0{,}\overline{6}$ durch $\frac{2}{3}$. Bei den unendlichen nicht periodischen Dezimalzahlen scheidet diese Möglichkeit aus. Für das Rechnen mit ihnen benötigen wir andere Hilfsmittel. Als solche eignen sich z. B. die Intervallschachtelungen. Mit ihnen kann man die Rechenoperationen auch für irrationale Zahlen definieren und die weitere Gültigkeit der Rechengesetze nachweisen. Dies soll für die Addition näher erläutert werden. Zunächst betrachten wir ein Beispiel mit zwei rationalen Summanden.

Beispiel 1:

$a = \frac{2}{3}$; $b = 2{,}3 \Rightarrow a + b = \frac{2}{3} + 2{,}3 = \frac{2}{3} + 2\frac{3}{10} = 2\frac{29}{30}$

Intervallschachtelungen für a und b haben wir bereits im vorausgehenden Abschnitt angegeben (vgl. Seite 16). Aus deren ersten Intervallen erkennt man, dass $0 \leqq a \leqq 1$ und $2 \leqq b \leqq 3$ gilt. Durch Addition dieser Ungleichungen erhält man

$2 \leqq a + b \leqq 4$ d.h., $a + b \in [2; 4]$.

Analog erhält man aus den zweiten, dritten, vierten, ... Intervallen

$0{,}6 + 2{,}3 \leqq a + b \leqq 0{,}7 + 2{,}4$ d.h. $a + b \in [2{,}9; 3{,}1]$

$0{,}66 + 2{,}30 \leqq a + b \leqq 0{,}67 + 2{,}31$ d.h. $a + b \in [2{,}96; 2{,}98]$

$0{,}666 + 2{,}300 \leqq a + b \leqq 0{,}667 + 2{,}301$ d.h. $a + b \in [2{,}966; 2{,}968]$ usw.

Man erkennt leicht, dass die rechts stehenden Intervalle für $a + b$ wieder eine Intervallschachtelung bilden. Durch sie ist die Zahl $a + b$ eindeutig festgelegt. Aus der Dezimalentwicklung von $a + b = 2\frac{20}{30} = 2{,}9\overline{6}$ erkennt man ebenfalls, dass $a + b$ jedem Intervall dieser Schachtelung angehört.

Das vorausgehende Beispiel zeigt, wie man aus Intervallschachtelungen für zwei Zahlen a und b durch Addition entsprechender Intervallgrenzen wieder eine Intervallschachtelung für die Summe $a + b$ erhält. Der Vorteil dieser an sich umständlichen Additionsmethode liegt darin, dass man sie auch auf irrationale Summanden anwenden kann.

Beispiel 2:

$z_1 = 0{,}636336333\ldots;\quad z_2 = 5{,}181188111888\ldots$

Intervallschachtelung für z_1:

$[0; 1], [0{,}6; 0{,}7], [0{,}63; 0{,}64], [0{,}636; 0{,}637], [0{,}6363; 0{,}6364], \ldots$

Intervallschachtelung für z_2:

$[5; 6], [5{,}1; 5{,}2], [5{,}18; 5{,}19], [5{,}181; 5{,}182], [5{,}1811; 5{,}1812], \ldots$

Durch Addieren entsprechender Intervallgrenzen erhält man die Intervallfolge

$[5; 7], [5{,}7; 5{,}9], [5{,}81; 5{,}83], [5{,}817; 5{,}819], [5{,}8174; 5{,}8176], \ldots$

Dies ist wieder eine Intervallschachtelung, durch welche die Summe $z_1 + z_2$ bestimmt ist. Ihre Dezimalentwicklung beginnt mit 5,817; man kann durch fortgesetzte Intervalladdition beliebig viele weitere Dezimalen berechnen.

Allgemein gilt: Zwei Zahlen a und b kann man addieren, indem man für sie Intervallschachtelungen $[a_1; A_1]$, $[a_2; A_2]$, $[a_3; A_3], \ldots$ bzw. $[b_1; B_1]$, $[b_2; B_2]$, $[b_3; B_3], \ldots$ aufstellt und aus den Intervallpaaren $[a_n; A_n]$, $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, die Intervalle $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ berechnet. Diese bilden wieder eine Intervallschachtelung, wie du anhand der Aufgabe 20/**6** begründen kannst.
Da aus den Ungleichungen $a_n \leqq a \leqq A_n$ und $b_n \leqq b \leqq B_n$ die Doppelungleichung $a_n + b_n \leqq a + b \leqq A_n + B_n$ folgt, liegt die Summe $a + b$ in jedem der Intervalle $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ und ist damit durch diese Intervallschachtelung eindeutig bestimmt.
Da die bei Vertauschung der Summanden a und b erhaltenen Intervalle $[b_n + a_n; B_n + A_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dieselbe Intervallschachtelung liefern, gilt $a + b = b + a$, d.h. das Kommutativgesetz der Addition für beliebige, also auch für irrationale Zahlen. Ebenso kann man zeigen, dass auch die übrigen Rechengesetze der Addition gültig bleiben.

Auch die Multiplikation von rationalen und irrationalen Zahlen kann man mit Hilfe von Intervallschachtelungen durchführen. Es zeigt sich, dass auch für sie die bekannten Rechengesetze gültig bleiben (vgl. die Aufgaben 20/7 bis 21/**10**).

Aufgaben

1. Gib für a und b Intervallschachtelungen an und berechne daraus die ersten fünf Intervalle einer Schachtelung für $a+b$. Gib die Dezimalentwicklung von $a+b$ an, soweit sie durch die berechneten Intervalle gesichert ist.

a) $a = 0{,}373373337\ldots$ und $b = \frac{7}{11}$
b) $a = 2{,}0408016\ldots$ und $b = 1{,}505505550\ldots$
c) $a = 2{,}\overline{039}$ und $b = -1{,}808008000\ldots$
d) $a = -0{,}771771177111\ldots$ und $b = -3{,}141144111444\ldots$

2. Die Subtraktion zweier Zahlen lässt sich nach der Regel $a - b = a + (-b)$ auf die Addition zurückführen. Berechne so die ersten fünf Intervalle einer Schachtelung für $a - b$ mit den Zahlen

a) von Aufgabe **1a**, **b)** von Aufgabe **1d**.

3. a) Berechne die Summe der Irrationalzahlen $z_1 = 0{,}151151115\ldots$ und $z_2 = 2{,}626626662\ldots$ Ist das Ergebnis wieder eine irrationale Zahl?
b) Gib zwei irrationale Zahlen an, deren Summe null ist.

4. a) Welche Zahl muss man zu $0{,}585585558\ldots$ addieren um 1 zu erhalten? Ist die gesuchte Zahl rational oder irrational?
b) Welche Zahl muss man von $0{,}585585558\ldots$ subtrahieren um $0{,}252252225\ldots$ zu erhalten? Handelt es sich wieder um eine irrationale Zahl?

•5. Beweise, dass die Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl stets irrational ist. (Hinweis: Welche Folgerung für b ergibt sich aus $a + b = c$, wenn man annimmt, dass a und c rational sind?)

••6. $[a_n; A_n]$ bzw. $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, seien Intervallschachtelungen.
a) Beweise, dass für jede natürliche Zahl n gilt: Das Intervall $[a_{n+1} + b_{n+1}; A_{n+1} + B_{n+1}]$ liegt ganz in $[a_n + b_n; A_n + B_n]$.
b) Zeige, dass die Länge des Intervalls $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ die Summe der Längen von $[a_n; A_n]$ und $[b_n; B_n]$ ist.
Begründe damit, dass die Längen der Intervalle $[a_n + b_n; a_n + B_n]$ mit wachsendem n beliebig klein werden.

7. a) Berechne mit den auf Seite 16 angegebenen Intervallschachtelungen für $a = \frac{2}{3}$ und $b = 2{,}3$ die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ für $n = 1$ bis $n = 4$. Prüfe, ob sie ineinander geschachtelt sind und ob die Zahl $a \cdot b$ in jedem dieser Intervalle liegt.

b) Berechne die Längen der in **a** bestimmten Intervalle.

c) Sprechen die Ergebnisse von **a** und **b** dafür, dass die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ eine Intervallschachtelung für $a \cdot b$ bilden?

8. a) Stelle für die beiden Irrationalzahlen $a = 1{,}505505550\ldots$ und $b = 0{,}20406080\ldots$ Intervallschachtelungen auf und berechne die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ bis $n = 4$.

b) Zeige, dass diese Intervalle ineinander geschachtelt sind, und berechne ihre Längen.

9. Wenn $[a_n; A_n]$ und $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, Intervallschachtelungen mit *positiven* Intervallgrenzen sind, dann bilden die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ wieder eine Intervallschachtelung. Der nicht ganz einfache Beweis dafür beruht auf den folgenden Schlüssen. Erläutere sie!

a) Aus $a_n < A_n$ und $b_n < B_n$ folgt $a_n b_n < A_n B_n$; also ist $[a_n b_n; A_n B_n]$ ein Intervall.

b) Aus $a_n \leqq a_{n+1}$ und $b_n \leqq b_{n+1}$ folgt $a_n b_n \leqq a_{n+1} b_{n+1}$, aus $A_n \geqq A_{n+1}$ und $B_n \geqq B_{n+1}$ folgt $A_n B_n \geqq A_{n+1} B_{n+1}$.
Daher gilt: $[a_{n+1} b_{n+1}; A_{n+1} B_{n+1}] \subset [a_n b_n; A_n B_n]$.

c) Für die Länge des Intervalls $[a_n b_n; A_n B_n]$ gilt:
$$A_n B_n - a_n b_n = A_n(B_n - b_n) + b_n(A_n - a_n) < A_1(B_n - b_n) + B_1(A_n - a_n)$$
Da mit wachsendem n die Werte der geklammerten Terme beliebig klein werden, gilt dies auch für die Intervallänge.

10. Welche einfachere Form ergibt sich für die Abschätzung in Aufgabe **9c**, wenn die beiden Intervallschachtelungen nach der Zehnteilungsmethode konstruiert sind und die ersten Intervalle die Länge 1 haben?

• **11.** a) Gib für $a = -\frac{4}{3}$ und $b = -3{,}6$ Intervallschachtelungen an und berechne daraus die ersten vier Intervalle für das Produkt $a \cdot b$.

b) Erkläre, warum bei Intervallschachtelungen mit *negativen* Intervallgrenzen die Intervalle der Produktschachtelung die Form $[A_n \cdot B_n; a_n \cdot b_n]$ haben.

1.4 Die Menge der reellen Zahlen

Die rationalen und die irrationalen Zahlen werden unter dem gemeinsamen Namen **reelle Zahlen*** zusammengefasst.

* Das Fachwort **reell** geht auf René DESCARTES (1596–1650) zurück. Er unterteilte 1637 in seiner *La Géométrie* die Lösungen von nicht linearen Gleichungen (wie z. B. $ax^2 + bx + c = 0$) in wirkliche und nur denkbare. Das französische Wort für wirklich ist *réel*, das auf ein erst im Mittelalter auftauchendes lateinisches *realis* zurückgeht, das zu *res = Sache* gebildet worden war. Mit *realis* wird DESCARTES' *réel* 1649 in der lateinischen Übersetzung seiner *La Géométrie* wiedergegeben. Wann aus *realis* das deutsche Fachwort *reell* entstand, konnten wir nicht feststellen. Nach 1831 ist es auf alle Fälle bei Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) belegt.

Man verwendet folgende Bezeichnungen:

Definition 22.1:
$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$ = Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$ = Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$ = Menge der nicht negativen reellen Zahlen

Für das Rechnen mit den reellen Zahlen gelten die schon bekannten Rechengesetze, die wir in der folgenden Tabelle noch einmal zusammenstellen.

Für reelle Zahlen a, b, c gelten folgende Rechengesetze:		
Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**	**Bezeichnungen**
(E_+) $a+b\in\mathbb{R}$	$(E_\cdot)$ $a\cdot b\in\mathbb{R}$	**Existenz der Summe/des Produkts**
(K_+) $a+b=b+a$	$(K_\cdot)$ $a\cdot b=b\cdot a$	**Kommutativgesetz**
(A_+) $(a+b)+c= \\ =a+(b+c)$	$(A_\cdot)$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	**Assoziativgesetz**
(N_+) $a+0=a$	$(N_\cdot)$ $a\cdot 1=a$	**Existenz des neutralen Elements**
(I_+) $a+(-a)=0$	$(I_\cdot)$ $a\cdot\frac{1}{a}=1$, falls $a\neq 0$	**Existenz des inversen Elements**
(D) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$		**Distributivgesetz**
$a<b \Rightarrow a+c<b+c$	$\left.\begin{matrix}a<b\\c>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$	**Monotoniegesetz**
	$\left.\begin{matrix}a<b\\c<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$	**Umkehrung der Monotonie**

Jede reelle Zahl x lässt sich durch eine Intervallschachtelung darstellen. Da deren Intervalle beliebig klein werden, ziehen sie sich auf der Zahlengeraden auf einen Punkt zusammen, den wir ebenfalls mit x bezeichnen. Jeder reellen Zahl ist somit eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet.

Es stellt sich nun die Frage:
Gehört umgekehrt auch zu jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl? Solange man nur die rationalen Zahlen zur Verfügung hatte, musste man diese Frage verneinen! Zum Beispiel zeigt Abbildung 23.1 die Konstruktion eines Punktes P der Zahlengeraden, zu dem keine rationale Zahl gehört.

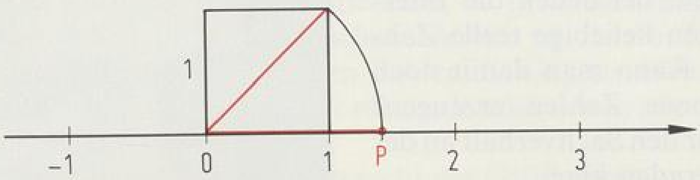


Abb. 23.1 Konstruktion eines »nicht rationalen Punktes«

Nach der Einführung der irrationalen Zahlen muss aber die oben gestellte Frage anders beantwortet werden: Zu jedem Punkt P der Zahlengeraden gehört eine reelle Zahl.

Dies kann man so begründen:
Wir betrachten zunächst die den ganzen Zahlen zugeordneten Punkte. Es kann sein, dass P einer von ihnen ist; dann gehört zu P eine ganze Zahl. Andernfalls liegt P zwischen zwei derartigen Punkten; wir bezeichnen sie mit n und $n+1$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir zerlegen nun $[n; n+1]$ in zehn gleiche Teile. Falls P einer der Teilpunkte ist, gehört zu ihm eine Zahl $n + \frac{k}{10}$ mit $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Andernfalls liegt P zwischen zwei Teilpunkten. Das von diesen begrenzte Intervall zerlegen wir wieder in zehn gleiche Teile usw.
Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
Entweder: P fällt irgendwann mit einem Teilungspunkt zusammen; dann gehört zu ihm eine Zahl mit einer endlichen Dezimaldarstellung.
Oder: P wird niemals ein Teilungspunkt; dann erhält man eine Intervallschachtelung, die sich auf den Punkt P zusammenzieht. Zu ihr, und damit zu P, gehört eine Zahl mit einer unendlichen Dezimalentwicklung.

Somit gilt

> **Satz 23.1:** Jeder reellen Zahl ist eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet und umgekehrt ist jedem Punkt der Zahlengeraden eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet.

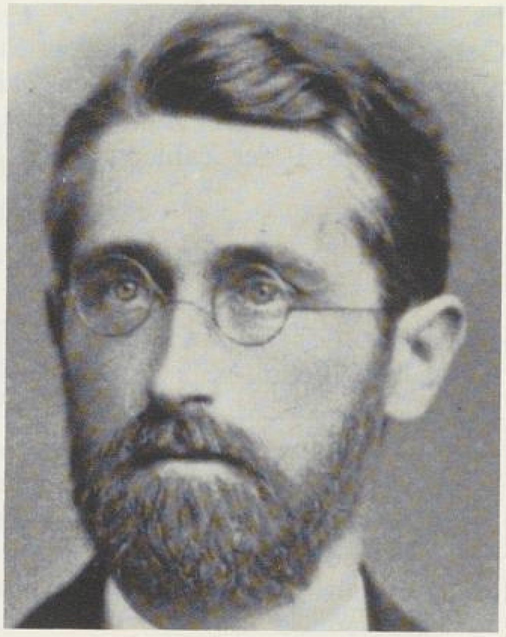
Aufgaben

Kennzeichne auf der Zahlengeraden die Zahlenmenge

1. **a)** $\mathbb{R}^+$, **b)** $\mathbb{R}^-$, **c)** $\mathbb{R}_0^+$.

Beschreibe die folgenden Zahlenmengen möglichst einfach:

2. **a)** $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$ **b)** $\mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{Z}$ **c)** $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ **d)** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



1868

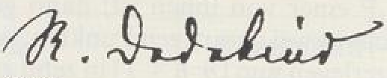


Abb. 24.1
Julius Wilhelm Richard DEDEKIND
(6.10.1831 Braunschweig–12.2.1916 ebd.)

3. Bei den bisher betrachteten Intervallschachtelungen haben wir jeweils rationale Zahlen als Intervallgrenzen benützt. Man kann nun auch Intervallschachtelungen bilden, bei denen die Intervallgrenzen beliebige reelle Zahlen sind. Kann man damit noch einmal neue Zahlen erzeugen? Mache dir den Sachverhalt an der Zahlengeraden klar.

4. Begründe die folgenden Aussagen durch Widerspruchsbeweise:

a) Das Produkt einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl mit einer irrationalen Zahl ist irrational.

b) Der Kehrwert einer irrationalen Zahl ist irrational.

5. a) Gib eine rationale Zahl an, die zwischen den irrationalen Zahlen $a = 0{,}414114111\ldots$ und $b = 0{,}414414441\ldots$ liegt.

b) Zu zwei verschiedenen reellen Zahlen kann man immer rationale Zahlen angeben, die dazwischen liegen. Begründe diese Aussage.

• **6. a)** Gib eine irrationale Zahl an, die
1) zwischen 1,5 und 1,6 **2)** zwischen $\frac{25}{33}$ und $\frac{26}{33}$ liegt.

b) Gib eine irrationale Zahl an, die zwischen den Zahlen von Aufgabe **5 a** liegt.

c) Zu zwei verschiedenen reellen Zahlen kann man immer eine irrationale Zahl angeben, die dazwischen liegt. Begründung!

7. Wenn bei einer Zahlenmenge M für die Addition und die Multiplikation die Rechengesetze E, K, A, N, I und D gelten, spricht man von einem **Zahlenkörper** $(M; +, \cdot)$.*

a) Du kennst nunmehr zwei verschiedene Zahlenkörper. Welche sind dies?

b) Für die Menge der irrationalen Zahlen gilt: $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; +, \cdot)$ ist kein Zahlenkörper. Welche Rechengesetze sind in diesem Fall nicht gültig?

* Den Begriff **Körper** prägte 1871 Richard DEDEKIND (1831–1916); seine Verwendung im heutigen Sinn (seit 1893) geht auf Heinrich WEBER (1842–1913) zurück.

**1.5 Ein Vergleich der Zahlenmengen ℚ und ℝ

In welchem Maße hat sich durch die Einführung der irrationalen Zahlen unser Zahlenvorrat vergrößert? Ist die Menge* der irrationalen Zahlen »größer« oder »kleiner« als ℚ?
Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten, da ja beide Mengen unendlich viele Elemente haben. Beim Vergleichen können wir uns auf die positiven Zahlen beschränken; da die negativen Zahlen die Gegenzahlen der positiven sind, liefert bei ihnen ein Vergleich der rationalen mit den irrationalen dasselbe Ergebnis.
Die Zahlen der Menge $\mathbb{Q}^+$ kann man nicht der Größe nach geordnet aufzählen. Dennoch ist es möglich, sie in eine bestimmte Reihenfolge zu bringen und dadurch abzuzählen. Georg CANTOR (1845–1918) erfuhr dies bereits als Student in einem Seminar bei seinem großen Lehrer Karl WEIERSTRASS (1815 bis 1897) und erwähnte diese Möglichkeit im Brief vom 29.11.1873 an Richard DEDEKIND (1831–1916). Vorgeführt hat es CANTOR aber erst in einem sehr ausführlichen Brief vom 18.6.1886 an den Berliner Gymnasiallehrer F. GOLDSCHEIDER. Veranschaulichen kann man dieses Abzählen durch ein Verfahren, das auf Augustin Louis CAUCHY (1789–1857) zurückgeht und das **1. Diagonalverfahren** heißt. In Abbildung 25.1 ist es dargestellt.

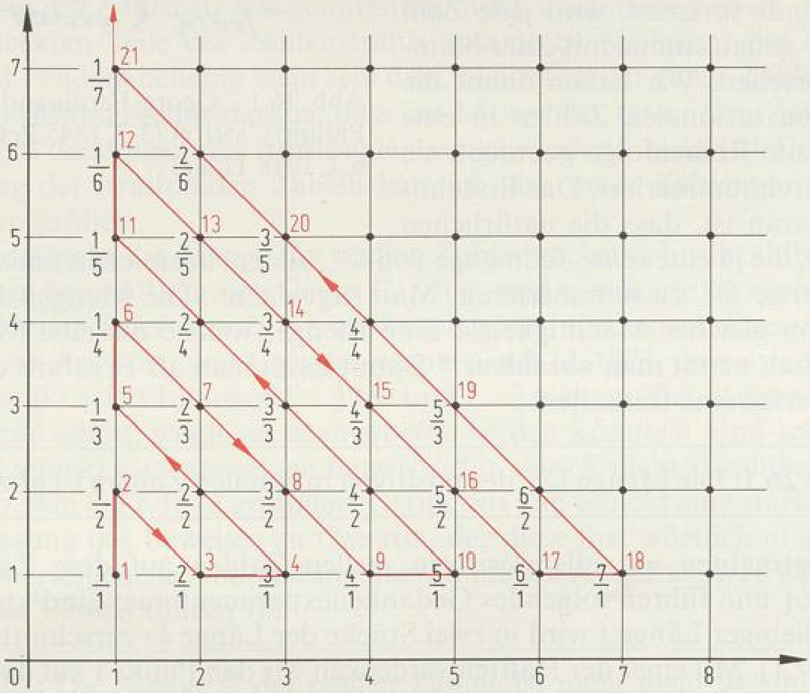
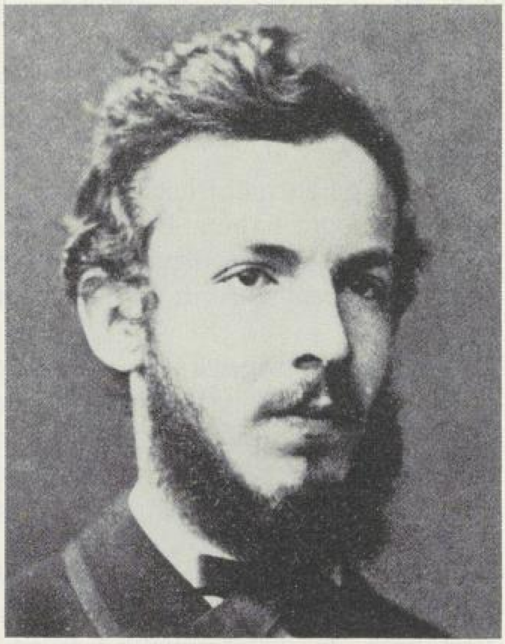


Abb. 25.1 Abzählen der rationalen Zahlen nach dem 1. Diagonalverfahren

* Der Philosoph, Theologe und Mathematiker Bernard BOLZANO (1781–1848) verwendete das Wort **Menge** als mathematischen Begriff in seiner um 1835 geschriebenen *Größenlehre*, die erst 1975 veröffentlicht wurde, und auch in den 1847 verfassten und 1851 gedruckten *Paradoxien des Unendlichen*. Georg CANTOR (1845–1918), der diese Schrift sehr bewunderte, benützte das Wort *Menge* erst ab 1895; bis dahin sprach er von Mannigfaltigkeit oder Inbegriff.



um 1870

Abb. 26.1 Georg Ferdinand Ludwig Philipp CANTOR (3.3.1845 Petersburg bis 6.1.1918 Halle)

Wir betrachten die Gitterpunkte im 1. Quadranten eines Koordinatensystems und ordnen dem Punkt $P(x|y)$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}$ den Bruch $\frac{x}{y}$ zu. Dann durchlaufen wir von $\frac{1}{1}$ aus die Gitterpunkte in der durch die rote Linie angegebenen Weise und nummerieren dabei die Brüche. $\frac{1}{1}$ ist also der erste Bruch, $\frac{1}{2}$ der zweite, $\frac{2}{1}$ der dritte usw. (vgl. die roten Nummern in Abbildung 25.1). $\frac{2}{2}$ können wir übergehen, da dieser Bruch wieder dieselbe Zahl wie $\frac{1}{1}$ darstellt. Auch $\frac{4}{2}$ $(= \frac{2}{1})$, $\frac{3}{3}$ $(= \frac{1}{1})$, $\frac{2}{4}$ $(= \frac{1}{2})$ liefern keine neuen rationalen Zahlen; man erkennt, dass alle kürzbaren Brüche beim Nummerieren übergangen werden können (vgl. dazu Aufgabe 28/**2**). Wenn man dieses Durchlaufen der Gitterpunkte ohne Ende fortsetzt, wird jede Zahl aus $\mathbb{Q}^+$ genau einmal mit einer Nummer versehen. Wir haben damit die positiven rationalen Zahlen in eine bestimmte Reihenfolge gebracht; sie sind durchnummeriert. Das Erstaunliche daran ist, dass die natürlichen Zahlen, die ja eine *echte* Teilmenge von $\mathbb{Q}^+$ bilden, ausreichen um *alle* Zahlen der Menge $\mathbb{Q}^+$ zu nummerieren. Man sagt dazu: »Die Mengen $\mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{N}$ sind von gleicher Mächtigkeit.« Eine Menge, welche dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ hat, nennt man **abzählbar**.* Damit kann man als Ergebnis des 1. Diagonalverfahrens festhalten:

Satz 26.1: Die Menge $\mathbb{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen ist abzählbar.

Nun betrachten wir alle positiven reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl $]0; +\infty[$ und führen folgendes Gedankenexperiment aus: Ein Papierstreifen von beliebiger Länge s wird in zwei Stücke der Länge $\frac{1}{2}s$ zerschnitten (Abbildung 27.1). Mit einer der Hälften verdecken wir den Punkt 1 auf dem Zahlenstrahl. 1 ist bei der von uns in Abbildung 25.1 eingeführten Nummerierung die erste rationale Zahl! Auch die übrigen rationalen Punkte** werden sodann in

* Das Fachwort **Mächtigkeit** hat CANTOR 1878 bei dem großen Geometer Jakob STEINER (1796–1863) entlehnt und auf seine heutige Bedeutung erweitert. Im gleichen Jahr verwendete er erstmals den Begriff **abzählbar** im oben angegebenen Sinn.

** Punkte der Zahlengeraden, denen eine rationale Zahl zugeordnet ist, nennen wir kurz »rationale Punkte«.

der durch die Nummerierung festgelegten Reihenfolge abgedeckt, indem man immer wieder folgende Anweisung ausführt: »Halbiere den verbliebenen Teil des Streifens und verdecke mit einer Hälfte denjenigen Punkt des Zahlenstrahls, welcher zu der nächsten rationalen Zahl gehört.«

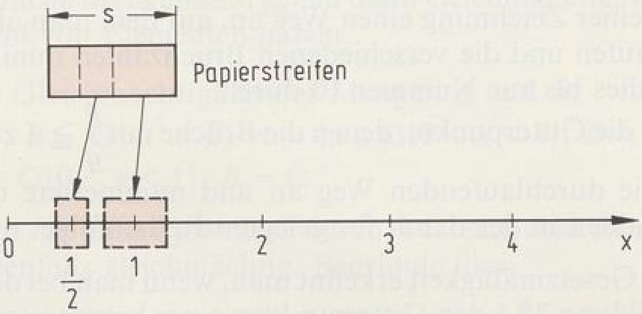


Abb. 27.1 Die rationalen Punkte werden verdeckt.

Natürlich werden durch das fortgesetzte Halbieren die Streifenstücke immer schmäler, aber zum Abdecken von Punkten, die ja die Breite null haben, reichen sie immer wieder aus. Wir können auf diese Weise alle rationalen Punkte des Zahlenstrahls (und nicht nur sie!) bedecken. Zu den nicht verdeckten Punkten des Zahlenstrahls gehören nur noch irrationale Zahlen. Da aber die abgedeckten Teile des Zahlenstrahls zusammen höchstens die Länge s haben und s zudem beliebig klein sein darf, bleibt fast der ganze Zahlenstrahl unbedeckt. Man erkennt daraus, dass die Menge der rationalen Zahlen im Vergleich zu derjenigen der irrationalen verschwindend klein ist! Durch die Einführung der irrationalen Zahlen hat sich also unser Zahlenvorrat ganz gewaltig vergrößert.
Ist dann vielleicht die Menge der reellen Zahlen nicht mehr abzählbar? Mit dieser Frage beschäftigte sich Georg Cantor, und er richtete sie auch in dem oben erwähnten Brief vom 29.11.1873 an Richard Dedekind. Dieser wusste darauf keine Antwort, und Cantor meinte am 2.12.1873, dass »sie kein besonderes praktisches Interesse [...] hat und [...] nicht zu viel Mühe verdient. Es wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte.« Und schon am 7.12.1873 schickt Cantor seinen Beweis dafür, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, an Dedekind. Am 8.12.1873 gratuliert Dedekind und schickt eine stark vereinfachte Fassung des Beweises an Cantor, der diese fast wörtlich in seine im Jahre 1874 erschienene Abhandlung übernimmt. In Aufgabe 29/**10** kannst du selbst einen Beweis führen für

Satz 27.1: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht mehr abzählbar.

Aufgaben

•**1. a)** Wo liegen in Abbildung 25.1 die Gitterpunkte, denen die positiven Bruchzahlen mit $\frac{p}{q} < 1$ zugeordnet sind?
Gib in einer Zeichnung einen Weg an, auf dem man alle diese Punkte durchlaufen und die verschiedenen Bruchzahlen nummerieren kann. Führe dies bis zur Nummer 10 durch.

b) Gib für die Gitterpunkte, denen die Brüche mit $\frac{p}{q} \geqq 1$ zugeordnet sind, einen sie durchlaufenden Weg an und nummeriere die ersten zehn Bruchzahlen in der damit festgelegten Reihenfolge.

2. a) Welche Gesetzmäßigkeit erkennt man, wenn man bei den Brüchen, die in Abbildung 25.1 den Gitterpunkten einer bestimmten Diagonallinie zugeordnet sind, die Summe aus Zähler und Nenner bildet?

b) Wie ändert sich diese Summe beim Übergang zur nächsten Diagonalen?

c) Wie ändert sich die Summe aus Zähler und Nenner, wenn ein Bruch gekürzt wird?

•**d)** Begründe nun, dass bei der in Abbildung 25.1 festgelegten Reihenfolge jedem kürzbaren Bruch einer mit gleichem Wert vorausgeht und somit die entsprechende rationale Zahl bereits nummeriert ist.

3. Zeichne ein Koordinatensystem und betrachte alle Gitterpunkte der oberen Halbebene, also die Punkte $(x|y)$ mit $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{N}$, und ordne jedem Punkt die Zahl $\frac{x}{y}$ zu. Beweise die Abzählbarkeit aller rationalen Zahlen, indem du einen von $(0|1)$ ausgehenden Weg angibst, der alle Gitterpunkte durchläuft. Wie lauten die ersten zehn rationalen Zahlen bei der so erzeugten Anordnung?

4. Die folgenden Mengen sind abzählbar. Gib zum Beweis dafür eine entsprechende Zuordnung ihrer Elemente zu den natürlichen Zahlen, also eine Nummerierung an. Beschreibe diese Zuordnung als Funktion $n \mapsto f(n), n \in \mathbb{N}$.

a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen
b) die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen
c) die Menge $\mathbb{N}_0$ **d)** die Menge $\mathbb{Z}$
e) die Menge der Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
f)* die Menge der Quadratzahlen n^2, $n \in \mathbb{N}$

5. Zwei Mengen heißen genau dann **gleichmächtig**, wenn man ihre Elemente eineindeutig einander zuordnen kann.
Begründe folgende Aussagen:

* Dieses Beispiel findet sich bereits in den *Discorsi* (1638) des Galileo GALILEI (1564–1642).

a) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 60\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 77 < n < 138\}$ sind gleichmächtige Zahlenmengen.

b) Die Menge P aller zweistelligen Primzahlen und die Menge V der durch 4 teilbaren zweistelligen Zahlen sind nicht gleichmächtig.

c) Zwei endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen haben.

6. Beweise die Gleichmächtigkeit der Mengen A und B:

a) $A = \mathbb{Q}^+$; $B = \mathbb{Q}^-$ **b)** $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$; $B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > 1\}$

•**c)** $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$; $B = \mathbb{Q}^+$

7. Wenn man in Aufgabe **6** jeweils $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt, sind die neuen Mengen A und B ebenfalls gleichmächtig. Begründe dies.

8. Die von Bernard BOLZANO (1781–1848) in seinen *Paradoxien des Unendlichen* (1847) klar herausgestellte Tatsache, dass bei unendlichen Mengen eine echte Teilmenge dieselbe Mächtigkeit wie die ganze Menge haben kann, wird oft als eine **Paradoxie*** der Mengenlehre bezeichnet.
In welchen Teilaufgaben **a)** von Aufgabe **4**, **b)** von Aufgabe **6** finden sich solche Paradoxien?

9. a) Begründe mit Hilfe der in Abbildung 30.1 angegebenen Zuordnung $P \mapsto P'$, dass die Strecken [AB] und [CD] gleichmächtige Punktmengen sind.

b) In Abbildung 30.2 ist M der Mittelpunkt der Strecke [AB], $\bar{A}$ das Spiegelbild von A bezüglich g und Z der Mittelpunkt von [$\bar{A}$B]. Beweise mit Hilfe der Zuordnung $P_i \mapsto P_i'$, dass die Strecke [AB] ohne ihre Endpunkte und die Gerade g gleichmächtige Punktmengen sind.

10. Georg CANTOR (1845–1918) gelang 1873 der Nachweis, dass die Menge der reellen Zahlen **überabzählbar**, d.h. nicht mehr abzählbar ist. Einen Beweis dafür kannst du anhand der folgenden Teilaufgaben erbringen.


1839

Abb. 29.1 Bernard BOLZANO
(5.10.1781 Prag–18.12.1848 ebd.)

* Die Paradoxie oder das Paradoxon = eine (echte oder scheinbare) Widersinnigkeit; paradox = widersinnig. Zugrunde liegt das griechische Adjektiv παράδοξος (parádoxos) = unerwartet.

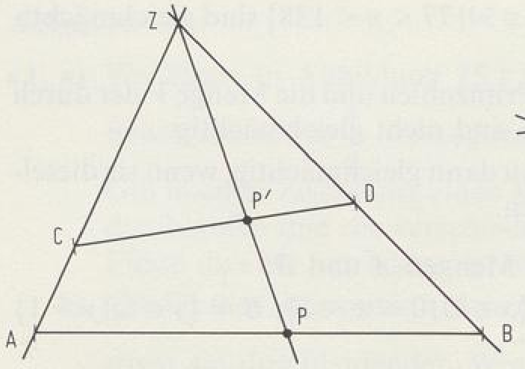


Abb. 30.1 Zu Aufgabe 9a

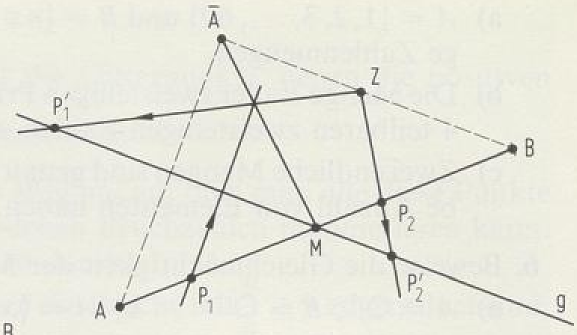


Abb. 30.2 Zu Aufgabe 9b

a) Wenn man von einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$ zeigen kann, dass sie überabzählbar ist, dann gilt das erst recht für $\mathbb{R}$ selbst. Erläutere dies. (Nimm z. B. an, $\mathbb{R}$ wäre abzählbar!)

b) Die Zahlen der Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ kann man in eindeutiger Weise als *unendliche* Dezimalzahlen darstellen, wenn man dabei Dezimalzahlen mit der Periode 0 verbietet. Wie lautet dann die Schreibweise für folgende Zahlen? (Beachte Aufgabe 17/**6**.)

$0{,}5$; $\quad 0{,}71$; $\quad \frac{3}{8}$; $\quad \frac{17}{250}$.

c) Wir nehmen nun an, die Zahlenmenge M sei abzählbar. Dann kann man ihre Elemente durchnummerieren; sie sollen der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bezeichnet sein. Wir denken uns diese Zahlen als unendliche Dezimalzahlen untereinander geschrieben:

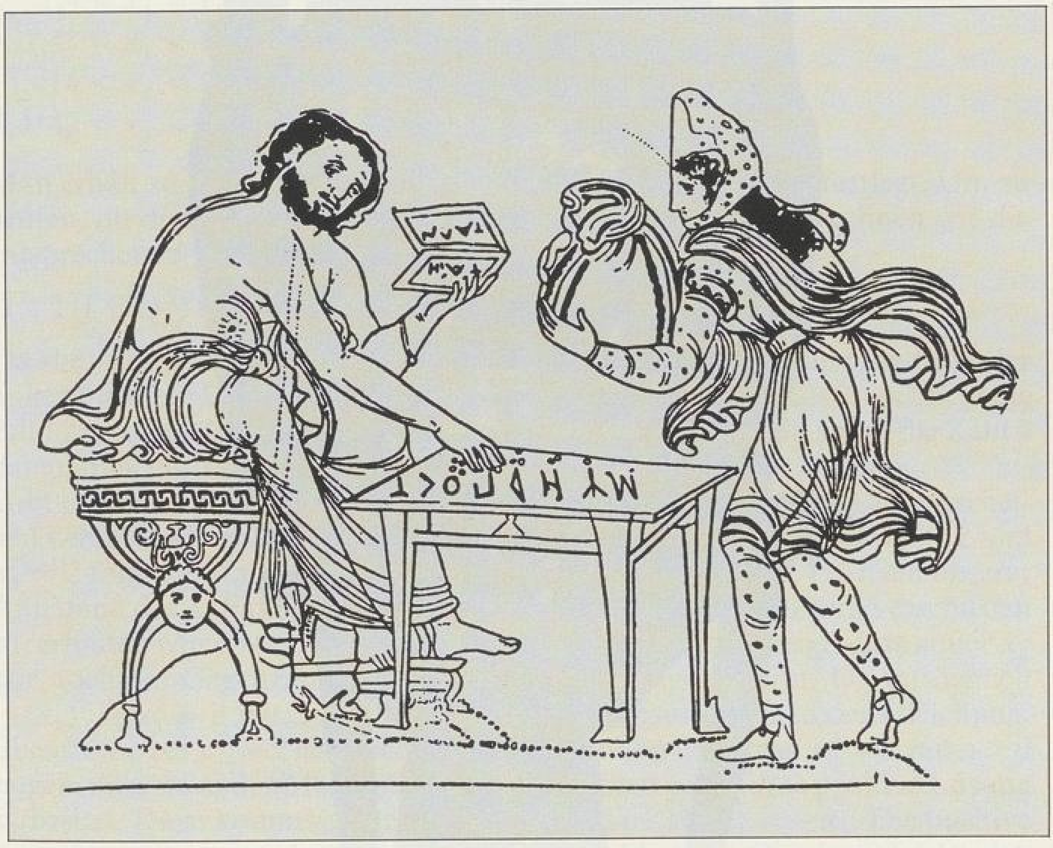
$x_1 = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$ $\quad$ ($a_i, b_i, c_i, \ldots$ bedeuten die einzelnen Ziffern der Dezimalzahldarstellung)
$x_2 = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$
$x_3 = 0, c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots$
usw.

Nun bilden wir eine unendliche Dezimalzahl $z = 0, z_1\, z_2\, z_3\, z_4 \ldots$ nach folgender Regel: Aus der Ziffernmenge $\{1, 2, \ldots, 8\}$ wählen wir
– für z_1 eine von a_1 verschiedene Ziffer,
– für z_2 eine von b_2 verschiedene Ziffer,
– für z_3 eine von c_3 verschiedene Ziffer usw.,
d. h., man wählt allgemein eine Ziffer z_i aus $\{1, 2, \ldots, 8\}$, welche von der i-ten Dezimalen der Zahl x_i, also von der auf der roten Diagonallinie stehenden Ziffer verschieden ist.*
Begründe, dass die so gewonnene Zahl z zwar zur Menge M gehört, aber mit keiner der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ übereinstimmt.

d) Das Ergebnis von **c** bedeutet, dass die Annahme, die Menge M sei abzählbar, falsch ist. Erläutere dies und folgere daraus auch die Nichtabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

* Man bezeichnet die Auswahlregel für die Ziffern z_i als **2.** oder **Cantor'sches Diagonalverfahren**. CANTOR hat es 1890 entwickelt.

2 Die Quadratwurzel



Ein Bote bringt dem Schatzmeister des Perserkönigs DARIUS einen Sack Geldes von tributpflichtigen Völkern. Der Schatzmeister hält in seiner Linken eine Doppeltafel, auf der wir ΤΑΛΑΝΤΑ Η (= 100 Talente) entziffern können. Auf ihr sind die Posten aufgeschrieben, die er nacheinander mit Hilfe von Rechensteinchen (= ψῆφοι [psēphoi]) auf den Rechentisch (= ἀβάκιον [abákion]) überträgt. Dort lesen wir ΜΥΗΔΓΟ<Τ, also 1731 [Drachmen] 4 [oboloi]. Bei Μ = 10000, < = $\frac{1}{2}$ Obolos und Τ = $\frac{1}{4}$ Obolos liegen keine Steinchen. – 1 Talent = 60 Minen = 6000 Drachmen = 36000 Obolen. (Siehe auch Fußnote auf Seite 67) – Nachzeichnung von der rotfigurigen Dariusvase von Abbildung 32.1.

Abb. 32.1 Die Dariusvase aus dem Nationalmuseum von Neapel, Höhe 1,3 m, größter Umfang 2 m, vermutlich aus dem 4. Jh. v. Chr., gefunden in Canosa, dem alten Canusium, in Apulien. In der oberen Reihe des Hauptkörpers nimmt Zeus mit anderen Göttern Griechenland in Schutz. In der Mitte sitzt DARIUS I. (reg. 522–486) auf dem Thron, vor ihm steht ein Perser, der vor dem Krieg zu warnen scheint. Darunter die Schatzmeisterszene von Abbildung 31.1.

2 Die Quadratwurzel

2.1 Definition der Quadratwurzel

Besitzt die in $\mathbb{Q}$ unlösbare Gleichung $x^2 = 2$ in der uns nun zur Verfügung stehenden größeren Zahlenmenge $\mathbb{R}$ eine Lösung?
Falls es eine positive Lösung x_1 dieser Gleichung gibt, muss für sie gelten (vgl. Seite 11):

$$\begin{array}{rll} 1 < x_1 < 2 & \text{also} & x_1 \in [1; 2] \\ 1{,}4 < x_1 < 1{,}5 & \text{also} & x_1 \in [1{,}4; 1{,}5] \\ 1{,}41 < x_1 < 1{,}42 & \text{also} & x_1 \in [1{,}41; 1{,}42] \\ 1{,}414 < x_1 < 1{,}415 & \text{also} & x_1 \in [1{,}414; 1{,}415] \\ 1{,}4142 < x_1 < 1{,}4143 & \text{also} & x_1 \in [1{,}4142; 1{,}4143] \quad \text{usw.} \end{array}$$

Man erhält so eine Intervallschachtelung, welche die Zahl x_1 festlegt. Um zu prüfen, ob diese Zahl wirklich die Gleichung $x^2 = 2$ löst, berechnen wir die entsprechende Intervallschachtelung für x_1^2:

$[1^2; 2^2], [1{,}4^2; 1{,}5^2], [1{,}41^2; 1{,}42^2], [1{,}414^2; 1{,}415^2], \ldots$

Da die Intervalle für x_1 gerade so gewählt wurden, dass die Quadrate der linken Grenzen kleiner als 2, die der rechten Grenzen größer als 2 sind, liegt die Zahl 2 in jedem Intervall der Schachtelung für x_1^2. Diese stellt somit die Zahl 2 dar und es gilt tatsächlich $x_1^2 = 2$.
Gibt es noch andere Lösungen der Gleichung $x^2 = 2$? Um dies zu entscheiden nehmen wir an, x_2 sei eine von x_1 verschiedene Lösung. Aus $x_1^2 = 2$ und $x_2^2 = 2$ folgt $x_1^2 - x_2^2 = 0$ und damit $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Da nach unserer Annahme der 1. Faktor des links stehenden Produktes von null verschieden ist, erhalten wir $x_1 + x_2 = 0$, also $x_2 = -x_1$. Damit ist gezeigt, dass außer x_1 nur noch die Gegenzahl $-x_1$ als Lösung in Frage kommt. Da tatsächlich $(-x_1)^2 = x_1^2 = 2$ gilt, ist $L = \{x_1; -x_1\}$ die Lösungsmenge der Gleichung.
Ebenso wie bei $x^2 = 2$ lässt sich für jede Gleichung der Form $x^2 = a$ mit $a > 0$ zeigen, dass sie in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen genau eine positive Lösung x_1 besitzt. Dazu kommt als negative Lösung die Zahl $x_2 = -x_1$. Die positive Lösung von $x^2 = a$, also diejenige positive Zahl, deren Quadrat gleich a ist, wird **Quadratwurzel von *a*** genannt und mit $\sqrt{a}$ bezeichnet. Auch im Fall der Gleichung $x^2 = 0$ wird für die einzige Lösung $x = 0$ die Wurzelschreibweise noch zugelassen, indem man vereinbart, dass $\sqrt{0} = 0$ gelten soll. Das ergibt die

Definition 33.1: Der Term $\sqrt{a}$ mit $a \geqq 0$ bedeutet diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat den Wert a hat.

Beachte also: $\sqrt{a}$ ist nur für $a \geqq 0$ definiert und es gilt

$$\sqrt{a} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Beispiele:

$$\sqrt{4} = 2; \quad \sqrt{6{,}25} = 2{,}5; \quad \sqrt{\tfrac{49}{121}} = \tfrac{7}{11};$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \text{ (irrational)}; \quad \sqrt{10} = 3{,}1622\ldots \text{ (irrational)}$$

Das Zeichen $\sqrt{\ }$ heißt **Wurzelzeichen**; der unter dem Wurzelzeichen stehende Term heißt **Radikand**. Statt »die Wurzel aus a berechnen« sagt man auch »aus a die Wurzel ziehen« oder »a radizieren«. $\sqrt{a}$ ist meist eine irrationale Zahl; nur wenn a das Quadrat einer rationalen Zahl ist, »geht die Wurzel auf«, d.h. ist auch $\sqrt{a}$ eine rationale Zahl.
Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ hat die Zahl $x_1 = \sqrt{a}$ als positive Lösung. Für die negative Lösung $x_2 = -x_1$ gilt daher: $x_2 = -\sqrt{a}$.

> **Satz 34.1:** Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ hat die Lösungen
> $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

**Zur Geschichte von »Wurzel« und Wurzelzeichen

Stellt man sich eine Zahl als Maßzahl für den Inhalt eines Quadrats vor, so gibt die Quadratwurzel aus dieser Zahl die Länge der Quadratseite an. Diese Vorstellung liegt dem Wort πλευρά (pleurá) = *Seite* zugrunde, womit die Griechen, so z.B. Euklid (um 300 v.Chr.) in Buch X seiner *Elemente*, die Quadratwurzel bezeichneten. Durch das entsprechende lateinische Wort *latus* drückten die Agrimensoren, die römischen Feldmesser, die Quadratwurzel aus. Nikomachos (um 160 n.Chr.) verwendet das griechische Wort ῥίζα (rhíza), das ursprünglich Wurzel einer Pflanze, im übertragenen Sinn Grundlage und Ursprung bedeutet, im mathematischen Sinn von Ausgangszahl. Wortgetreu übersetzt Boethius (um 480–524?) es mit *radix* ins Lateinische.
Ob der Inder Aryabhata I (um 476–? n.Chr.) durch das griechische ῥίζα angeregt wurde mit dem indischen Wort *mūla*, das ebenfalls Wurzel einer Pflanze bedeutet, die Quadratwurzel aus einer Zahl zu bezeichnen, wird wohl immer ungeklärt bleiben müssen. Interessanterweise übernehmen die Araber, so auch al-Charizmi (um 780–nach 847) einerseits das griechische πλευρά (pleurá), wenn sie z.B. in ihren geometrischen Beweisen die Quadratwurzel als Seite eines Quadrats darstellen – sie nennen sie dann auch *dil*, das ist ihr Wort für Seite –, andererseits das indische *mūla*, dem ihr arabisches Wort جذر (*dschidr*) entspricht, wenn sie die Quadratwurzel als Zahl auffassen. Leider verwenden sie aber *dschidr* auch zur Bezeichnung der Unbekannten selbst, was allerhand Verwirrung stiftete und immer noch stiften kann. Denn noch heute verwendet man in so manchen Lehrbüchern das Wort Wurzel im Sinne von »Quadratwurzel« und im Sinne von »Lösung einer Gleichung«. Wir wollen uns diesem Brauch aber nicht anschließen.
Gerhard von Cremona (1114–1187), der neben anderen arabischen Abhandlungen auch das Werk al-Charizmis übersetzte, wählte für *dschidr* die wortgetreue Entsprechung *radix*, das wiederum folgerichtig mit *Wurzel* ins Deutsche übertragen wurde, so um 1400 in der *Geometria Culmensis* und 1461 in der *Deutschen Algebra*, wo man liest »Radix ist die wurcz der zal« (Abbildung 68.1, Zeile 6 von folio 133v). In derselben Handschrift wird das Wurzelziehen, das mittelalterliche *radicem extrahere* des Jordanus Nemorarius († 1237) und des Johannes de Sacro Bosco (1200–1256), mit »zuech ausz dye wurcz« eingedeutscht. Das Fachwort **radizieren** erscheint erst 1836 in *An-*

fangsgründe der reinen Mathematik für den Schulunterricht von Carl KOPPE (1803 bis 1874), der dort auch das Wort **Radikand** für die »zu radizierende Zahl« prägt.
Ein besonderes Zeichen für die Quadratwurzel, nämlich ⌈⌈, tritt zum ersten Mal bei den Ägyptern auf, z. B. im *Papyrus Moskau* (19. Jh. v. Chr.). Die Inder kürzen ihr *mūla* einfach durch die Silbe *mū* ab. Die Araber kehren leider zu der vollen Wortalgebra zurück, sodass es erst im mittelalterlichen Italien wieder zu einem Zeichen für die Quadratwurzel kommt. Man kürzt das Wort *radix* durch ein durchgestrichenes R, also durch ℞ ab, zum ersten Mal belegt bei LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) in seiner *Practica geometriae* von 1220. Geronimo CARDANO (1501–1576) und Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) verwenden es, in Deutschland Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500). François VIÈTE (1540–1603) benützt stattdessen, seinem Landsmann Petrus RAMUS (1515–1572) folgend, *l.*, den Anfangsbuchstaben von *latus*.
Das heute übliche Wurzelzeichen stammt aus Deutschland. Im vor 1486 geschriebenen *Algorithmus de Surdis* des *Codex Dresden C 80* setzt der unbekannte Verfasser einen Punkt in die Mitte vor die Zahl und erklärt: »In extraccione radicis quadrati alicuius numeri preponatur numero unus punctus« (Zum Ausziehen der Quadratwurzel aus einer Zahl setzt man der Zahl einen Punkt voran). Bald wird dieser viereckig mit Aufstrich, so im *Codex Leipzig 1696* (vermutlich Ende des 15. Jh.s) und auch in der um 1517 von Adam RIES (1492–1559) niedergeschriebenen *Algebra* des INITIUS ALGEBRAS (*Codex Dresden C 349*), dann erstmals im Druck 1525 in der *Coß* Christoff RUDOLFFS (um 1500–vor 1543), auch dort noch gelesen als »Punkt« (dies sogar noch 1551 in Johann SCHEYBLS [1494–1570] *Algebra*). In Michael STIFELS (1487?–1567) *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – verlängert sich 1544 der Punkt zum Abwärtsstrich (der in den Figuren schon das Ansatzstrichlein hat): Der Wurzelhaken war geboren.
Es blieb aber bei allen Wurzelzeichen das Problem, ob z. B. $\sqrt{\ }a+b$ die Quadratwurzel aus der Summe $a+b$ oder die Summe aus dem 1. Summanden $\sqrt{\ }a$ und dem 2. Summanden b bedeuten soll. Nahezu jeder Mathematiker hatte dafür eigene Vorschriften. So erscheinen bei dieser Gelegenheit 1556 zum ersten Mal runde Klammern im Druck: im *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – des Niccolò TARTAGLIA steht ℞ v. (℞ 24 piu ℞ 12) für $\sqrt{\sqrt{24}+\sqrt{12}}$. Dabei bedeutet ℞ v. *radix universalis = Gesamtwurzel*, die 1572 Raffaele BOMBELLI (1526 bis 1572) in seiner *L'algebra* als *radix legata = gebundene Wurzel* bezeichnet und durch R.L ausdrückt. Das Ende der Bindung kennzeichnet ein etwas tiefer gestelltes gespiegeltes L, also ⅃, sodass bei ihm $\sqrt{4+\sqrt{6}}+2$ als R.q.L4.p.R.q.6 ⅃ p.2 erscheint, wobei R.q. *radix quadrata* bedeutet. Aus L und ⅃ dürfte unsere eckige Klammer entstanden sein. In seinem Manuskript drückte BOMBELLI 1557/60 die Bindung noch so wie andere Mathematiker durch Unterstreichen aus. Durchgesetzt hat sich von all den Möglichkeiten aber die Schreibweise von René DESCARTES (1596–1650) aus seiner *La Géométrie* von 1637: Er fasste die zusammengehörigen Glieder durch Überstreichen zusammen, schrieb also $\sqrt{\ }\overline{a+b}$. Verbindet man diesen Querstrich mit dem Wurzelhaken, so hat man unser Wurzelzeichen, das sich aber sehr langsam verbreitete. Schließlich setzte man den Querstrich auch da, wo er keinerlei Bedeutung hatte; denn bei $\sqrt{\ }a+b$ war es ja eigentlich nicht nötig, $\sqrt{a}+b$ zu schreiben.

Abb. 35.1 Verschiedene Wurzelzeichen. – Wegen des *Codex Leipzig 1696*, s. Abb. 70.1

Aufgaben

1. Gib die folgenden Zahlen in wurzelfreier Schreibweise an:

a) $\sqrt{1}$ **b)** $\sqrt{16}$ **c)** $\sqrt{81}$ **d)** $\sqrt{36}$
e) $\sqrt{100}$ **f)** $\sqrt{2500}$ **g)** $\sqrt{490000}$ **h)** $\sqrt{1000000}$
i) $\sqrt{196}$ **k)** $\sqrt{169}$ **l)** $\sqrt{256}$ **m)** $\sqrt{361}$

2. Ziehe die Wurzeln:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ **b)** $\sqrt{\frac{441}{121}}$ **c)** $\sqrt{\frac{9}{576}}$ **d)** $\sqrt{\frac{484}{10000}}$
e) $\sqrt{2{,}25}$ **f)** $\sqrt{5{,}29}$ **g)** $\sqrt{0{,}0289}$ **h)** $\sqrt{0{,}000625}$

3. Berechne und vergleiche:

a) $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9}+\sqrt{16}$
b) $\sqrt{169-25}$ und $\sqrt{169}-\sqrt{25}$
c) $\sqrt{576+49}$ und $\sqrt{576}+\sqrt{49}$
d) $\sqrt{1681-1600}$ und $\sqrt{1681}-\sqrt{1600}$
e) $\sqrt{1+4+4}$ und $\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$
f) $\sqrt{49+16-1}$ und $\sqrt{49}+\sqrt{16}-\sqrt{1}$
g) $\sqrt{196-36+9}$ und $\sqrt{196}-\sqrt{36}+\sqrt{9}$
h) $\sqrt{961-25-36}$ und $\sqrt{961}-\sqrt{25}-\sqrt{36}$

4. Berechne:

a) $\sqrt{1+3}$ **b)** $\sqrt{1+3+5}$ **c)** $\sqrt{1+3+5+7}$
d) $\sqrt{1+3+5+7+9}$ **e)** $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$

5. Beispiel: $\sqrt{\sqrt{25}-1}=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$. Verfahre ebenso:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{81}}$ **c)** $\sqrt{\sqrt{625}}$ **d)** $\sqrt{\sqrt{10000}}$
e) $\sqrt{1+\sqrt{9}}$ **f)** $\sqrt{\frac{81}{16}-\sqrt{25}}$ **g)** $\sqrt{\sqrt{400}-4}$ **h)** $\sqrt{\sqrt{900}+\frac{1}{4}}$
i) $\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{576}}$ **k)** $\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{\frac{1}{16}}}$ **l)** $\sqrt{\sqrt{\frac{169}{144}}-\sqrt{\frac{49}{324}}}$

6. Welche Zahlen dürfen bei den folgenden Wurzeltermen für die Variable eingesetzt werden? Gib jeweils die Definitionsmenge des Terms an.

a) $\sqrt{2a}$ **b)** $\sqrt{-a}$ **c)** $\sqrt{1+a}$ **d)** $\sqrt{5-2a}$
e) $\sqrt{2|x|}$ **f)** $\sqrt{-3|x|}$ **g)** $\sqrt{x^2+1}$ **h)** $\sqrt{x^2-1}$
i) $\sqrt{1-x^2}$ **k)** $\sqrt{|x|-3}$ **l)** $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **m)** $\sqrt{\dfrac{2x+5}{2-x}}$

7. Vereinfache:
a) $(1+\sqrt{2})^2$ **b)** $(3-\sqrt{3})^2$ **c)** $(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})$
d) $(\sqrt{a}-2b)^2$ **e)** $(3\sqrt{x}+5y)^2$ **f)** $(3p-\sqrt{3p})(\sqrt{3p}+3p)$

8. Fasse zusammen:
a) $3+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+15$ **b)** $2a-9\sqrt{a}-5\sqrt{a}+12a$
c) $-11\sqrt{5}+8\sqrt{3}+2-6\sqrt{3}+7\sqrt{5}$
d) $5(1-\sqrt{7}+2\sqrt{6})-3(3\sqrt{6}+5\sqrt{7}-5)$
e) $(4\sqrt{13}-15)(1+8\sqrt{13})-29(13-4\sqrt{13})$
f) $(3m-\sqrt{n})^2-(3m+\sqrt{n})^2+12m\sqrt{n}$

9. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:
a) $x^2=1225$ **b)** $5x^2-320=0$ **c)** $16(x^2+9)=144$
d) $2x^2-4=0$ **e)** $17x^2+61=350$ **f)** $121=49-4x^2$
g) $0{,}2x^2-5=0$ **h)** $\frac{2}{7}x^2-2=\frac{5}{7}x^2+1$ **i)** $0{,}15=\frac{2}{3}x^2+x^2$
k) $x^2-\sqrt{3}=0$ **l)** $x^2+\sqrt{5}=\sqrt{7}$ **m)** $x^2+\sqrt{5}-\sqrt{3}=0$

10. Welche Gleichung der Form $x^2=a$ hat die angegebene Zahl als Lösung? Wie lautet die Lösungsmenge?
a) -1 **b)** $\sqrt{7}$ **c)** 0 **d)** $-\sqrt{1{,}2}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **f)** $\sqrt{0{,}5-\sqrt{\frac{1}{4}}}$

11. Wie lang ist die Diagonale eines Quadrats mit dem Flächeninhalt
a) $1\,\mathrm{m}^2$, **b)** $8\,\mathrm{cm}^2$, **c)** $9\,\mathrm{dm}^2$, **d)** $450\,\mathrm{mm}^2$, **e)** $1{,}62\,\mathrm{a}$, **f)** $3\,\mathrm{km}^2$?

12. Bekanntlich ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Stelle bei den folgenden Termen fest, ob sie rationale oder irrationale Zahlen darstellen.
a) $1+\sqrt{2}$ **b)** $1-\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})$
e) $(\sqrt{2})^2$ **f)** $\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ **g)** $(1+\sqrt{2})^2$ **h)** $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

13. Bestimme die Lösungsmenge:
a) $\sqrt{x}=2$ **b)** $2\sqrt{x}=6$ **c)** $\sqrt{x}-1=0$ **d)** $\sqrt{x}+1=0$
e) $2\sqrt{x}+5=3\sqrt{x}+2$ **f)** $11-5\sqrt{x}=3-7\sqrt{x}$
g) $2(3\sqrt{x}+7)=9+2\sqrt{x}+5$ **h)** $(\sqrt{x}-17)\cdot 5-2\sqrt{x}=3(11+\sqrt{x})$
i) $7-(2\sqrt{x}-7)\cdot 3=2\sqrt{x}+4(7-2\sqrt{x})$

14. Bei einem Fotoapparat wird bekanntlich das zur Bilderzeugung verwendete Lichtbündel durch eine meist kreisförmige Blende begrenzt. Der Blendendurchmesser d kann verändert werden, die jeweilige Einstellung wird durch die Blendenzahl $\frac{f}{d}$ beschrieben; dabei bedeutet f die Brennweite des Objektivs.
a) Wie groß ist bei einem Apparat mit $f=50$ mm der Blendendurchmesser, wenn »Blende 8«, also die Blendenzahl 8, eingestellt ist?

b) Auf der Objektivfassung eines bestimmten Fotoapparats sind sieben Blendenzahlen angegeben, die kleinste davon heißt 2. Die übrigen Blendenzahlen sind so gewählt, dass beim Übergang von einer zur nächsten sich jeweils die Blendenfläche halbiert. Berechne die übrigen Blendenzahlen und gib die ersten beiden Ziffern ihrer Dezimalentwicklung an. (Damit erhält man die auf der Blendenskala angegebenen Zahlen!)
Hinweis: Beachte, dass die Blendenfläche zu d^2 proportional ist.

2.2 Berechnung von Quadratwurzeln

Wie findet man zu einer Zahl $a > 0$ den Wert von $\sqrt{a}$?
Bei den bisherigen Beispielen war das recht einfach; man konnte meist schnell eine positive Zahl angeben, deren Quadrat die Zahl a ergab. Schwieriger wird diese Aufgabe schon, wenn a eine große, uns nicht geläufige Quadratzahl ist. Wie findet man z. B., dass $\sqrt{33489}$ bzw. $\sqrt{157{,}7536}$ den Wert 187 bzw. 12,56 hat? Aber auch das sind noch Sonderfälle. Im Allgemeinen ist ja der Radikand a nicht das Quadrat einer rationalen Zahl; $\sqrt{a}$ ist dann irrational, und man muss sich damit begnügen, einen hinreichend genauen Näherungswert zu bestimmen.
Dir ist sicher schon bekannt, dass man solche Aufgaben bequem mit dem Taschenrechner lösen kann. Man muss lediglich den Radikanden a eingeben und die **Wurzeltaste** (manchmal zwei Tasten) drücken und schon wird ein (Näherungs-)Wert von $\sqrt{a}$ angezeigt. Wie ist das möglich? Sind die Wurzelwerte schon im Taschenrechner gespeichert und müssen nur abgerufen werden? Sicherlich nicht, wie du dir leicht klarmachen kannst! Die gesuchte Wurzel muss vielmehr jedes Mal neu berechnet werden. Dazu dient ein sehr schnell ablaufendes **Rechenprogramm**, das mit dem Drücken der Wurzeltaste gestartet wird. Für das Berechnen von Quadratwurzeln gibt es verschiedene Verfahren. Im Folgenden sollst du einige kennen lernen.

2.2.1 Intervallschachtelungsverfahren

Bei diesem schon bekannten Verfahren schließt man den Wurzelwert zwischen zwei aufeinander folgende ganze Zahlen ein. Aus diesem Anfangsintervall gewinnt man durch Anwendung der Zehnteilungsmethode eine Intervallschachtelung für die gesuchte Wurzel. Der Rechenaufwand ist meist ziemlich groß.

2.2.2 Iterationsverfahren

Um zu einer Zahl $a > 0$ die Quadratwurzel zu berechnen, beginnen wir mit einem Schätzwert $x_1 > 0$. Dieser ist zu groß bzw. zu klein bzw. richtig, wenn $x_1^2 > a$ bzw. $x_1^2 < a$ bzw. $x_1^2 = a$ gilt. Den letzten Fall, in welchem die Bestimmung von $\sqrt{a}$ zufällig schon gelungen ist, können wir im Folgenden außer Acht lassen.

Wegen $x_1^2 > a \Leftrightarrow x_1 > \frac{a}{x_1}$ bzw. $x_1^2 < a \Leftrightarrow x_1 < \frac{a}{x_1}$ kann man auch durch die Berechnung des Quotienten $\frac{a}{x_1}$ entscheiden, ob der Schätzwert zu groß oder zu klein ist. In jedem Fall liegt aber der gesuchte Wurzelwert *zwischen* den Zahlen x_1 und $\frac{a}{x_1}$. Als nächsten Näherungswert x_2 wählen wir daher eine Zahl aus diesem Intervall, und zwar den einfach zu berechnenden Mittelwert von x_1 und $\frac{a}{x_1}$, also $x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2$.

Ausgehend von x_2 kann man nun nach derselben Methode einen Näherungswert x_3, dann $x_4, x_5, \ldots$ berechnen. Allgemein erhalten wir den $(n+1)$ten Näherungswert x_{n+1} aus x_n nach der Formel

$$\boxed{x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2, \quad n \in \mathbb{N}.} \tag{I}$$

Beispiel 1:

Gesucht ist $\sqrt{841}$.
Wir beginnen (z. B.!) mit dem Schätzwert $x_1 = 30$.
Durch Anwendung von (I) erhält man*:

$x_2 = (30 + \frac{841}{30}) : 2 \Leftrightarrow x_2 = 29{,}016666$

und weiter $x_3 = 29{,}000004$; $x_4 = 29$; $x_5 = 29$; …
Da $29^2 = 841$, hat man mit x_4 bereits den richtigen Wert der Wurzel gefunden!

Beispiel 2:

Gesucht ist $\sqrt{6}$.
Mit dem Schätzwert $x_1 = 2$ erhält man* nach (I)

$x_2 = 2{,}5$; $x_3 = 2{,}45$; $x_4 = 2{,}4494897$; $x_5 = x_4$ (!).

Sobald zwei aufeinander folgende Näherungswerte übereinstimmen, kann man die Rechnung abbrechen; der nächste Schritt wäre nur eine Wiederholung des vorausgehenden und müsste wieder dasselbe Ergebnis liefern. Dass dieses Ergebnis die gesuchte Wurzel ist, lässt sich leicht begründen:
Mit $x_{n+1} = x_n$ folgt aus (I)

$$\begin{aligned} x_n &= \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2 && \| \cdot 2x_n \\ 2x_n^2 &= x_n^2 + a && \| - x_n^2 \\ x_n^2 &= a. \end{aligned}$$

Da $x_n > 0$ gilt, ist somit $x_n = \sqrt{a}$.

* Die angegebenen Zahlenwerte wurden auf einem Taschenrechner mit achtstelliger Anzeige berechnet.

Natürlich gilt in Beispiel 2 die Gleichung $x_5 = x_4$ nicht exakt, sondern nur im Rahmen der Anzeigegenauigkeit des verwendeten Taschenrechners. $x_4 = 2{,}4494897$ ist deshalb nur der bestmögliche Näherungswert, der mit diesem Rechner für die irrationale Zahl $\sqrt{6}$ ermittelt werden kann. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man nach Eingabe von 6 die Wurzeltaste drückt.

Das Besondere an dem hier angewandten Rechenverfahren besteht darin, dass zur Bestimmung der verschiedenen Näherungswerte immer wieder dieselbe Regel, hier (I), benützt wird. Eine solche Berechnungsmethode bezeichnet man als **Iterationsverfahren**.*
Ein Iterationsverfahren ist für das praktische Rechnen sehr vorteilhaft: Man kann beim Taschenrechner immer wieder dieselbe Tastenfolge benützen. Die Iterationsregel (I) lässt sich, sobald ein Näherungswert in der Anzeige steht, z. B. mit folgender Tastenfolge ausführen:

Nach dem zweiten = -Befehl wird der neue Näherungswert angezeigt. Mit ihm kann man, wie der Pfeil andeutet, das Verfahren wiederholen. Ein Iterationsverfahren lässt sich vor allem auf einem programmierbaren Rechner sehr einfach durchführen. Die Abbildungen 40.1 und 40.2 zeigen ein Struktogramm und ein Flussdiagramm für Programme zur Berechnung von $\sqrt{a}$ nach dem Iterationsverfahren (I). Bei den Taschenrechnern ist ein entsprechendes Programm fest eingebaut.

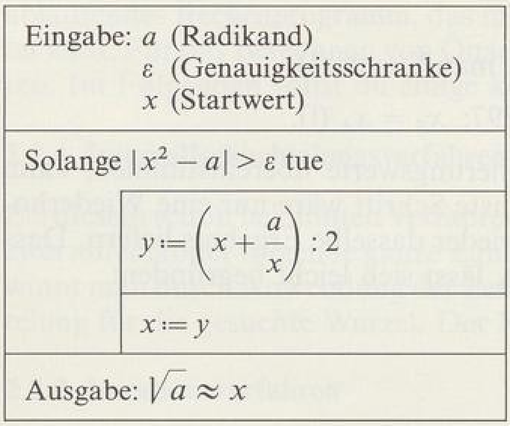


Abb. 40.1 Struktogramm zum Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_n^2 - a| \leqq \varepsilon$

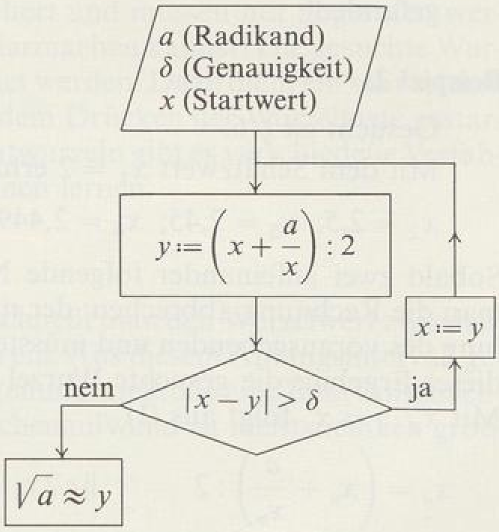


Abb. 40.2 Flussdiagramm für das Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_{n+1} - x_n| \leqq \delta$

* iterare (lat.) = etwas noch einmal tun, wiederholen; iteratio (lat.) = die Wiederholung.

Das Iterationsverfahren (I) lässt sich auch geometrisch veranschaulichen. Wir zeichnen dazu den Graphen der **Iterationsfunktion**, das ist in unserem Fall die Funktion mit der Gleichung $y = \left(x + \frac{a}{x}\right) : 2,\ x \in \mathbb{R}^+$. Sie liefert zu jedem Näherungswert x den nächsten Näherungswert y; d. h., setzt man $x = x_n$, so gilt $y = x_{n+1}$. Um dann die Zahl y als x_{n+1} wieder auf der x-Achse anzutragen verwendet man die Gerade mit der Gleichung $y = x$. Der auf ihr liegende Punkt mit der Ordinate y hat auch die Abszisse y, also x_{n+1} (Abbildung 41.1).

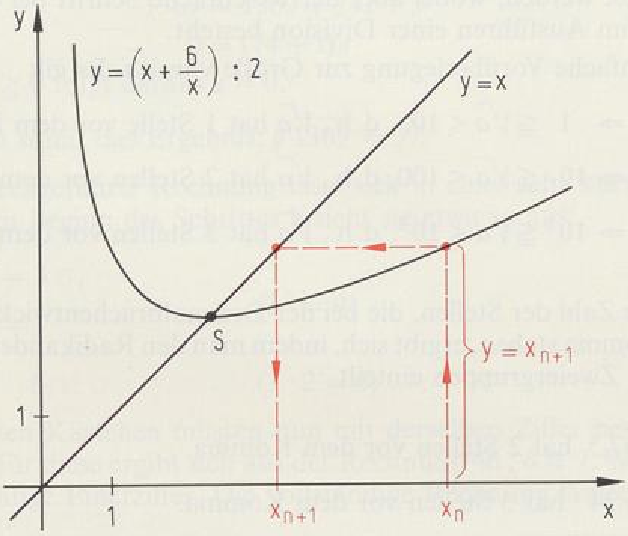


Abb. 41.1 Graphische Erzeugung von x_{n+1} aus x_n

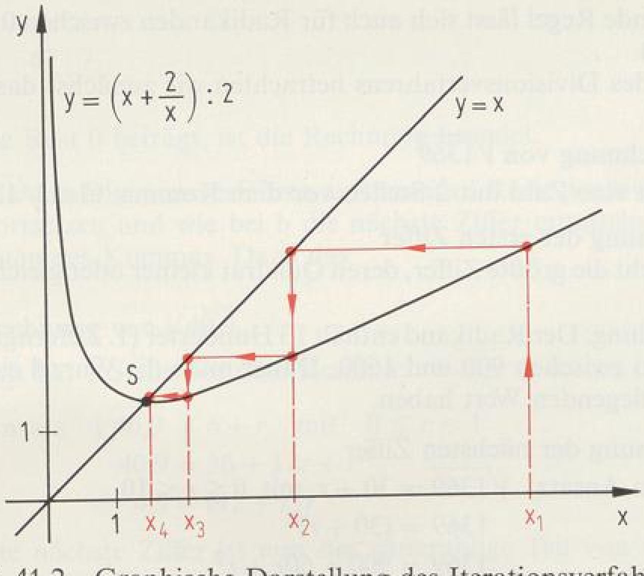


Abb. 41.2 Graphische Darstellung des Iterationsverfahrens

Der rote Linienzug in Abbildung 41.2 zeigt, dass die Zahlen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ sich von oben rasch der Abszisse des Schnittpunktes S der beiden Graphen nähern.

Man kann zeigen, dass dies immer so ist (vgl. Aufgaben 44/**4** und 45/**7**). Da S die Koordinaten $(\sqrt{a}|\sqrt{a})$ hat, strebt die Zahlenfolge $x_2, x_3, x_4, \ldots$ immer monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ (vgl. Aufgabe 45/**5**).

**2.2.3 Divisionsverfahren

Es gibt einen interessanten Algorithmus*, bei dem – ähnlich wie beim Intervallschachtelungsverfahren – die einzelnen Ziffern der Dezimalentwicklung einer Wurzel nacheinander berechnet werden, wobei aber der wesentliche Schritt bei der Bestimmung einer Dezimalen im Ausführen einer Division besteht.
Zunächst eine einfache Vorüberlegung zur Größe von $\sqrt{a}$. Es gilt

$1 \leqq a < 100 \Rightarrow 1 \leqq \sqrt{a} < 10$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 1 Stelle vor dem Komma

$100 \leqq a < 10000 \Rightarrow 10 \leqq \sqrt{a} < 100$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 2 Stellen vor dem Komma

$10^4 \leqq a < 10^6 \Rightarrow 10^2 \leqq \sqrt{a} < 10^3$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 3 Stellen vor dem Komma
usw.

Daraus folgt: Die Zahl der Stellen, die bei der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{a}$ mit $a > 1$ vor dem Komma stehen, ergibt sich, indem man den Radikanden a vom Komma aus nach links in Zweiergruppen einteilt.

Beispiele: $\sqrt{13|67{,}5}$ hat 2 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{6|15|34}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{10|47|69{,}824}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

Eine entsprechende Regel lässt sich auch für Radikanden zwischen 0 und 1 aufstellen (Aufgabe 46/**10**).
Zur Erklärung des Divisionsverfahrens betrachten wir zunächst das einfache

Beispiel 1: Berechnung von $\sqrt{1369}$
Das Ergebnis ist eine Zahl mit 2 Stellen vor dem Komma, also $\sqrt{13|69} = \_\ \_, \ldots$

a) Bestimmung der ersten Ziffer
Man sucht die größte Ziffer, deren Quadrat kleiner oder gleich 13 ist; Ergebnis 3.
Begründung: Der Radikand enthält 13 Hunderter (1. Zifferngruppe von links), liegt also zwischen 900 und 1600. Daher muss die Wurzel einen zwischen 30 und 40 liegenden Wert haben.

b) Bestimmung der nächsten Ziffer
Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 30 + r$ mit $0 \leqq r < 10$
folgt

$$1369 = (30 + r)^2$$
$$1369 = 900 + 60r + r^2$$
$$469 = (60 + r)r$$

* Algorithmus = Rechenverfahren. Das Wort Algorithmus entstand aus *algorismus*, einer Verballhornung des Namens AL-CHARIZMI, der in Vergessenheit geraten war, sodass man unter *algorismus* die *Lehre vom Rechnen* verstand. Erst 1849 hat der Orientalist Joseph-Toussaint REINAUD den Ursprung dieses Wortes erkannt.

Der ganzzahlige Teil von r ist die gesuchte Einerziffer. Um sie zu bestimmen bringen wir die letzte Gleichung auf die Form $469 : (60 + r) = r$. Da der Divisor $60 + r$ zwischen 60 und 70 liegt, kann r nur 7 Ganze enthalten; denn $8 \cdot 60 > 469$ und $6 \cdot 70 < 469$.

Somit gilt: $\sqrt{1369} = 37, \ldots$

c) Bestimmung eventueller weiterer Stellen

Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 37 + s$ mit $0 \leqq s < 1$ folgt

$$\begin{aligned} 1369 &= (37 + s)^2 \\ 1369 &= 1369 + 74s + s^2 \\ 0 &= (74 + s)s \end{aligned}$$

Wegen $s \geqq 0$ folgt daraus $s = 0$.

Wir erhalten somit das Ergebnis: $\sqrt{1369} = 37$.

Die hier durchgeführte Rechnung lässt sich in einer sehr kurzen Niederschrift darstellen; zu Beginn des Schrittes **b** sieht sie etwa so aus:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{13|69} = 3\,\square, & & \\ \underline{-9} & & (3^2 = 9) \\ 469 & & \\ & 6\square \cdot \square & (3 \cdot 2 = 6) \end{array}$$

Die drei roten Kästchen müssen nun mit derselben Ziffer besetzt werden! Ein Schätzwert für diese ergibt sich aus der Rechnung $46 : 6 \approx 7$. Wegen $67 \cdot 7 \leqq 469$ ist 7 die richtige Einerziffer. Die vollständige Rechnung lautet damit

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1369} = 37, & \\ \underline{-9} & \\ 469 & \\ \underline{-469} & 67 \cdot 7 \\ 0 & \end{array}$$

Da der neue Rest 0 beträgt, ist die Rechnung beendet.

Solange die bei diesem Divisionsverfahren auftretenden Reste positiv sind, kann man die Rechnung fortsetzen und wie bei **b** die nächste Ziffer ermitteln. Dies gilt auch beim Überschreiten des Kommas. Dazu das

Beispiel 2: Berechnung von $\sqrt{40{,}9}$

Das Ergebnis hat 1 Stelle vor dem Komma: $\sqrt{40{,}9} = 6, \ldots$

Aus dem Ansatz $\sqrt{40{,}9} = 6 + r$ mit $0 \leqq r < 1$ folgt

$$\begin{aligned} 40{,}9 &= 36 + 12r + r^2 \\ 4{,}9 &= (12 + r)r \end{aligned}$$

Die gesuchte nächste Ziffer ist nun der ganzzahlige Teil von $10r$. Wir führen deshalb $r' = 10r$ ein. Dazu multiplizieren wir beide Faktoren auf der rechten Seite mit 10, die ganze Gleichung also mit 100:

$$490 = (120 + r')r'$$

also $490 : (120 + r') = r'$.

Als ganzzahliger Teil von r' ergibt sich daraus nicht 4, sondern 3. Somit gilt: $\sqrt{40{,}9} = 6{,}3\ldots$

Ganz entsprechend verfährt man bei der Bestimmung weiterer Ziffern. Die Kurzform der Rechnung sieht dann so aus:

$$\sqrt{40{,}9} = \sqrt{40{,}90\,00\,00\ldots} = 6{,}395\ldots$$

$$\begin{array}{rrl}
\underline{-36} & & (6^2 = 36) \\
4\,90 & & \\
\underline{-3\,69} & \underline{123 \cdot 3} & (6 \cdot 2 = 12) \\
1\,21\,00 & & \\
\underline{-1\,17\,21} & \underline{1269 \cdot 9} & (63 \cdot 2 = \underline{126} = 123 + 3) \\
6\,79\,00 & & \\
\underline{-6\,39\,25} & \underline{12785 \cdot 5} & (639 \cdot 2 = \underline{1278} = 1269 + 9) \\
39\,75 & &
\end{array}$$

Man rechnet so lange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

** Zur Geschichte

Das angegebene Divisionsverfahren hat 1540 Reinerus Gemma Frisius (1508–1555) in seiner um 1536 geschriebenen *Arithmeticae practicae methodus facilis* veröffentlicht.

Aufgaben

1. Bei der Berechnung von $\sqrt{31}$ nach dem Intervallschachtelungsverfahren erhält man [5; 6] als erstes und [5,5; 5,6] als zweites Intervall. Muss man zur Bestimmung des nächsten Intervalls die Quadrate aller Zwischenwerte 5,51; 5,52; …; 5,59 berechnen? Wie viele Quadrate sind bei geschicktem Vorgehen höchstens notwendig? Wie heißt das dritte Intervall für $\sqrt{31}$?

2. Das fünfte Intervall der Schachtelung für $\sqrt{21{,}8}$ heißt [4,6690; 4,6691]. Wie entscheidet man am einfachsten, ob der auf vier Stellen nach dem Komma gerundete Wert von $\sqrt{21{,}8}$ mit der linken oder mit der rechten Intervallgrenze übereinstimmt?

3. Berechne nach dem Iterationsverfahren (I) die Näherungswerte x_2 bis x_5 für

   a) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 3$, b) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 4$,

   c) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2$, d) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2{,}5$,

   e) $\sqrt{3987}$ und $x_1 = 60$, f) $\sqrt{0{,}95}$ und $x_1 = 1$.

4. Zeichne den Graphen der zur Berechnung von $\sqrt{8}$ gehörenden Iterationsfunktion $x \mapsto \left(x + \dfrac{8}{x}\right) : 2$ im Intervall $0 < x \leqq 10$ und veranschauliche das Iterationsverfahren wie in Abbildung 41.2. Verwende dabei als (sehr schlechten!) Anfangswert zuerst 10, dann 0,5.

5. Beweise, dass die Gerade $y = x$ die Kurve $y = \left(x + \dfrac{a}{x}\right) : 2$, $x > 0$, im Punkt $S(\sqrt{a}|\sqrt{a})$ schneidet.

•6. Die halbe Summe zweier Zahlen bezeichnet man als ihr **arithmetisches Mittel***; die Wurzel aus dem Produkt zweier positiver Zahlen heißt **geometrisches Mittel***. Weise nach, dass das geometrische Mittel zweier Zahlen stets kleiner oder gleich ihrem arithmetischen Mittel ist.

7. a) Bilde das geometrische Mittel der in der Formel des Iterationsverfahrens (I) vorkommenden Zahlen x_n und $\dfrac{a}{x_n}$. Zeige, dass für $x_{n+1} = \left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) : 2$ stets die Ungleichung $x_{n+1} \geqq \sqrt{a}$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).

b) Bestätige die Beziehung $x_{n+1} - x_n = \dfrac{a - x_n^2}{2x_n}$ und begründe damit die Ungleichungen $x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq \ldots$

c) Die aus zwei positiven Zahlen u und v gebildete Zahl $\dfrac{2uv}{u+v}$ bezeichnet man als **harmonisches Mittel*** von u und v.
Beweise, dass für die beim Iterationsverfahren (I) auftretenden Zahlenpaare $\left(x_1 \middle| \dfrac{a}{x_1}\right), \left(x_2 \middle| \dfrac{a}{x_2}\right), \left(x_3 \middle| \dfrac{a}{x_3}\right), \ldots$ gilt:
Das arithmetische Mittel der Zahlen eines Paars ist die erste Zahl des nächsten Paars. Das harmonische Mittel der Zahlen eines Paars ist die zweite Zahl des nächsten Paars.

* ARCHYTAS, der als Staatsmann, Feldherr, pythagoreischer Philosoph und Mathematiker um 375 v. Chr. in Tarent wirkte, sagt, dass es in der Musik drei Mittel gebe, und zwar die μέση ἀριθμητική (mese arithmetikē), das arithmetische Mittel, für das $u - m = m - v$ gilt, die μέση γεωμετρική (mese geometrikē), das geometrische Mittel, für das $u : m = m : v$ gilt, und schließlich die μέση ὑπεναντίη (mese hypenantíe), das konträre oder entgegengesetzte Mittel, das auch μέση ἁρμονική (mese harmonikē), harmonisches Mittel, genannt wird und für das $(u - m) : u = (m - v) : v$ gilt. HIPPASOS (Mitte 5. Jh. v. Chr.) soll, anderen Berichten zufolge, als erster den Ausdruck harmonisches Mittel gebraucht haben. Löst man jeweils nach m auf, dann erhält man die bekannten Ausdrücke $\dfrac{u+v}{2}$ bzw. $\sqrt{uv}$ bzw. $\dfrac{2uv}{u+v}$.

Die Mittel ergeben sich aus Sonderfällen von Proportionen. Setzt man nämlich in der arithmetischen Proportion $a - b = c - d$ bzw. in der geometrischen Proportion $a : b = c : d$ die Innenglieder b und c gleich, dann erhält man mit den Außengliedern u und v die oben angegebenen stetigen oder fortlaufenden Proportionen (siehe Seite 99) $u - m = m - v$ bzw. $u : m = m : v$. Allmählich wurde es Brauch, eine solche dreigliedrige stetige Proportion μεσότης (mesótes) = *Mittelheit* zu nennen. EUKLID (um 300 v. Chr.) verwendet nur die geometrische Proportion. In Buch VI, Satz 13 der *Elemente* nennt er $\sqrt{uv}$ *mittlere proportionale Größe* (μέσον μέγεθος ἀνάλογον [méson mégethos análogon]), was JOHANNES DE SACRO BOSCO (1200–1256) mit *medium proportionale* übersetzt. Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) bildet 1489 in seinem Rechenbuch dafür *eyn mittel zal* und Johann SCHEYBL (1494–1570) in seiner Euklidübersetzung *Das sibend/acht und neunt buch des hochberümbten Mathematici Euclidis Megarensis* von 1555 das *mittel proportional zwaier zalen* oder kurz *mittel*. Den Ausdruck *geometrisches Mittel* hat anscheinend 1808 Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) in seinem *Mathematischen Wörterbuch* geprägt. Bei Johannes KEPLER (1571–1630) findet man 1615 *medium arithmeticum* in seiner *Nova Stereometria doliorum vinariorum* – »Neue Raummesskunst für Weinfässer« –, die Eindeutschung *arithmetisches Mittel* erst im 1. Viertel des 19. Jh.s.
(Übrigens verwechselt SCHEYBL wie so mancher andere den Mathematiker EUKLID [um 300 v. Chr.] mit dem Philosophen EUKLID von Megara [um 450–um 370 v. Chr.], einem Schüler des SOKRATES. Federigo COMMANDINO [1509–1575] weist 1572 in seiner Euklidübersetzung auf diesen Irrtum hin.)

8. Wähle einen Startwert x_1 und berechne mit dem Iterationsverfahren (I) die ersten vier geltenden* Ziffern der Dezimalentwicklung von

a) $\sqrt{8170}$ **b)** $\sqrt{14{,}36}$ **c)** $\sqrt{0{,}088855}$ **d)** $\sqrt{0{,}000001234}$.

9. Wie viel Stellen vor dem Komma hat die Dezimalentwicklung der Wurzel und wie heißt die erste Ziffer?

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{37{,}64}$ **c)** $\sqrt{428}$ **d)** $\sqrt{3650809}$

e) $\sqrt{82145}$ **f)** $\sqrt{8214{,}5}$ **g)** $\sqrt{821{,}45}$ **h)** $\sqrt{82{,}145}$

10. a) Welche Ungleichung für $\sqrt{a}$ folgt aus

1) $1 > a \geqq 0{,}01$; **2)** $0{,}01 > a \geqq 0{,}0001$; **3)** $\frac{1}{10^4} > a \geqq \frac{1}{10^6}$?

b) Wo steht in der Dezimalentwicklung von **1)** $\sqrt{0{,}5}$; **2)** $\sqrt{0{,}025}$; **3)** $\sqrt{0{,}004}$ die erste von 0 verschiedene Ziffer und wie heißt sie?

11. Wie muss bzw. kann der Anfang der Dezimalentwicklung der Wurzel aussehen? (Die Punkte bedeuten weggelassene Ziffern.)

a) $\sqrt{0{,}7\ldots}$ **b)** $\sqrt{0{,}006\ldots}$ **c)** $\sqrt{0{,}12\ldots}$ **d)** $\sqrt{0{,}0147\ldots}$

12. Berechne nach dem Divisionsverfahren den ganzzahligen Teil der Wurzel.

a) $\sqrt{1000}$ **b)** $\sqrt{80656}$ **c)** $\sqrt{338725}$ **d)** $\sqrt{3387{,}25}$

13. Berechne nach dem Divisionsverfahren den auf Hundertstel gerundeten Wert von **a)** $\sqrt{19}$, **b)** $\sqrt{187{,}5}$, **c)** $\sqrt{17{,}7241}$, **d)** $\sqrt{0{,}6196}$.

14. Auf der in Abbildung 48.1 gezeigten altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598 (um 1600 v. Chr.) wurde zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln folgendes Verfahren angewandt, das auch Heron (um 62 n. Chr.) in seinem *Περὶ μέτρων* – »Vermessungslehre« – angibt:

$$\sqrt{p^2 + q} \approx p + \frac{q}{2p} \qquad (p > 0;\ p^2 + q \geqq 0)$$

Welcher Wert ergibt sich damit

a) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 4 - 1$;

b) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 2{,}89 + 0{,}11$;

c) für $\sqrt{6}$ aus der Zerlegung $6 = 6{,}25 - 0{,}25$;

d) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 400 + 35$;

e) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 441 - 6$;

f) für $\sqrt{1000}$ aus der Zerlegung $1000 = 1024 - 24$?

Vergleiche das Ergebnis mit dem Näherungswert des Taschenrechners.

* Die geltenden Ziffern werden von links nach rechts gezählt. Die erste von 0 verschiedene Ziffer ist dabei die erste geltende Ziffer.

15. Welcher Näherungswert x_2 ergibt sich nach der Formel von Aufgabe **14** für $\sqrt{a}$, wenn man mit Hilfe eines Schätzwertes x_1 den Radikanden in der Form $a = x_1^2 + (a - x_1^2)$ darstellt? Vergleiche damit das entsprechende Ergebnis beim Iterationsverfahren (I).

16. Von HERON (um 62 n.Chr.) wird angenommen, dass er für Wurzeln der Form $\sqrt{n^2-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auch die Näherungsformel

$$\sqrt{n^2-1} \approx n - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad \text{verwandte.}$$

a) Zeige, dass die von HERON angegebene Näherung $\sqrt{3} \approx \frac{26}{15}$ mit dieser Formel gewonnen werden kann.

b) Welcher Näherungswert ergibt sich aus obiger Formel für

1) $\sqrt{15}$, **2)** $\sqrt{63}$, **3)** $\sqrt{120}$?

c) Vergleiche die HERONsche Näherung für $\sqrt{3}$ mit der von ARCHIMEDES (um 287–212 v.Chr.) stammenden Abschätzung

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Vergleiche die Ergebnisse jeweils auch mit den von deinem Taschenrechner gelieferten Näherungswerten.

17. Die Babylonier rechneten bekanntlich im Sexagesimalsystem*, also im Stellenwertsystem mit der Grundzahl 60. In den Übersetzungen ihrer Keilschrifttexte werden Zahlen meist in der Form geschrieben, dass hinter die Ganzen ein Strichpunkt und zwischen Einer, Sechziger, ... bzw. zwischen Sechzigstel, 3600stel, ... jeweils ein Komma gesetzt wird. Zum Beispiel bedeutet 4,20;25,08 die Zahl $4 \cdot 60 + 20 + \frac{25}{60} + \frac{8}{3600}$.

a) Prüfe die aus einer babylonischen Wurzeltabelle stammende Gleichung $\sqrt{0;38,24} = 0;48$.

b) Gib den Wert von **1)** $\sqrt{3,45}$, **2)** $\sqrt{1;33,45}$, **3)** $\sqrt{11;13,21}$ im Sexagesimalsystem an.

18. Die Keilschrifttafel VAT 6598 (Abbildung 48.1) enthält folgende Aufgabe: Ein Tor. $\frac{1}{2}$ GAR und 2 Ellen Höhe, 2 Ellen Weite. Seine Diagonale ist was?

a) Wie viel Ellen misst die Diagonale, wenn 1 GAR = 12 Ellen** gilt?

b) Auf der Tafel wird für die Länge der Diagonale der Wert 0;41,15 GAR angegeben. Zeige, dass dies keine exakte Lösung ist und dass sie sich nach der Näherungsformel von Aufgabe **14** ergibt, wenn

* sexagesimus (lat.) = der sechzigste
** 1 GAR bedeutet etwa 6 Meter, 1 babylonische Elle also etwa 5 dm.

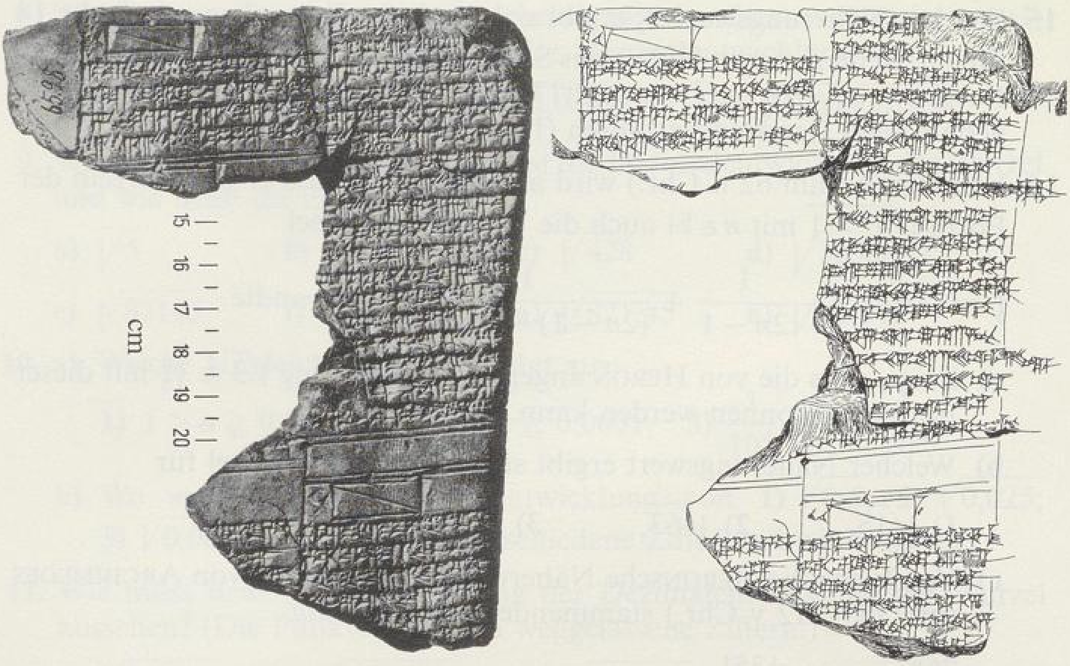


Abb. 48.1 Rückseite der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598, aufbewahrt in Berlin, Staatliche Museen: **V**orderasiatische **A**bteilung; **T**ontafeln, samt zugehöriger Autographie (wörtlich: Selbstgeschriebenes), d.h. handschriftlicher Übertragung der in den Ton eingedrückten Zeichen

man für p^2 die größte Quadratzahl wählt, die im Quadrat der Diagonalen enthalten ist.

c) Für dieselbe Aufgabe wird auf der Tafel auch noch die Lösung 0;42,13,20 GAR angegeben. Vergleiche die Genauigkeit der beiden Lösungen.

19. a) Auf der babylonischen Keilschrifttafel* AO 6484 aus Uruk aus der Zeit der SELEUKIDEN (321–63 v. Chr.) findet man für $\sqrt{2}$ den sexagesimalen Wert 1;25.

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert mit dem von deinem Taschenrechner angezeigten Wert überein?

2) Man kann nur vermuten, dass die Babylonier diese Näherung durch zweimalige Anwendung der Formel von Aufgabe 46/**14** gefunden haben, und zwar beginnend mit $p_1^2 = 1$; der sich dabei ergebende Näherungswert wird als p_2 genommen. Führe diese Rechnung durch.

•**b)** Auf der altbabylonischen Keilschrifttafel** YBC 7289 (Abbildung 49.1) steht auf der Diagonale eines Quadrats die Sexagesimalzahl 1;24,51,10.

* aufbewahrt im Louvre zu Paris in der Abteilung **A**ntiquités **O**rientales
** aufbewahrt in der **Y**ale **B**abylonian **C**ollection in New Haven (USA)

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert für $\sqrt{2}$ mit dem von deinem Taschenrechner hierfür angezeigten Wert überein?

2) Wie die Babylonier diesen recht genauen Wert gefunden haben, wissen wir nicht. Nahe liegend erscheinen die beiden folgenden Verfahren.
1. Art: Man führt zuerst das in **a 2** beschriebene Näherungsverfahren noch einen Schritt weiter.
2. Art: Man wendet zuerst auf 1;25 das Iterationsverfahren (I) von Seite 38f. einmal an.
Zeige, dass man jedes Mal $1\frac{169}{408}$ als Näherungswert erhält. Rechnet man dann diesen Bruch in eine Sexagesimalzahl um* und bricht nach der 3. Sexagesimalstelle hinter dem Semikolon ab, so erhält man die auf der Diagonale stehende Zahl. Weise dies nach.

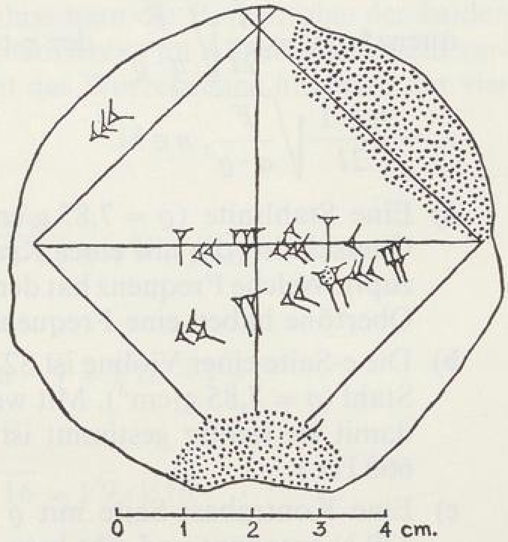


Abb. 49.1 Autographie der altbabylonischen Keilschrifttafel YBC 7289 (um 1700 v. Chr.). Auf der Quadratseite links oben liest man ‹‹‹ = 30, auf der Diagonale I‹‹IIII‹‹‹‹‹I‹ als Näherungswert für $\sqrt{2}$. Darunter steht die entsprechende Länge der Diagonale.

3) Berechne mit Hilfe dieses Näherungswerts die Länge der Diagonale als Sexagesimalzahl, wenn die Quadratseite die Länge 30 hat. (Abbildung 49.1)

20. Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft von 0 °C beträgt $c_0 = 331{,}6$ m/s. Sie nimmt mit steigender Temperatur zu, und zwar gilt bei der Lufttemperatur t (in °C): $c = c_0\sqrt{1 + \frac{1}{273{,}2\,\mathrm{K}}\,t}$.

a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit bei 20 °C bzw. 40 °C?

b) Bei welcher Temperatur beträgt die Schallgeschwindigkeit 325 m/s?

21. Wenn eine schwingende Saite von der Länge l, dem Querschnitt q und der Dichte ϱ mit einer Kraft F gespannt ist, dann hat ihr Grundton die Fre-

* Beispiel einer Umrechnung:

$$\frac{3}{35} = \frac{\frac{3}{35}\cdot 60}{60} = \frac{\frac{36}{7}}{60} = \frac{5+\frac{1}{7}}{60} = \frac{5}{60} + \frac{\frac{1}{7}}{60} = \frac{5}{60} + \frac{\frac{1}{7}\cdot 60}{3600} = \frac{5}{60} + \frac{8}{3600} + \frac{\frac{4}{7}\cdot 60}{216000} = 0;05,08,\ldots$$

quenz* $\nu_0 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{q \cdot \varrho}}$, der n-te Oberton die Frequenz

$$\nu_n = \frac{n+1}{2l}\sqrt{\frac{F}{q \cdot \varrho}},\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Eine Stahlsaite ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$) von 1,00 m Länge und 0,50 mm^2 Querschnitt, die mit einer Kraft von 160 N gespannt ist, wird angezupft. Welche Frequenz hat der dabei erklingende Grundton? Wie viele Obertöne haben eine Frequenz unter 2 kHz?

b) Die e-Saite einer Violine ist 32,5 cm lang; sie ist 0,35 mm dick und aus Stahl ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$). Mit welcher Kraft muss sie gespannt werden, damit sie richtig gestimmt ist? (Die Frequenz des Tones e″ beträgt 660 Hz.)

c) Eine Kontrabass-Saite mit $\varrho = 7{,}9\ \mathrm{g/cm^3}$ und $q = 6{,}2\ \mathrm{mm^2}$ ist mit 370 N gespannt und gibt beim Anstreichen den Ton ${}_1$E (so genanntes Kontra-E) mit 41 Hz. Wie viel cm ist diese Saite lang?

2.3 Rechenregeln für Quadratwurzeln

Aus Definition 33.1 folgt unmittelbar, dass $(\sqrt{a})^2 = a$ gilt. Das Ziehen der Quadratwurzel und anschließendes Quadrieren heben sich also auf. Gilt das auch für die umgekehrte Reihenfolge dieser beiden Rechenschritte? Dass dies nicht zutrifft, zeigt folgendes

Beispiel: $(-2)^2 = 4$; $\sqrt{4} = 2$; also $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Wegen $|-2| = 2$ gilt aber $\sqrt{(-2)^2} = |-2|$.

Das führt uns zu

> **Satz 50.1:** Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Beweis: $\sqrt{a^2}$ ist nach Definition 33.1 die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a^2$. Diese Gleichung hat für $a \neq 0$ die beiden Lösungen a und $-a$. Je nachdem, ob $a > 0$ oder $a < 0$ gilt, ist a oder $-a$ die positive Lösung. Für $a = 0$ ist $x = 0 = \sqrt{0^2}$ die einzige Lösung.
Somit gilt:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{für} \quad a > 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \\ 0 & \text{für} \quad a = 0 \end{cases}$$

also $\sqrt{a^2} = |a|$.

* frequentia (lat.) = die Häufigkeit; Frequenz = Zahl der Schwingungen pro Sekunde, Einheit 1/s = 1 Hz (1 Hertz) zu Ehren von Heinrich HERTZ (1857–1894), dem Entdecker der elektromagnetischen Wellen

Die vorausgehende Überlegung zeigt, dass man die Reihenfolge der beiden Rechenschritte »Wurzelziehen« und »Quadrieren« im Allgemeinen nicht vertauschen darf. Kann man aber vielleicht das Wurzelziehen mit einer der vier Grundrechenarten vertauschen?

Beispiele:

1) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\\ \sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$

2) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\\ \sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{16-9} \neq \sqrt{16}-\sqrt{9}$

3) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12\\ \sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}$

4) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9:16}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}\\ \sqrt{9}:\sqrt{16}=3:4=\frac{3}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9:16}=\sqrt{9}:\sqrt{16}$

Die Beispiele 1 und 2 *beweisen*, dass man die Reihenfolge von Wurzelziehen und Addieren bzw. Subtrahieren nicht vertauschen darf. Die beiden anderen Beispiele lassen jedoch *vermuten*, dass beim Multiplizieren und Dividieren die Vertauschung zulässig ist.
Tatsächlich gilt

Satz 51.1:

1) Für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt $\boldsymbol{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$.

2) Für $a \geqq 0$ und $b > 0$ gilt $\boldsymbol{\sqrt{a:b}=\sqrt{a}:\sqrt{b}}$, oder $\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$.

Beweis von **1**: Aus $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ folgt $a \cdot b \geqq 0$; alle drei Wurzeln sind definiert.
Aus $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = a \cdot b$ folgt, dass $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = ab$ darstellt, also gleich $\sqrt{ab}$ ist.

Beweis von **2**: Nach **1** gilt $\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{b\cdot\frac{a}{b}}$,

$$\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a}, \qquad \|:\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Die Regel **1** von Satz 51.1 lässt sich natürlich auch auf mehr als zwei Faktoren ausdehnen. So gilt z. B.

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a(bc)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{bc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}\,.$$

Im Sonderfall von n gleichen Faktoren erhält man

> **Satz 52.1:** Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$.

Als Anwendungen der bisher gefundenen Rechengesetze treten besonders häufig folgende Fälle auf:

Teilweises Wurzelziehen (partielles Radizieren): Lässt sich aus dem Radikanden ein quadratischer Faktor abspalten, so kann man aus diesem die Wurzel ziehen.

Beispiele:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{a^2 b^3 c^4} = \sqrt{a^2 b^2 c^4 \cdot b} = \sqrt{a^2 b^2 c^4} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot |b| \cdot c^2 \sqrt{b}$$

$$\sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 - 2ab + b^2)} = \sqrt{2(a-b)^2} = |a-b| \cdot \sqrt{2}$$

Einen Faktor unter die Wurzel nehmen: Es handelt sich hier um die Umkehrung des partiellen Radizierens.

Beispiele:

$$2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28}$$

$$-5 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{5^2 \cdot 3} = -\sqrt{75}$$

$$a \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} |a| \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}\,, & \text{falls } a \geqq 0 \\ -|a| \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}\,, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beachte also, dass man nur nicht negative Faktoren durch eine Quadratwurzel darstellen kann.

Rationalmachen des Nenners: Dabei geht es darum, Wurzeln, die im Nenner eines Bruches auftreten, zu beseitigen.

Beispiele:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{7-5} =$$

$$= \frac{\sqrt{21}+\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{21}+\sqrt{15})$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^4}} = \frac{\sqrt{ab}}{a^2}$$

Aus $a = b$ folgt, falls a und b nicht negativ sind, die Gleichung $\sqrt{a} = \sqrt{b}$; umgekehrt erhält man durch Quadrieren daraus wieder $a = b$. Also sind, falls $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$, die beiden Gleichungen $a = b$ und $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ äquivalent. Gilt eine entsprechende Feststellung auch für Ungleichungen?

Beispiele:

$4 < 49$ liefert $\sqrt{4} < \sqrt{49}$; richtig, weil $2 < 7$.

$0 < 5$ liefert $\sqrt{0} < \sqrt{5}$; richtig, denn $0 < 2{,}23\ldots$

$2{,}25 > 0{,}36$ liefert $\sqrt{2{,}25} > \sqrt{0{,}36}$; richtig, da $1{,}5 > 0{,}6$.

Vermutlich gilt also

Satz 53.1: Monotoniegesetz des Radizierens

Für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt: $\boldsymbol{a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}}$.

Beweis: 1) $\Leftarrow$: Aus der Voraussetzung $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ und $\sqrt{a} \geqq 0$ folgt $\sqrt{b} > 0$. Wir multiplizieren die Ungleichung $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ mit $\sqrt{a}$ bzw. $\sqrt{b}$:

$\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \Vert \cdot \sqrt{a}$	$\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \Vert \cdot \sqrt{b}$
$a \leqq \sqrt{ab}$.	$\sqrt{ab} < b$.

Somit ist $a \leqq \sqrt{ab} < b$, also $a < b$.

2) $\Rightarrow$: Vorausgesetzt ist nun $0 \leqq a < b$. Die Annahme $\sqrt{a} \geqq \sqrt{b}$ hätte nach **1** die Ungleichung $a \geqq b$ zur Folge, also einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher gilt: $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ c) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}$

d) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{1000}$ e) $\sqrt{10^7}\cdot\sqrt{10^3}$ f) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}001}$

g) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{14{,}4}$ h) $\sqrt{0{,}625}\cdot\sqrt{10^3}$ i) $\sqrt{1960}\cdot\sqrt{0{,}1}$

k) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}4}$ l) $\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{0{,}9}$ m) $\sqrt{0{,}121}\cdot\sqrt{4{,}9}$

n) $\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$ o) $\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{\frac{28}{3}}$ p) $\sqrt{14\frac{17}{35}}\cdot\sqrt{11\frac{2}{3}}$

2. a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}$

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}$ d) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{15}$

e) $\sqrt{0{,}35}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2{,}1}$ f) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{0{,}02}\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{0{,}8}$

g) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{7}}\cdot\sqrt{1{,}75}$ h) $\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{2{,}2}\cdot\sqrt{\frac{18}{11}}\cdot\sqrt{7{,}5}\cdot\sqrt{16{,}8}$

3. a) $\sqrt{16\cdot 121}$ b) $\sqrt{625\cdot 49\cdot 100}$ c) $\sqrt{0{,}01\cdot 144\cdot 225}$

d) $\sqrt{0{,}36\cdot 2^4\cdot 5^2}$ e) $\sqrt{3^6\cdot 1{,}69\cdot 7^2}$ f) $\sqrt{5^4\cdot 2^8\cdot 11^2}$

g) $\sqrt{(2\cdot 3^2)\cdot(5^6\cdot 2^3)}$ h) $\sqrt{(3\cdot 5^2\cdot 7)\cdot 84}$ i) $\sqrt{(2^3\cdot 11\cdot 3^5)\cdot 297\cdot 8}$

4. Vereinfache durch teilweises Radizieren:

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{180}$ d) $\sqrt{176}$

e) $\sqrt{216}$ f) $\sqrt{1250}$ g) $\sqrt{9000}$ h) $\sqrt{2{,}5}$

i) $\sqrt{40{,}5}$ k) $\sqrt{0{,}00625}$

5. a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{243}}$ d) $\dfrac{\sqrt{176}}{\sqrt{275}}$

e) $\sqrt{32{,}4}:\sqrt{0{,}1}$ f) $\sqrt{0{,}294}:\sqrt{2{,}4}$ g) $\sqrt{0{,}098}:\sqrt{22{,}05}$

6. a) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{75}}\cdot\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{32}}$ b) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{24}}\cdot\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{700}}$ c) $\dfrac{\sqrt{24{,}5}}{\sqrt{192}}:\dfrac{6}{\sqrt{54}}$ d) $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{450}}:\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{2025}}$

7. Vereinfache:

a) $\sqrt{ab^4}$ b) $\sqrt{a^2b^2}$ c) $\sqrt{25m^{10}n^3}$ d) $\sqrt{27x^8y^4}$

e) $\sqrt{\dfrac{32}{a^2}\cdot\dfrac{b}{25}}$ f) $\sqrt{\dfrac{250m^3}{n^2}:\dfrac{2n^2}{m^2}}$ g) $\sqrt{\dfrac{1{,}21uv^2w^4}{192}}$

8. a) $(\sqrt{8}-3\sqrt{18}+2\sqrt{32})\cdot\sqrt{2}$ b) $(3\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{80})\cdot 2\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{6}\,(8\sqrt{12}-2\sqrt{24}+\sqrt{75})$ d) $\frac{1}{5}\sqrt{15}\,(2\sqrt{45}+3\sqrt{135}-3\sqrt{20})$

9. **a)** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **b)** $(6\sqrt{5}-5\sqrt{6})(5\sqrt{6}-6\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{14}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{7})$ **d)** $(5\sqrt{11}-2\sqrt{10})(-\sqrt{55}-2\sqrt{2})$

10. **a)** $[(2\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{22}]\cdot[(2\sqrt{5}+\sqrt{2})-\sqrt{22}]$

b) $[2\sqrt{15}+(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})]\cdot[2\sqrt{15}-(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})]$

11. **a)** $(5\sqrt{2}+\sqrt{18})^2$

b) $(2\sqrt{5}-\sqrt{18})^2$

c) $(\sqrt{20}-3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{5}+\sqrt{8})^2$

d) $(\sqrt{320}-2\sqrt{70})^2-(\sqrt{240}-6\sqrt{10})^2$

12. Beispiel: $\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}}$

Mache bei den folgenden Quotienten den Nenner rational:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{-2}{\sqrt{19}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}}$

e) $\dfrac{2}{3\sqrt{11}}$ **f)** $\dfrac{6+10\sqrt{1,2}}{5\sqrt{1,2}}$ **g)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$ **h)** $\dfrac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}$

13. Mache die Nenner rational.

a) $\dfrac{1}{3+\sqrt{10}}$ **b)** $\dfrac{5}{2\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **e)** $\dfrac{1-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{8}}{3\sqrt{14}+\sqrt{7}}$

14. Beseitige die Wurzeln im Nenner.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2b}}$ **b)** $\dfrac{2b^2}{\sqrt{8a^2b^5c}}$ **c)** $\dfrac{2a^3}{\sqrt{6a^4b^3c^3}}$

d) $\dfrac{a^3b}{\sqrt{a^6b}}$ **e)** $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p\sqrt{q}+q\sqrt{p}}$

15. Beispiel: $\mathbf{(\sqrt{2})^3=(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}}$.

a) $(\sqrt{2})^4$ **b)** $(\sqrt{2})^{10}$ **c)** $(\sqrt{2})^{11}$ **d)** $(\sqrt{2})^{15}$ **e)** $(\sqrt{2})^{18}$

f) $(\sqrt{3})^3$ **g)** $(\sqrt{11})^2$ **h)** $(\sqrt{7})^5$ **i)** $(\sqrt{3})^8$ **k)** $(\sqrt{5})^9$

16. Beispiel: $\boldsymbol{\sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \cdot 7} = 7^2 \cdot \sqrt{7} = 49\sqrt{7}}$.

a) $\sqrt{2^6}$ **b)** $\sqrt{3^5}$ **c)** $\sqrt{5^3}$ **d)** $\sqrt{8^2}$ **e)** $\sqrt{6^3}$

f) $\sqrt{11^4}$ **g)** $\sqrt{3^9}$ **h)** $\sqrt{2^{10}}$ **i)** $\sqrt{2^{13}}$ **k)** $\sqrt{2^{20}}$

17. a) $(\sqrt{2})^5 + (\sqrt{8})^4 - 2\sqrt{2^3}$ **b)** $((\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5^3}$

c) $(\sqrt{7^4} + 4(\sqrt{7})^3)((\sqrt{7})^5 - 7 \cdot \sqrt{4^2})$

d) $(4\sqrt{3^3} + (\sqrt{2})^5) : (8(\sqrt{3})^7 + 9\sqrt{2^7})$

18. Vereinfache:

a) $(\sqrt{a})^3$ **b)** $(\sqrt{a})^4$ **c)** $(\sqrt{a})^7$ **d)** $(\sqrt{a})^{2n}$ **e)** $(\sqrt{a})^{2m+1}$

f) $\sqrt{a^2}$ **g)** $\sqrt{a^3}$ **h)** $\sqrt{a^4}$ **i)** $\sqrt{a^5}$ **k)** $\sqrt{a^6}$

19. Vereinfache:

a) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ **b)** $\sqrt{2m^2 - 12m + 18}$

c) $\sqrt{z^4 + 2z^2 + 1}$ **d)** $\sqrt{9z^4 - 6z^2 + 1}$

e) $\sqrt{12{,}1x^2 + 4{,}4xy + 0{,}4y^2}$ **f)** $\sqrt{1 + 2|x| + x^2}$

20. Nimm, soweit dies möglich ist, die Faktoren unter die Wurzel. Achte dabei auf eventuell notwendige Fallunterscheidungen.

a) $3\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{7} \cdot 5$ **c)** $(-2)\sqrt{3-x}$ **d)** $(7-3)\sqrt{5a}$

e) $x\sqrt{y}$ **f)** $a^2\sqrt{x}$ **g)** $2b^3\sqrt{y}$ **h)** $(a-b)\sqrt{a+b}$

21. Welche Größenbeziehung besteht zwischen folgenden Zahlenpaaren?

a) $\sqrt{17}$ und $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{381}$ und $\sqrt{247}$

c) $\sqrt{a^2+2}$ und $\sqrt{a^2+1}$ **d)** $\sqrt{0{,}75}$ und $\sqrt{\frac{3}{4}}$

e) $\sqrt{0{,}1}$ und $\sqrt{0{,}01}$ **f)** $\sqrt{\frac{37}{81}}$ und $\sqrt{0{,}457}$

• **22.** Es sei $0 < a < 1$ und $b > 1$. Welche Größenbeziehung besteht dann zwischen

a) $\sqrt{a}$ und a, **b)** $\sqrt{b}$ und b, **c)** $\sqrt{a^7}$ und $(\sqrt{a})^8$,

d) $(\sqrt{b})^3$ und $\sqrt{b^5}$, **e)** $\sqrt{a^3b^2}$ und $b\sqrt{a^5}$, **f)** $\sqrt{a^3b}$ und $a\sqrt{ab^3}$?

23. Welche Ungleichung besteht zwischen

a) $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16}$, **b)** $\sqrt{5^2+10^2}$ und $\sqrt{5^2} + \sqrt{10^2}$,

c) $\sqrt{625-49}$ und $\sqrt{625} - \sqrt{49}$, **d)** $\sqrt{225-25}$ und $\sqrt{225} - \sqrt{25}$?

24. a) Beweise: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

b) Beweise: $0<a<b \Rightarrow \sqrt{b}-\sqrt{a}<\sqrt{b-a}$. (Hinweis: Quadriere!)

25. Zeige, dass die Zahlen x und y gleiche Quadrate haben. Warum sind trotzdem die Zahlen selbst nicht gleich?

a) $x=3-2\sqrt{3}$; $\quad y=\sqrt{21-12\sqrt{3}}$

b) $x=\sqrt{14-8\sqrt{3}}$; $\quad y=\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

26. Mit Hilfe von Quadratwurzeln kann man dieselbe Zahl auf sehr unterschiedliche Art darstellen. Weise nach, dass die folgenden Gleichungen richtig sind:

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ **b)** $2+\sqrt{5}=\sqrt{4\sqrt{5}+9}$

c) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{2}+\sqrt{7}$ **d)** $\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{2}+4}=\sqrt{\sqrt{8}}+\sqrt{\sqrt{2}}$

•**27.** Beispiele wie die von Aufgabe **26** lassen sich auf zwei Rechenregeln zurückführen, die in geometrischer Fassung schon bei EUKLID (um 300 v. Chr.) in Buch X seiner *Elemente*, in algebraischer Form z. B. im arabischen Euklid-Kommentar des AL-NAYRIZI († 922) und im indischen *Bidscha-ganita* – »Samen der Rechenkunst« – von BHĀSKARA II (1115–nach 1178) vorkommen: Für $0 \leqq a \leqq b$ gilt

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \quad \text{und} \quad \sqrt{b}-\sqrt{a}=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

a) Beweise diese Regeln.

b) Warum existiert $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ für beliebige positive Zahlen a und b? (Hinweis: Aufgabe 45/**6**)

c) Bereits ABU KAMIL (um 850–930) berechnet in seinem *al-kitab fi al-dschabr wa-'l-muqabala* mit diesen Formeln $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$ und $\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{2}$. Bestätige diese Ergebnisse **1)** unter Verwendung der obigen Formeln, **2)** ohne Verwendung dieser Formeln.

d) Vereinfache die folgenden Terme mit Hilfe der obigen Formeln:

1) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (arabisch, um 1100)

2) $\left(\sqrt{\sqrt{40}+6}+\sqrt{\sqrt{40}-6}\right)^2$ (Luca PACIOLI [um 1445–1517], *Summa*, 1494)

3) $\left(\sqrt{12+\sqrt{6}}+\sqrt{12-\sqrt{6}}\right)^2$ (Michael STIFEL [1487?–1567], *Arithmetica integra*, 1544)

28. Überprüfe die folgenden Beispiele aus der altindischen Mathematik:

a) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

b) $\sqrt{16+\sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$

**2.4 Zur Geschichte der irrationalen Zahlen

Eine der größten Leistungen der griechischen Mathematik ist die Entdeckung der Inkommensurabilität zweier Strecken, d.h. der Existenz von Streckenverhältnissen, die nicht mehr durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausgedrückt werden können. Sie führte schließlich zum Begriff der irrationalen Zahl. Es überrascht, dass die Ägypter, erst recht die Babylonier, die ja bereits um 1800 v. Chr. erhebliche mathematische Kenntnisse besaßen – du wirst später davon noch mehr hören –, das Problem, ob es zu zwei Strecken stets ein gemeinsames Maß gibt, überhaupt nicht erkannten. Es überrascht noch mehr, dass die Griechen dieses Problem zu einer Zeit erkannten und auch zu lösen verstanden, als ihre Mathematik noch in den Kinderschuhen steckte. Noch erstaunlicher ist es, dass durch kein Dokument belegt ist, wann und durch wen diese ungeheuere Entdeckung erfolgte, obwohl die Griechen die Tragweite dieser Entdeckung erfassten.*

Der früheste Bericht von dieser Entdeckung ist die Stelle 147c des Dialogs *Theätet*, den PLATON (428–348 v. Chr.) im Jahre 368 v. Chr. verfasste, kurz nachdem sein Schüler, der Mathematiker THEAITETOS (um 415–369 v. Chr.), in einer Schlacht tödlich verwundet worden war. In diesem Dialog, der im Jahre 399 v. Chr., dem Todesjahr des SOKRATES, spielt, zeigt ein alter Mathematiker, nämlich THEODOROS VON KYRENE (um 465 bis um 385 v. Chr.), dass die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt eine der Nichtquadratzahlen von 3 bis 17 ist, irrational ist. Bei 17, so heißt es, »hielt er zufällig inne«. Von einem Quadrat des Inhalts 2 wird nichts gesagt! Also muss der Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ älter sein. Der in den meisten Codices als Nachtrag zu Buch X von EUKLIDS *Elementen* (um 300 v. Chr.) überlieferte arithmetische Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist sprachlich weitaus schwerfälliger als die sonstige Diktion der *Elemente*; das weist darauf hin, dass er aus alter Zeit stammt. Auf alle Fälle scheint $\sqrt{2}$ die erste Zahl zu sein, deren Irrationalität arithmetisch und nicht nur geometrisch bewiesen wurde (siehe Aufgabe 12/**4**). Mit größter Wahrscheinlichkeit wurde aber die Irrationalität nicht am Quadrat entdeckt, sondern am regelmäßigen Fünfeck bzw. am Pentagramm (Abbildung 9.1), dem Erkennungszeichen des Geheimbundes der PYTHAGOREER (Aufgabe 13/**11**).

Einstimmig sind spätantike Autoren der Meinung, dass der Philosoph** HIPPASOS aus Metapont/Unteritalien (2. Viertel des 5. Jh.s v. Chr.), der noch ein unmittelbarer Schüler des PYTHAGORAS (um 570–um 497 v. Chr.) sein könnte, die Entdeckung des Irrationalen an die Öffentlichkeit gebracht hat. Ansonsten wird von ihm noch berichtet, dass er musikalische Experimente an Metallscheiben verschiedener Dicke und an mit Wasser gefüllten Röhren ausgeführt und sich außerdem mit Proportionen und Mitteln (siehe Aufgabe 45/**6**) beschäftigt habe. Aber zurück zum Irrationalen!

IAMBLICHOS aus Chalkis/Koile-Syrien (um 250–um 330 n. Chr.) berichtet uns:
»HIPPASOS habe als Erster die aus 12 Fünfecken zusammengesetzte Kugel, d.h. die Umkugel des Dodekaeders [Abbildung 59.1], öffentlich beschrieben und sei deshalb wie ein Gottloser im Meer umgekommen.«

Und an späteren Stellen lesen wir bei ihm:
»Einige sagen auch, ihm sei dies widerfahren, weil er das Geheimnis des Unaussprechbaren [siehe unten] und des Inkommensurablen verraten habe.«

* ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) kommt z. B. nicht weniger als 26-mal in seinen Werken auf die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat zu sprechen.

** φιλόσοφος (philósophos) ist eine Wortschöpfung der PYTHAGOREER und bedeutet Freund der Weisheit.

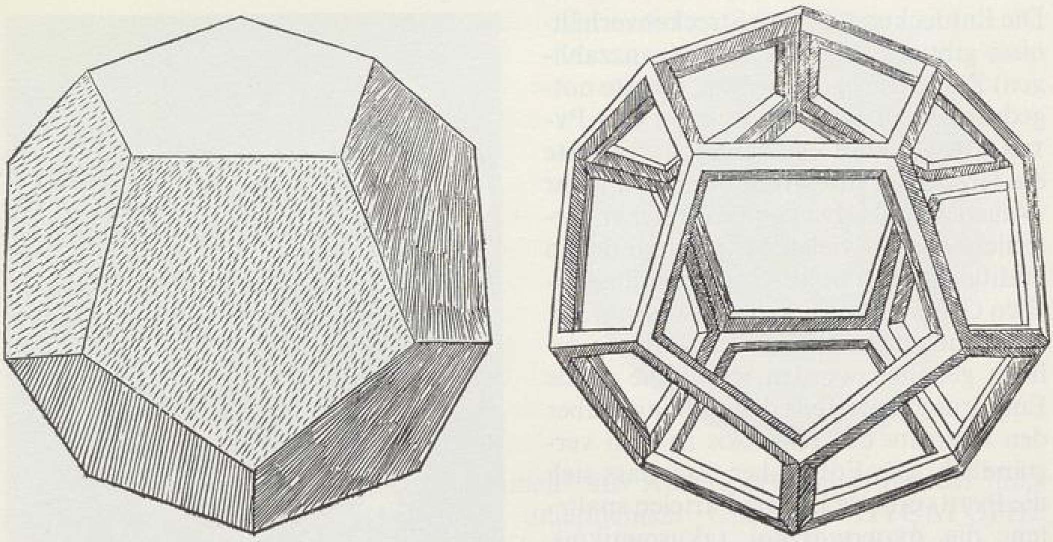


Abb. 59.1 Das Dodekaeder (= Zwölfflach)*, ein von 12 regelmäßigen ebenen Fünfecken begrenzter Körper, links als Vollkörper, rechts als Hohlkörper, gezeichnet von LEONARDO DA VINCI (1452–1519) für die 1509 erschienene *Divina Proportione* seines Freundes Luca PACIOLI (um 1445–1517).

»Denjenigen aber, welcher als erster die Natur des Kommensurablen und des Inkommensurablen solchen eröffnete, die nicht würdig waren an der Lehre teilzuhaben, sollen die Pythagoreer so tief verabscheut haben, dass sie ihn nicht nur aus der Lehr- und Lebensgemeinschaft ausschlossen, sondern ihm [zu Lebzeiten] auch ein Grabmal errichteten mit der Begründung, ihr einstiger Gefährte sei aus dem Leben unter den Menschen ausgeschieden.«
Nirgends wird also berichtet, dass HIPPASOS der Entdecker des Irrationalen sei; nur als Verräter wird er dingfest gemacht. Man neigt jedoch heute dazu, ihn auch für den Entdecker zu halten. Warum aber die ganze Aufregung über den Frevler und den Verrat?
Um die Frage beantworten zu können müssen wir mehr über die PYTHAGOREER wissen. In seiner *Metaphysik* berichtet uns ARISTOTELES (384–322 v. Chr.), die PYTHAGOREER »sahen in den [natürlichen] Zahlen die Eigenschaften und Verhältnisse der Harmonie [... und da] die Zahlen das erste in der ganzen Natur, so nahmen sie auch an, die Elemente der Zahlen seien die Elemente alles Seienden und die ganze Welt sei Harmonie und Zahl. [...] Alles führen sie auf die Zahlen zurück.« Anders ausgedrückt: PYTHAGORAS und seine Schüler waren der Meinung, dass irgend zwei Dinge dieser Welt stets in einem Verhältnis zueinander stehen, das durch zwei natürliche Zahlen, d.h. durch einen Bruch, ausgedrückt werden kann. Als Beispiel diene die Musik: Man erhält die Oktave bzw. die Quint zu einem Ton, wenn man die ihn erzeugende Saite im Verhältnis 2 : 1 bzw. 3 : 2 verkürzt:

Oktave 2 : 1 Quint 3 : 2

* δωδεκάεδρος (dodekáedros) = *zwölfsitzig, mit zwölf Grundlagen* aus δώδεκα (dódeka) = *zwölf* und ἡ ἕδρα (he hédra) = *der Sitz, die Grundlage*. Das Fachwort δωδεκάεδρον (dodekáedron) verwendet EUKLID in Buch XI seiner *Elemente*.

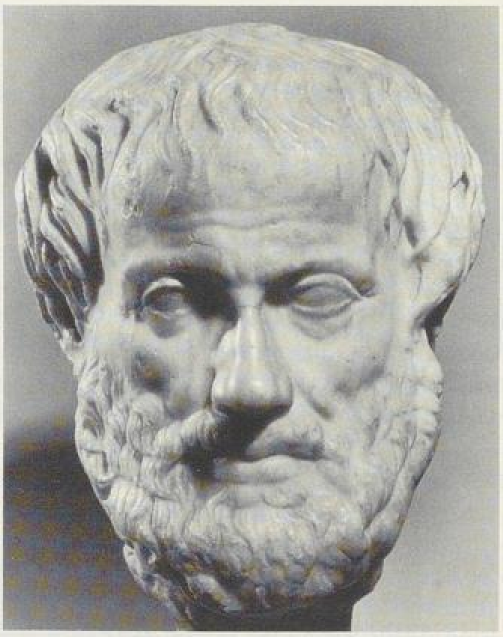


Abb. 60.1 ARISTOTELES (384 Stagira/Thrakien – 322 Chalkis/Euböa). Römische Kopie nach einem um 325 v. Chr. entstandenen griechischen Original. Wien, Kunsthistorisches Museum

Die Entdeckung, dass es Streckenverhältnisse gibt, zu denen es keine (ganzzahligen) Zahlenverhältnisse gibt, musste notgedrungen zu einer Krise unter den PYTHAGOREERN führen; denn sie zerstörte die Grundlage ihrer Weltanschauung, ihr »Alles ist Zahl«. Du kannst dir sicher vorstellen, dass es vielen Mitgliedern des in Süditalien auch politisch sehr einflussreichen Geheimbundes lieber gewesen wäre, wenn diese umwälzende Entdeckung geheim gehalten worden wäre. Die große Empörung eines Teils der Anhänger über den »Verrat« des HIPPASOS ist also verständlich. Die Folge aber war, dass sich die PYTHAGOREER in zwei Parteien spalteten, die ἀκουσματικοί (akusmatikói), d.h. die Hörer, die ohne tiefere Einsicht auf das Wort des Meisters schworen und der alten Lehre anhingen, und die μαθηματικοί (mathematikói), d.h. die durch Lernen Einsicht erlangt Habenden, also die Gruppe um HIPPASOS, die durch ihre geistige Schulung in der Lage waren das Neue zu begreifen.* Bezeichnenderweise stellten sich die Mathematikoi bei den Unruhen in Unteritalien um 445 v. Chr. auf die Seite des Volkes, die Akusmatikoi dagegen auf die Seite des herrschenden Adels. Die wechselhaften Ereignisse führten schließlich dazu, dass zuerst die Akusmatikoi und später die Mathematikoi aus Unteritalien vertrieben wurden, sodass um 350 v. Chr. der pythagoreische Bund jede Bedeutung verloren hatte.

PLATON lernte 388/387 in Unteritalien bei ARCHYTAS VON TARENT pythagoreisches Gedankengut kennen. In seinem letzten Werk, den *Νόμοι* (Nómoi) – »Gesetze« –, das erst nach seinem Tode bekannt wurde, zeigt sich, wie beeindruckt PLATON von der Entdeckung der irrationalen Verhältnisse war. Er spricht dort an der Stelle 819/820 von einer »lächerlichen und schimpflichen Unwissenheit, die allen Menschen innewohnt«, ehe sie davon erfahren haben, und bekennt: »Mich selbst ergriff durchaus Verwunderung, als ich spät [hier übertreibt er!] davon hörte. Es kam mir vor, als wäre so etwas [nämlich ein solches Unwissen] bei den Menschen gar nicht möglich, sondern eher bei einer Herde von Schweinen. Und ich schämte mich, nicht nur für mich selbst, sondern für alle Griechen.« In diesen Worten kommt auch zum Ausdruck, dass sich die Kenntnis von der Existenz irrationaler Verhältnisse noch nicht sehr verbreitet hatte. Und PLATON schließt seine Betrachtung über das Irrationale mit den Worten: »Das ist eins von den Dingen, welches nicht zu wissen wir für eine große Schande erklärten; es aber zu kennen ist nichts besonders Rühmenswertes!«

* ἀκούειν (akúein) = *hören, vernehmen*; ἄκουσμα (ákusma) = *das Gehörte, die Lehre*.
μαθηματικός (mathematikós) = *lernbegierig, gelehrig* kommt von μανθάνειν (manthánein) = *lernen, erlernen, verstehen, einsehen* und hängt zusammen mit μάθημα (máthema) = *das Gelernte, die Kenntnis, das Wissen*.

Abb. 61.1 Rückseite zweier Tetradrachmen* aus Abdera (Ἄβδηρα) mit der links oben beginnenden, im Uhrzeigersinn umlaufenden Umschrift ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ (= Pythagores), geprägt zwischen 430 und 420 v. Chr., vermutlich Pythagoras darstellend. $\varnothing = 2{,}4$ cm; links 13,98 g,** rechts 13,08 g.

Die Entdeckung, dass die Diagonalen des Fünfecks und des Quadrats nicht durch den griechischen Zahlbegriff erfasst werden können, dass sie aber andererseits als Strecken exakt vorhanden sind, hatte weit reichende Folgen für die weitere Entwicklung der griechischen Mathematik. Man wandte sich nämlich von der Arithmetik, der Lehre von den Zahlen, ab und betrieb Mathematik als Geometrie. In ihr konnte, auch mit Strecken irrationaler Länge, das von den griechischen Philosophen geforderte Ideal der Exaktheit verwirklicht werden.
Einen großen Schritt weiter brachte Eudoxos von Knidos (um 400–347 v. Chr.) die Mathematik: Es gelingt ihm, eine geometrische Proportionenlehre auch für inkommensurable Streckenverhältnisse zu schaffen. Dabei führt er bewusst den Begriff der Größe (μέγεθος [mégethos]) in die Mathematik ein, was auf eine Erweiterung des Zahlbegriffs bis hin zur reellen Zahl hinausläuft. Euklids Buch V der *Elemente* geht praktisch auf Eudoxos zurück. Im recht schwierigen Buch X, das vermutlich von Theaitetos stammt, wird die Theorie der irrationalen Größen geometrisch weiter ausgebaut. Aber Eudoxos wurde erst 2000 Jahre später voll verstanden. In ihren Beweisen schlagen sich die Griechen immer auf die sichere Seite: Sie bevorzugen geometrische Beweise vor algebraischen Überlegungen, da irrationale Zahlen ihnen unvorstellbar waren. Auch Diophant (um 250 n. Chr.), der mit seinen *Ἀριθμητικῶν βιβλία* (Arithmetikōn biblía) – »Bücher über die Zahlenlehre« – algebraisches Denken wieder aufnimmt, vermeidet es stets durch entsprechende Wahl der Koeffizienten, dass solche Zahlen als Lösungen einer Gleichung auftreten.
Erst den Arabern gelingt es, langsam die Algebra von ihrer geometrischen Verkleidung zu befreien. Es ist insbesondere ein Verdienst al-Bagdadis (um 1100), dass er in seinem Kommentar zu Buch X von Euklids *Elementen*, den Gerhard von Cremona (1114–1187) übersetzt, Zahlenbeispiele mit Wurzeln vorführt. Es entwickelt sich eine

* Eine Tetradrachme ist ein silbernes Vier-Drachmen-Stück. Das Monatsgehalt eines Lehrers im 2. Jh. v. Chr. betrug etwa 12 Tetradrachmen.

** Diese Münze ist die erste in einer Reihe ähnlicher Prägungen, bei denen der für die Prägung zuständige Jahresbeamte der Stadt Abdera seinen Namen mit einer berühmten Gestalt der griechischen Geschichte oder Sagenwelt in Verbindung brachte. Der Beamte Pythagores wählte ein idealisiertes Portrait seines berühmten Namensvetters, des Philosophen und Mathematikers Pythagoras.

Kunst des Rechnens mit Wurzeln, wie du sie in **2.3** gelernt hast. LEONARDO VON PISA (um 1170 bis nach 1240), der sein Wissen von den Arabern bezog, ließ in seinem *liber abaci* (1202) irrationale Zahlen sowohl als Lösungen wie auch als Koeffizienten von Gleichungen zu (Aufgabe 79/**3** und 82/**4e**, **f**). Allmählich wird das Rechnen mit irrationalen Zahlen zu einer Selbstverständlichkeit. Schreibt doch um 1460 Frater FRIDERICUS AMANN* († 1465) in einem algebraischen Traktat des *Codex latinus monacensis 14908*: »Wer mit den surdischen [d.h. irrationalen (siehe unten)] Zahlen, ihrem Addieren und ihrem Subtrahieren, den Binomen [...] und den anderen irrationalen Größen nicht umzugehen weiß, der versteht in der Arithmetik nichts Besonderes.«** Dennoch sind diese surdischen Zahlen für ihn keine Zahlen. »Surdus numerus non est numerus« schreibt er. Auch Michael STIFEL (1487?–1567) diskutiert diese Frage 1544 in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« –, obwohl er zu einem vertieften Verständnis der Irrationalzahl gelangt ist: »So, wie also eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist auch eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie gewissermaßen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.«*** Dieser Nebel der Unendlichkeit sind wohl die unendlichen Dezimalzahlen, mit denen man die irrationalen Zahlen darstellen kann. Erst dadurch, dass 1637 René DESCARTES (1596–1650) in seiner *La Géométrie* mit Hilfe des Strahlensatzes auch das Produkt zweier Strecken a und b wieder als Strecke darstellt (Abbildung 62.2) – bis dahin wurde dieses Produkt immer als Fläche interpretiert –, gelingt eine Übertragung der geometrisch wohl definierten Irrationalitäten in die Welt der Zahlen mit ihren Rechengesetzen. Der Durchbruch ist geschafft, die irrationalen Zahlen werden als Zahlen anerkannt.

Abb. 62.1 Vorderseite der Tetradrachme von Abbildung 61.1, links; dargestellt ist ein Greif.

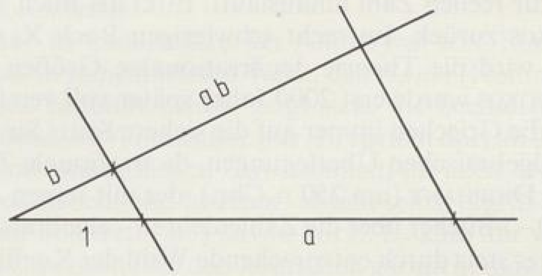


Abb. 62.2 Das Produkt *ab* als Strecke nach DESCARTES

Dennoch blieb es dem 19. Jh. vorbehalten, die irrationalen Zahlen ohne jede geometrische Begründung auf algebraischem Wege einführen zu können. Von verschiedenen Mathematikern wurden dazu verschiedene Verfahren vorgeschlagen, die alle auf das-

* Seit 1995 weiß man, dass die bisher dem FRIDERICUS GERHART († 1463) zugeschriebenen Abhandlungen von FRIDERICUS AMANN stammen und umgekehrt.

** Qui in surdis atque additis et diminutis et binomiis [...] et lineis ceteris irrationalibus agere nescit, nihil in Arismetrica egregii novit.

*** Sic igitur infinitus numerus, non est numerus: sic irrationalis numerus non est verus numerus, qui lateat sub quadam infinitatis nebula.

selbe Ergebnis hinauslaufen. Wir nennen hier die Arbeiten Richard DEDEKINDS (1831 bis 1916) und Georg CANTORS (1845–1918), beide aus dem Jahre 1872. Die Definition der reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen, die du kennen gelernt hast, geht auf die *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen* von Paul Gustav Heinrich BACHMANN (1837–1920) aus dem Jahre 1892 zurück.

Abschließend wollen wir noch die Entstehung des Fachworts **irrational** verfolgen. Nach der Entdeckung der Inkommensurabilität nannten die PYTHAGOREER ein Verhältnis aus zwei ganzen Zahlen, also unsere rationale Zahl, ῥητός (rhetós) = *aussprechbar*, ein Verhältnis aber, das sich nicht durch ganze Zahlen ausdrücken ließ, also unsere irrationale Zahl, ἄρρητος (árrhetos) = *unaussprechbar*. THEODOROS VON KYRENE (um 465–um 385), der Lehrer PLATONS, verwendet stattdessen das Gegensatzpaar σύμμετρος – ἀσύμμετρος (sýmmetros – asýmmetros), also *gemeinsam messbar – nicht gemeinsam messbar*, bezogen auf die Einheit. Sein und PLATONS Schüler THEAITETOS (um 415–369 v. Chr.) betrachtet Verbindungen wie $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ und $\sqrt{\sqrt{a}}$. Erstere ergeben, wenn man sie quadriert, nicht immer eine rationale Zahl. So wird z. B. $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2 = 2+8+2\sqrt{16} = 18$, also eine rationale Zahl, aber $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+3+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$ eine irrationale Zahl. Für Größen der letzteren Art benützt THEAITETOS ein altes Wort, nämlich ἄλογος (álogos) = *sprachlos, stumm, unaussprechbar*. EUKLID (um 300 v. Chr.) übernimmt die Bezeichnung von THEAITETOS, behält aber das Gegensatzpaar des THEODOROS bei. Dadurch vermischen sich diese drei Wörter in ihrer Bedeutung. Allmählich setzt sich jedoch bei den griechischen Mathematikern ἄλογος zur Bezeichnung irrationaler Größen durch.

BOETHIUS (um 480–524?) übersetzt σύμμετρος mit *commensurabilis*, der römische Staatsmann und Gelehrte CASSIODORUS (um 490– um 583), der ebenso wie BOETHIUS in den Diensten THEODERICHS DES GROSSEN, des Ostgotenkönigs, stand, übersetzt das Gegensatzpaar mit *rationalis – irrationalis*, womit wir bei unseren Fachwörtern sind. GERHARD VON CREMONA (1114–1187) benützt sie, als er den Euklid-Kommentar des AL-NAYRIZI († um 922) übersetzt. In Michael STIFELS (1487?–1567) *Arithmetica integra* von 1544 sind sie feste Fachausdrücke. Das Wort *irrational* hatte aber lange Zeit noch einen interessanten Konkurrenten.
Das griechische ἄλογος (álogos) = *sprachlos*, *unaussprechbar* wird bei AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847) und anderen arabischen Mathematikern unerklärlicherweise durch das arabische Wort *aṣamm* wiedergegeben, das nicht sprachlos, sondern *taub* bedeutet. Als GERHARD VON CREMONA den Euklid-Kommentar des AL-BAGDADI (um 1100), den er dem des AL-NAYRIZI beifügt, und die *Algebra* des AL-CHARIZMI übersetzt, wählt er für *aṣamm* die wortgetreue Entsprechung, nämlich **surdus**, das dann auch LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) gerne verwendet. Michael STIFEL übernimmt es und verdeutscht die *numeri surdi* gar zu *surdische Zahlen*! Bis ins 18. Jh. bleibt *surdus* als mathematisches Fachwort lebendig. Im Englischen ist heute noch *surd number* als Fachbegriff für Irrationalzahl gebräuchlich.

Bei dieser Gelegenheit können wir dir jetzt auch den mathematischen Ursprung des Worts **Binom** erklären. Die schon bei THEAITETOS vorkommenden Summen $a+\sqrt{b}$ und $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, bei denen die Wurzeln keine ganzen Zahlen ergeben, nannte EUKLID in Buch X seiner *Elemente* ἐκ δύο ὀνομάτων (ek dýo onomáton) = *aus zwei Namen*, wofür GERHARD VON CREMONA in seiner AL-NAYRIZI-Übersetzung kurz *binomium* sagte. In der weiteren Entwicklung (siehe *Algebra 7*, Seite 187) wurde die Bedeutung von Binom verallgemeinert zu »Summe aus zwei Summanden«.

2.5 Wurzelgleichungen

2.5.1 Einfache Wurzelgleichungen

Eine Gleichung, bei welcher die Unbekannte unter einer Wurzel auftritt, bezeichnet man als Wurzelgleichung.

Beispiele:

1) $\sqrt{x} = 3$ **2)** $\sqrt{2x-5} = 7$

3) $\sqrt{4x+5} = x+2$ **4)** $\sqrt{x^2+2} = 3x$

5) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3}$ **6)** $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

Um eine solche Gleichung lösen zu können muss man zunächst alle Wurzeln, welche die Unbekannte enthalten, beseitigen. Dies geschieht durch Quadrieren der Gleichung. Dabei gilt: Jede Lösung der Ausgangsgleichung erfüllt auch die durch Quadrieren entstehende Hilfsgleichung.
Denn wenn eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ eine Lösung x_1 hat, d.h., wenn $T_1(x_1) = T_2(x_1)$ gilt, so folgt daraus auch $(T_1(x_1))^2 = (T_2(x_1))^2$; also ist x_1 auch eine Lösung der Gleichung $(T_1(x))^2 = (T_2(x))^2$.
Gehört aber umgekehrt auch jede Lösung der durch Quadrieren gewonnenen Hilfsgleichung zur Lösungsmenge der Ausgangsgleichung? Wenn ja, wäre das Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Um dies zu untersuchen betrachten wir die obigen Beispiele.

1) $\sqrt{x} = 3$. Durch Quadrieren erhält man $x = 9$.

Probe: LS $= \sqrt{9} = 3 =$ RS; also $L = \{9\}$.

2) $\sqrt{2x-5} = 7 \Rightarrow 2x-5 = 49$

$$x = 27$$

Probe: LS $= \sqrt{2\cdot 27 - 5} = \sqrt{49} = 7 =$ RS; also $L = \{27\}$.

3) $\sqrt{4x+5} = x+2 \Rightarrow 4x+5 = x^2+4x+4$

$$x^2 = 1$$

Lösungen der Hilfsgleichung: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

Probe mit x_1: LS $= \sqrt{4\cdot 1+5} = \sqrt{9} = 3$; RS $= 1+2 = 3 =$ LS.

Probe mit x_2: LS $= \sqrt{4\cdot(-1)+5} = \sqrt{1} = 1$; RS $= -1+2 = 1 =$ LS.

Ergebnis: $L = \{1; -1\}$.

4) $\sqrt{x^2+2} = 3x \Rightarrow x^2+2 = 9x^2$

$$8x^2 = 2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}$$

Lösungen der Hilfsgleichung: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Probe mit x_1: LS $= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; RS $= 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} =$ LS.

Probe mit x_2: LS $= \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; RS $= 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \neq$ LS.

Ergebnis: $L = \{\frac{1}{2}\}$.

5) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3} \Rightarrow x - 1 = 2x + 3$

$$x = -4$$

Probe: LS $= \sqrt{-4-1}$, sinnlos! RS $= \sqrt{2 \cdot (-4) + 3}$, sinnlos!

Ergebnis: $L = \{\,\}$.

6) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

Die Rechnung gestaltet sich einfacher, wenn man vor dem Quadrieren die Gleichung so umformt, dass eine der beiden Seiten nur aus einer Wurzel besteht. Man spricht vom **Isolieren der Wurzel**.

$\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

$\sqrt{2x+8} = 1 + \sqrt{5+x} \Rightarrow 2x + 8 = 1 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$

Da immer noch eine Wurzel vorhanden ist, muss man noch einmal quadrieren; zuvor aber wird die Wurzel isoliert.

$2x + 8 = 1 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$

$\sqrt{5+x} = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow 5 + x = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

$$\frac{1}{4}x^2 = 4$$

$$x^2 = 16.$$

Die wurzelfreie Hilfsgleichung hat die Lösungen $x_1 = 4$; $x_2 = -4$.

Probe mit x_1: LS $= \sqrt{2 \cdot 4 + 8} - \sqrt{5+4} = \sqrt{16} - \sqrt{9} = 1 =$ RS.

Probe mit x_2: LS $= \sqrt{2 \cdot (-4) + 8} - \sqrt{5-4} = \sqrt{0} - \sqrt{1} = -1 \neq$ RS.

Ergebnis: $L = \{4\}$.

Bei den ersten drei Beispielen haben die Ausgangsgleichung und die aus ihr durch Quadrieren gewonnene Hilfsgleichung jeweils dieselbe Lösungsmenge, nicht jedoch in den übrigen Beispielen; dort besitzt die Hilfsgleichung noch zusätzliche Lösungen! In Beispiel **4** liegt das daran, dass die beiden Gleichungen $\sqrt{x^2+2} = 3x$ und $\sqrt{x^2+2} = -3x$ auf dieselbe Hilfsgleichung $x^2 + 2 = 9x^2$ führen. In deren Lösungsmenge sind also die Lösungen von zwei verschiedenen Ausgangsgleichungen enthalten. Entsprechendes gilt auch im Beispiel **6** (vgl. Aufgabe 67/7). Dagegen hat die Verschiedenheit der beiden

Lösungsmengen bei Beispiel **5** eine andere Ursache: Die beim Quadrieren entstehende Gleichung hat ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsmenge und besitzt dort die Lösung $x = -4$. Die Wurzelgleichung ist jedoch nur auf $D = [1; +\infty[$ definiert und kann daher nicht -4 als Lösung haben. Dass $-4 \notin D$ gilt, zeigt sich bei der Probe am Auftreten sinnloser Terme.
Beachte also: Das Quadrieren einer Gleichung ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung. Zwar erfüllt jede Lösung der Ausgangsgleichung auch die Hilfsgleichung, es kommt aber vor, dass die Hilfsgleichung noch zusätzliche Lösungen besitzt. Das Quadrieren kann also eine »**Gewinnumformung**« sein. Mit anderen Worten: Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist eine echte oder unechte Teilmenge der Lösungsmenge der durch Quadrieren entstandenen neuen Gleichung. Nachdem man deren Lösungen bestimmt hat, muss man prüfen, ob sie auch der Ausgangsgleichung genügen. Das geschieht im Allgemeinen durch eine Probe.

Es gibt allerdings einen einfachen Typ von Wurzelgleichungen, bei welchem das Quadrieren die Lösungsmenge nicht ändert. Das sind Gleichungen der Form $\sqrt{T(x)} = c$ mit $c \geqq 0$ (vgl. Beispiel **1)** und **2)**). Durch Quadrieren entsteht nämlich die Gleichung $T(x) = c^2$ mit $c^2 \geqq 0$. Wenn x_1 eine Lösung dieser Gleichung ist, gilt $T(x_1) = c^2$, also $T(x_1) \geqq 0$. Man kann daher auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhält $\sqrt{T(x_1)} = |c|$, also, wegen $c \geqq 0$, $\sqrt{T(x_1)} = c$, sodass x_1 auch die Ausgangsgleichung löst. Bei solchen Wurzelgleichungen kann man daher auf die Probe verzichten.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{2x} = 2$ **b)** $\sqrt{1+x} = 0$ **c)** $\sqrt{2x+3} - 1 = 0$

d) $\sqrt{3x+7} + 10 = 0$ **e)** $\sqrt{8-3x} = \sqrt{14}$ **f)** $\sqrt{7x+3} + 2\sqrt{7} = 5$

2. a) $\sqrt{2x+1} = x+1$ **b)** $3x+2 = \sqrt{12x+5}$

c) $\sqrt{3-4x} = 2x-1$ **d)** $1 + \sqrt{5x-1} = x + 3{,}5$

e) $7x = \sqrt{28x+13} - 2$ **f)** $4x + \sqrt{25-16x} - 2 = 0$

3. a) $\sqrt{4+3x} = 3x+2$ **b)** $x - 1 = \sqrt{1-3x}$

c) $\sqrt{15x+25} = 2x+5$ **d)** $2x = \sqrt{9-2x} + 3$

e) $4x = \sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$ **f)** $\sqrt{8x+3} - 6x - \sqrt{3} = 0$

4. a) $\sqrt{4x^2-7} = 3$ **b)** $\sqrt{25-x^2} = 6$

c) $\sqrt{17-2x^2} = 3$ **d)** $\sqrt{5x^2-1} = x$

e) $\sqrt{6x^2+50} + 2\sqrt{2x} = 0$ **f)** $\sqrt{5+3x^2} = x\sqrt{3}$

5. a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x+3}$ **b)** $\sqrt{x-8} = \sqrt{4-2x}$

c) $\sqrt{3x+10} = \sqrt{x+6}$ **d)** $\sqrt{x^2+7} = \sqrt{2x^2-2}$

e) $\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{5x^2+11}$ **f)** $\sqrt{6x^2+5} = \sqrt{5-3x}$

6. a) $\sqrt{\dfrac{x}{2x+5}} = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x+2}}$ b) $\sqrt{\dfrac{13-x}{3x+1}} = \sqrt{\dfrac{x-5}{1-x}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}} = \sqrt{\dfrac{x+1}{3x+2}}$ d) $\sqrt{\dfrac{5x-14}{7-6x}} = \sqrt{\dfrac{4x+6}{8x-3}}$

•**7.** Bestimme die Lösungsmengen der folgenden drei Gleichungen und vergleiche die Lösungswege:

$\sqrt{x^2+3x} = 1+\sqrt{x^2+x}$, $\sqrt{x^2+3x} = 1-\sqrt{x^2+x}$ und

$\sqrt{x^2+3x} = -1+\sqrt{x^2+x}$

•**8.** a) $\sqrt{x+1} = 1+\sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{x-3}-3 = \sqrt{x-12}$

c) $\sqrt{x+1} = 3+\sqrt{x-5}$ d) $\sqrt{x^2+1}+2 = \sqrt{x^2+17}$

e) $\sqrt{x^2+15} = 5-\sqrt{x^2+10}$ f) $\sqrt{12-x^2}-3 = \sqrt{3-x^2}$

•**9.** a) $\sqrt{x^2+x} = 1+\sqrt{x^2-x}$ b) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x} = 5$ d) $\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2-x} = 5$

•**10.** a) $\sqrt{x^2+4x+5} = 5-\sqrt{x^2-6x}$ b) $\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{x^2-2x} = 3$

••**11.** Am 2. Juni 1461 schreibt der Benediktiner Frater FRIDERICUS, eigentlich Friedrich AMANN, († 1465) im Kloster St. Emmeram zu Regensburg die erste Algebra in deutscher Sprache nieder, die sog. *deutsche Algebra* aus dem *Codex latinus monacensis 14908*, und rechnet dabei die folgende von AL-CHARIZMI stammende Aufgabe vor (sie steht in Abbildung 68.1, 4. Zeile von unten links bis 1. Zeile oben rechts):
Gib mir ain censum vnd zuech dar von sin wurcz vnd von dem daz vber belyb an dem censu zuech och vß dye wurcz dye czwo wurcz tue zesamen daz 2 zal dar auß werden.*

* *census* ist die wortgetreue lateinische Übersetzung des arabischen مال *māl*, das *Vermögen* bedeutet. Meist wird unter *census* das Quadrat der Unbekannten verstanden. In dieser Aufgabe zeigt sich aber, dass AL-CHARIZMI mit *māl* nicht immer das Quadrat, sondern gelegentlich die Unbekannte selbst bezeichnet. (Vgl. auch die Fußnote zu Aufgabe 94/**11i**). Andernfalls würde die Aufgabe unnötig schwer.
»Dass ›2 zal‹ daraus werden«, heißt bei AL-CHARIZMI, »dass ›2 Dirhem‹ daraus werden«. AL-CHARIZMI hat von den Indern die Gewohnheit übernommen, reine Zahlen durch das Wort *Dirhem* zu kennzeichnen – so hießen die von den Kalifen geprägten Silbermünzen (3,98 g). ARYABHATA (476–? n. Chr.) nämlich hatte bekannten Größen das Wort *rupaka* (= mit Zeichen versehene Münze) beigefügt, das bald durch *ru* abgekürzt wurde. Im europäischen Mittelalter wurde AL-CHARIZMIS *Dirhem* durch *drachme* oder auch durch *dragma* wiedergegeben, was in deutschen Handschriften mit ℋ, einem *d* mit Schnörkel, ∅ oder auch ƒ abgekürzt wurde. Schließlich wurden *dragma* und *numerus* synonym gebraucht. Letzteres übersetzt der Verfasser der *deutschen Algebra* mit *zal*. Michael STIFEL (1487?–1567) war der erste, der im Druck solche Zeichen wegließ und nur mehr die Zahl alleine schrieb. – Das Wort *dirhem* ist eine Arabisierung des griechischen Worts δραχμή (drachmē), dem Namen einer alten Gewichts- und Rechnungseinheit. Man vermutet, dass dieses Wort vom Verbum δράσσεσθαι (drássesthai) = *fassen, umfassen* abgeleitet wurde, weil man tatsächlich mit einer Hand sechs ὀβελίσκοι (obelískoi) = *Spießchen* umfassen konnte, deren Gewicht eine Drachme ausmachte. Später nannte man ein solches Spießchen ὀβολός (obolós); es wog in Attika 0,728 g.
Bei GERHARD VON CREMONA (1114–1187) lautet die Aufgabe so: »Est census de quo radicem suam proieci et addidi radici radicem eius quod remansit, et quod provenit fuit due dragme. Ergo hec radix census et radix eius quod remansit fuit equale duabus dragmis.«

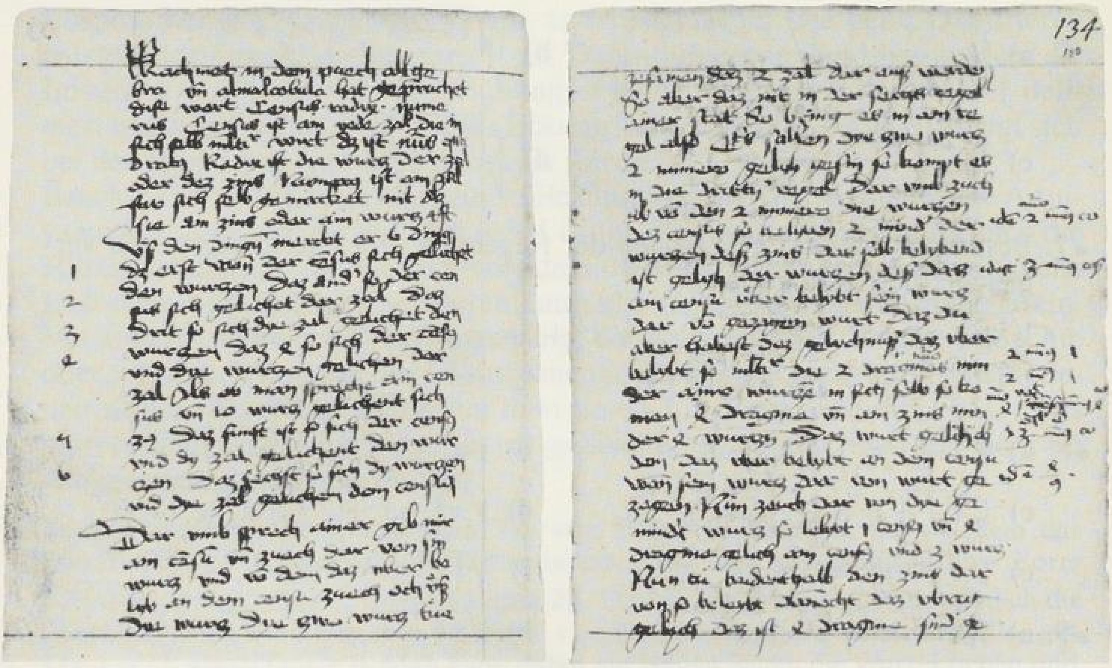


Abb. 68.1 Folium 133v und 134r der 3-seitigen *deutschen Algebra*, geschrieben am Tag des hl. Erasmus (= 2. Juni) des Jahres 1461, in der Bruchstücke und eine einzige Aufgabe aus AL-CHARIZMIS *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* auf Deutsch wiedergegeben sind. Der Text beginnt so: Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula hat gepruchet dise wort Census · radix · numerus.*
Sammelhandschrift *Codex latinus monacensis 14908*, Größe des Schriftblocks 9,7 cm × 5,8 cm.

**2.5.2 Wurzelgleichungen mit Parametern

Das Lösen von Wurzelgleichungen, in denen außer der Unbekannten auch noch Parameter vorkommen, erfordert im Allgemeinen Fallunterscheidungen. Bei der Untersuchung, ob eine Lösung der durch Quadrieren erhaltenen Hilfsgleichung auch die Ausgangsgleichung erfüllt, ist vor allem auch zu beachten, dass die auftretenden Radikanden nicht negativ sein dürfen.

Beispiel 1:

$$\sqrt{x+a^2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x + a^2 = 2x + 1$$
$$x = a^2 - 1$$

Probe: $\text{LS} = \sqrt{a^2 - 1 + a^2} = \sqrt{2a^2 - 1}$

$\text{RS} = \sqrt{2(a^2-1)+1} = \sqrt{2a^2 - 1}$

* Der gesamte von Frater FRIDERICUS AMANN geschriebene Text ist im Lösungsheft abgedruckt. Vergleiche auch die Übersetzung GERHARD VON CREMONAS in unserer *Algebra 7*, Seite 10, und im zugehörigen Lösungsheft, Seite 4f.

LS und RS sind jedoch nur definiert, wenn $2a^2 - 1 \geqq 0$ gilt, also für $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ergebnis: $x = a^2 - 1$, falls $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$; sonst $L = \{\ \}$.

Beispiel 2:

$$\sqrt{x + 8a} = \sqrt{x} + 2a \Rightarrow x + 8a = x + 4a\sqrt{x} + 4a^2$$
$$a\sqrt{x} = 2a - a^2$$

Die Auflösung der letzten Gleichung nach $\sqrt{x}$ ist nur für $a \neq 0$ möglich. Also Fallunterscheidung:

$\boxed{a = 0}$ $0 \cdot \sqrt{x} = 0$; also $L = \mathbb{R}_0^+$, was auch für die Ausgangsgleichung gilt.

$\boxed{a \neq 0}$ $\sqrt{x} = 2 - a \Rightarrow x = (2 - a)^2$

Probe: $\text{LS} = \sqrt{(2-a)^2 + 8a} = \sqrt{4 + 4a + a^2} = \sqrt{(2+a)^2} = |2 + a| =$

$$= \begin{cases} 2 + a & \text{für } a \geqq -2 \\ -(2 + a) & \text{für } a < -2 \end{cases}$$

$$\text{RS} = \sqrt{(2-a)^2} + 2a = |2 - a| + 2a = \begin{cases} 2 + a & \text{für } a \leqq 2 \\ -2 + 3a & \text{für } a > 2 \end{cases}$$

Für $a \neq 0$ lautet somit das Ergebnis:

$L = \{(2-a)^2\}$ für $0 < |a| \leqq 2$; $\quad L = \{\ \}$ für $|a| > 2$.

Am Lösungsbaum lassen sich die verschiedenen Fälle übersichtlich darstellen (Abbildung 69.1):

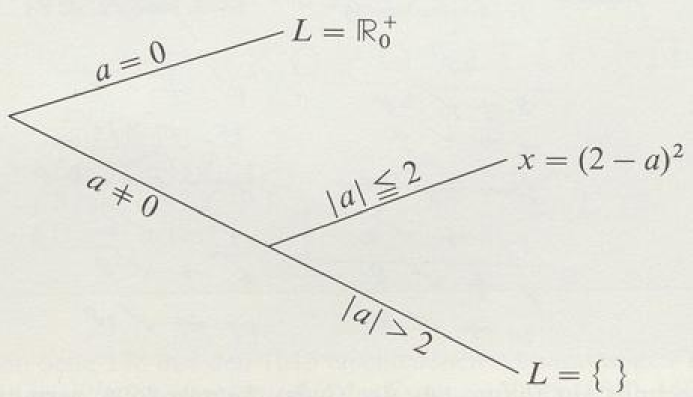


Abb. 69.1 Lösungsbaum zu Beispiel 2

Aufgaben

1. Löse die folgenden Parametergleichungen:

a) $\sqrt{x+a^2} = a+1$ **b)** $\sqrt{x+a} = a-1$

c) $\sqrt{x+a} = \sqrt{5a-x}$ **d)** $\sqrt{x+a} = \sqrt{a^2-x}$

e) $\sqrt{x^2+a} = \sqrt{a-x}$ **f)** $\sqrt{x^2-a^2} = x+a$

2. a) Zeige, dass die Gleichung $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a} = 2a$ genau dann lösbar ist, wenn die Bedingung $a=0 \vee a \geqq 0{,}5$ erfüllt ist. Wie lautet jeweils die Lösung?

b) Für welche Werte von a ist die Gleichung $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a} = 2a$ lösbar und wie lautet die Lösung?

Zu den Aufgaben 3 bis 5:

Löse die Gleichung und zeichne einen Lösungsbaum.

3. a) $\sqrt{x^2+\frac{1}{a^2}} = \sqrt{x^2-1}+\frac{1}{a}$ **b)** $\sqrt{x+\frac{1}{a}}-\sqrt{x-\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$

• **4. a)** $\sqrt{ax^3+3} = \sqrt{3+a^3x}$ **b)** $\sqrt{x^2+a}-\sqrt{ax^2-2} = 0$

⁝ **5. a)** $\sqrt{x+2a^2} = a+\sqrt{x+a^2}$ **b)** $\sqrt{ax^2+x} = \sqrt{ax^2-x}+1$

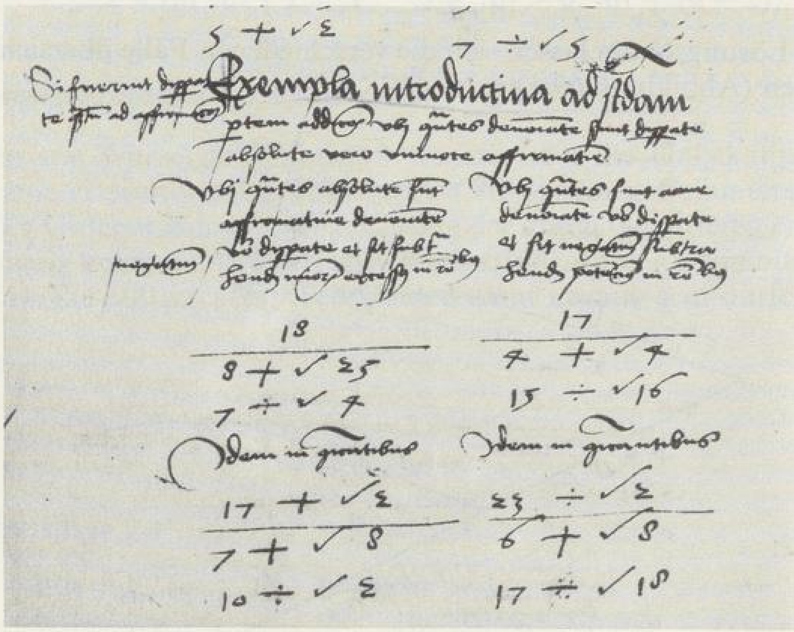
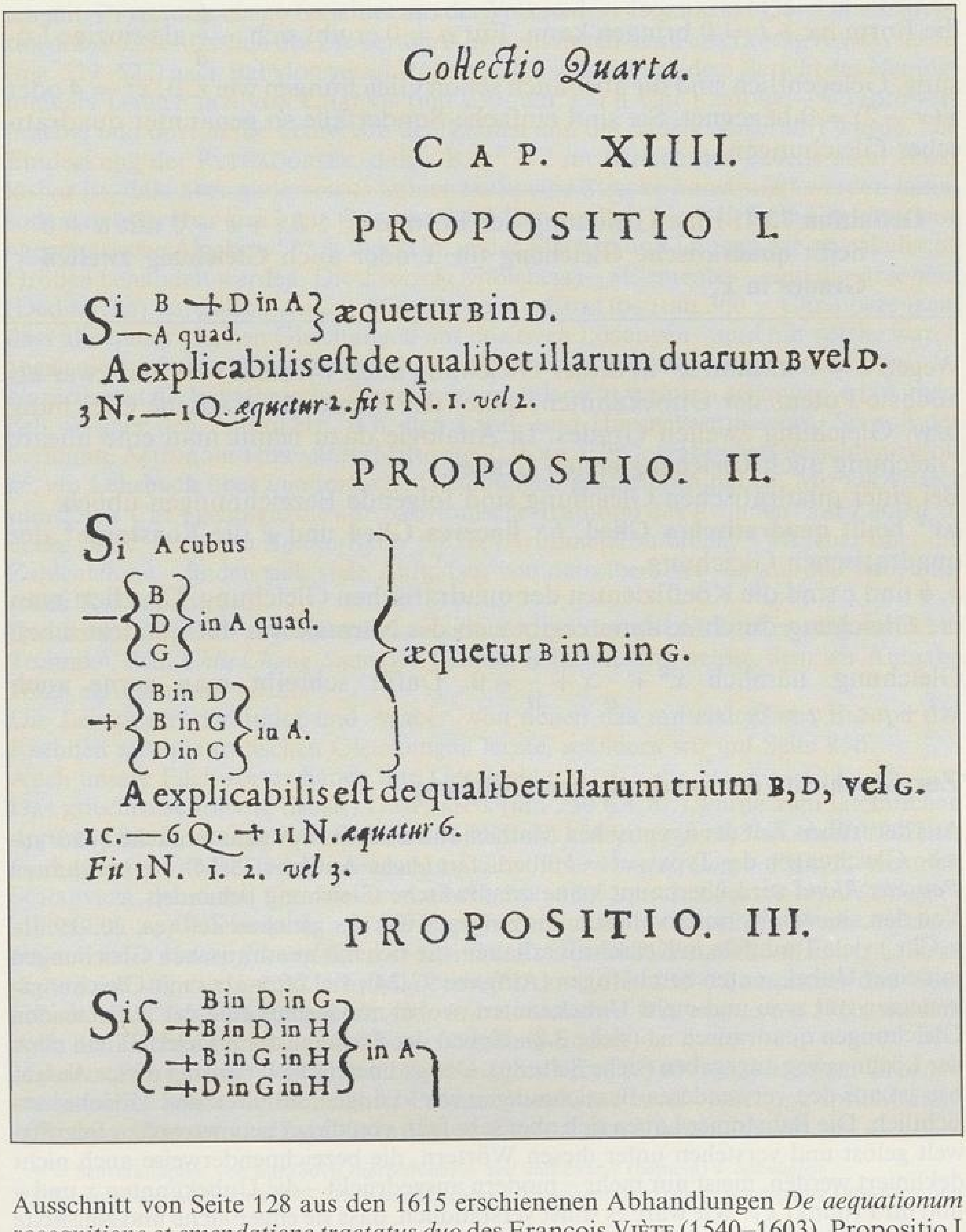


Abb. 70.1 Ausschnitt aus folium 64v des *Codex Leipzig 1696*, vermutlich aus dem Ende des 15. Jh.s

3 Die quadratische Gleichung



Collectio Quarta.

CAP. XIIII.

PROPOSITIO I.

Si B + D in A — A quad. } æquetur B in D.
A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.
3 N. — 1 Q. *æquetur* 2. *fit* 1 N. 1. *vel* 2.

PROPOSTIO. II.

Si A cubus
— { B, D, G } in A quad.
+ { B in D, B in G, D in G } in A.
} æquetur B in D in G.
A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G.
1 C. — 6 Q. + 11 N. *æquatur* 6.
Fit 1 N. 1. 2. *vel* 3.

PROPOSITIO. III.

Si { B in D in G
+ B in D in H
+ B in G in H
+ D in G in H } in A

Ausschnitt von Seite 128 aus den 1615 erschienenen Abhandlungen *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo* des François VIÈTE (1540–1603). Propositio I ist der berühmte SATZ VON VIETA für eine Gleichung zweiten Grades.

3 Die quadratische Gleichung

3.1 Was ist eine quadratische Gleichung?

Du hast bisher meist nur mit linearen Gleichungen zu tun gehabt, die man auf die Form $ax + b = 0$ bringen kann. Für $a \neq 0$ ergibt sich $-\frac{b}{a}$ als einzige Lösung. Gelegentlich sind dir aber auch schon Gleichungen wie z. B. $x^2 = 4$ oder $x(x-2) = 0$ begegnet. Sie sind einfache Sonderfälle so genannter quadratischer Gleichungen.

> **Definition 72.1:** Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **quadratische Gleichung für x** oder auch **Gleichung zweiten Grades in x**.

Wegen $a \neq 0$ kommt x^2 in dieser Gleichung auch wirklich vor, und zwar als höchste Potenz der Unbekannten; daher der Name quadratische Gleichung bzw. Gleichung zweiten Grades. In Analogie dazu nennt man eine lineare Gleichung auch **Gleichung ersten Grades**.
Bei einer quadratischen Gleichung sind folgende Bezeichnungen üblich:
ax^2 heißt **quadratisches Glied**, bx **lineares Glied** und c die **Konstante*** der quadratischen Gleichung.
a, b und c sind die Koeffizienten der quadratischen Gleichung. Dividiert man die Gleichung durch a, dann ergibt sich die **Normalform** der quadratischen Gleichung, nämlich $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Dafür schreibt man gerne auch $x^2 + px + q = 0$.

**Zur Geschichte der quadratischen Gleichung

Aus der frühen Zeit der ägyptischen Mathematik sind uns nur ganz einfache quadratische Gleichungen des Typs $ax^2 = b$ überliefert (siehe Aufgabe 78/**14**). Im berühmten *Papyrus Rhind* wird überhaupt keine quadratische Gleichung behandelt.
Von den alten Babyloniern blieben uns hingegen aus der gleichen Zeit (ca. 20.–19. Jh. v. Chr.) viele Tontafeln in Keilschrift erhalten, die sich mit quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten beschäftigen (Aufgabe 97/**24**), viel öfter aber mit Gleichungssystemen mit zwei und mehr Unbekannten, wobei mindestens eine der auftretenden Gleichungen quadratisch ist (siehe **3.8**). Neben der Lösung ist auf vielen Tafeln auch der Lösungsweg angegeben (siehe Seite 86). Der geometrische Ursprung dieser Aufgaben ist aus den verwendeten Bezeichnungen wie »Länge«, »Breite« und »Fläche« ersichtlich. Die Babylonier haben sich aber sehr früh von dieser geometrischen Begriffswelt gelöst und verstehen unter diesen Wörtern, die bezeichnenderweise auch nicht dekliniert werden, meist nur mehr – modern ausgedrückt – die Unbekannten x und y und ihr Produkt xy. Wie wäre es sonst verständlich, dass sie eine Fläche und eine Seite

* Das Wort Konstante hat 1692 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) in die Mathematik eingeführt.

addierten und eine Zahl erhielten! Sie haben bereits in früher Zeit eine Mathematik geschaffen, die nur mit Zahlen umgeht, anders als im alten Indien oder Ägypten, wo Mathematik im Gewande der Geometrie getrieben wurde. So sollen die ägyptischen Harpedonapten* durch Spannen von Seilen geometrische Konstruktionen und auch Beweise ausgeführt haben**.

Dieses geometrische Wissen brachten sowohl THALES (um 625–um 547 v. Chr.) wie auch PYTHAGORAS (um 570–um 497 v. Chr.) von ihren ägyptischen Studienaufenthalten mit. PYTHAGORAS – so berichtet uns der Volksredner ISOKRATES (436–338 v. Chr.) – soll dabei 525 anlässlich der Eroberung Ägyptens durch den Perserkönig KAMBYSES II. (reg. 529–522) nach Babylon verschleppt worden sein, wo er – dem Bericht des Neuplatonikers IAMBLICHOS VON CHALKIS (um 250–um 330 n. Chr.) zufolge – 7 Jahre verbrachte und dort in die Lehre von den Zahlen und der Musik eingeführt wurde. Die Entdeckung der PYTHAGOREER, daß z. B. $x^2 = 2$ im Bereich der Brüche nicht exakt lösbar ist, dass aber andererseits immer exakt eine Strecke konstruiert werden kann, sodass das darüber errichtete Quadrat den Flächeninhalt 2 hat, ließ die Griechen eine »geometrische Algebra«*** entwickeln, in der Flächen und Längen wie physikalische Größen behandelt werden. Die *Στοιχεῖα* (Stoicheîa) – »Elemente« – und die *Δεδομένα* (Dedoména), lateinisch *Data* – »Gegebenes« – EUKLIDS (um 300 v. Chr.) bezeugen, dass alle quadratischen Gleichungen mit positiven Lösungen – und nur solche waren zugelassen – durch geometrische Konstruktionen exakt gelöst werden konnten.

Natürlich ist die babylonische Zahlenmathematik nicht verloren gegangen. Man überließ sie aber den Praktikern, d. h. den Land- und Himmelsvermessern. So soll der berühmte Astronom HIPPARCH (Mitte des 2. Jh.s v. Chr.), arabischen Berichten zufolge, ein Lehrbuch über quadratische Gleichungen geschrieben haben. Mit DIOPHANT (um 250 n. Chr.) gelangte die alte babylonische Tradition des Rechnens mit Zahlen zu neuer Blüte. In seinen *Ἀριθμητικῶν βιβλία* (Arithmetikōn biblía) – »Bücher über die Zahlenlehre« – finden sich viele Aufgaben von derselben Art wie auf den babylonischen Keilschrifttafeln.

Quadratische Gleichungen werden auch im letzten der »Neun Bücher arithmetischer Technik«, dem *Chiu Chang Suan Shu* (China, 2. Jh. v. Chr.), gelöst, dem wir Aufgabe 98/**25** entnommen haben.

Die Leistungen der Inder und Araber, von denen das mittelalterliche Europa das Rechnen mit quadratischen Gleichungen lernte, schildern wir auf Seite 86ff.

Auch unsere Fachwörter haben ihre Geschichte.

Das griechische ἴσωσις (isosis) DIOPHANTS (um 250 n. Chr.) wurde zum lateinischen *aequatio*, das LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) in seinem *liber abaci* (1202) als Fachwort verwendet. Die Eindeutschung führt über *Vorgleichung* – 1518/21 Heinrich SCHREYBER, genannt GRAMMATEUS (1492/96?–1525) in seinem *Rechenbüchlein* – schließlich zu **Gleichung**, belegt 1695 bei Henrich HORCH in seinem Werk *Anfangs-Gründe einer Vernunfft- und Schrifft-übenden Zahl- und Buchstab-Rechenkunst / Deren diese sonst Algebra heisset*. Christian VON WOLFF (1679–1754) übernimmt das Wort Gleichung in *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710, wo sich auch der Fachausdruck **quadratische Gleichung** findet.

Mit dem Wort *gradus* bezeichnet 1591 François VIÈTE (1540–1603) in seiner *In artem analyticem Isagoge* die Höhe einer Potenz. Vom **Grad** einer Gleichung spricht dann 1675 Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Élémens des Mathematiques*.

* = Seilverknüpfer, von ἁρπεδόνη (harpedóne) = *Seil* und ἅπτειν (háptein) = *anknüpfen*

** CLEMENS von Alexandria (150–215) schreibt in seinen *Stromateis* (I, 15) diese Behauptung DEMOKRIT (um 460–um 370 v. Chr.) zu.

*** Den Ausdruck führte 1886 der dänische Mathematiker Hieronymus Georg ZEUTHEN (1839–1920) ein. 1925 entdeckte man in Bologna ein zwischen 1574 und 1587 geschriebenes Manuskript des Paolo BONASONI († nach 1593) mit dem Titel *Algebra geometrica*.

Aufgaben

1. Entscheide, ob eine quadratische Gleichung vorliegt. Bringe sie gegebenenfalls auf eine Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit positivem a und gib das lineare Glied und die Konstante an.

a) $3 - x^2 = x$ **b)** $3x^2 - 1 = x^2$
c) $x(x - x^2) = 0$ **d)** $(x-1)(1-x) = 3$
e) $(0{,}5x + 4)^2 = 0$ **f)** $x^2 - 1 = (x-1)^2$

2. Entscheide, für welche Unbekannte eine quadratische Gleichung vorliegt. Gib jeweils das lineare Glied und die Konstante an.

a) $x^2 y = -1$ **b)** $xy^2 = 3x + y^2$
c) $xy + y^2 = 3x^2$ **d)** $x^2 - xy^2 + y^3 = 1$
e) $a^3 b^2 - abx^2 + 2 = 0$ **f)** $(a+b)(a-b) = (a-b)^2$

3. Stelle die Normalform her.

a) $3x^2 - 6x + 15 = 0$ **b)** $1 - x^2 = 3x$
c) $-1{,}5x^2 + 4{,}5x = 2{,}7x^2 - 8{,}1$ **d)** $(1-5x)^2 = 5x - 1$
e) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x)^2 = (\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x)^2$ •**f)** $\sqrt{2}x = \sqrt{6}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{3}$

3.2 Spezialfälle von quadratischen Gleichungen

Einfache Spezialfälle der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ liegen vor, wenn ein Koeffizient der quadratischen Gleichung null ist. a selbst kann aber nicht null sein; denn sonst hätte man keine quadratische Gleichung.

3.2.1 Die rein quadratische Gleichung

Wenn $b = 0$ ist, fehlt das lineare Glied bx in der quadratischen Gleichung. Sie hat dann die Gestalt $ax^2 + c = 0$. Eine Gleichung dieser Bauart heißt **rein quadratisch**. Wegen $a \neq 0$ gewinnt man ihre Normalform zu $x^2 + \frac{c}{a} = 0$ bzw. $x^2 + q = 0$.

Für $q > 0$ ist die linke Seite sicher positiv; die Gleichung hat daher keine Lösung. Für $q = 0$ ergibt sich die Gleichung $x^2 = 0$. Sie hat die Lösung 0. Für $q < 0$ kann man mit Hilfe der 3. binomischen Formel die linke Seite faktorisieren. Wir zeigen es dir für $q = -49$:

$x^2 - 49 = 0$
$x^2 - 7^2 = 0$
$(x+7)(x-7) = 0$

Wie wir wissen, kann ein Produkt nur null sein, wenn mindestens ein Faktor null ist. Aus der letzten Zeile entsteht die Oder-Aussageform

$x+7=0 \vee x-7=0$ bzw.
$x=-7 \vee x=7.$

Wir erhalten also zwei Lösungen, nämlich $x_1=-7$ und $x_2=7$.
Selbstverständlich kann man die Methode des Faktorisierens auch anwenden, wenn $-q$ keine Quadratzahl ist. Nehmen wir als Beispiel $q=-5$:

$x^2-5=0$
$x^2-(\sqrt{5})^2=0$
$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
$x=-\sqrt{5} \vee x=\sqrt{5}.$ Also $x_1=-\sqrt{5}$ und $x_2=\sqrt{5}$.

Merke: Die rein quadratische Gleichung $x^2+q=0$ hat entweder keine, genau eine oder zwei Lösungen, je nachdem ob $q>0$, $q=0$ oder $q<0$ ist.

Die Lösungen der rein quadratischen Gleichung kann man aber statt durch Faktorisieren auch durch Radizieren finden. Es gilt nämlich

Satz 75.1: Sind die beiden Seiten einer Gleichung nicht negativ und radiziert man beide Seiten, so entsteht eine äquivalente Gleichung; kurz:

Für $T_1 \geqq 0$ und $T_2 \geqq 0$ gilt: $T_1=T_2 \Leftrightarrow \sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$

Beweis:

1) Ist u eine Lösung der Gleichung $T_1=T_2$ mit $T_1(u) \geqq 0$, dann gilt $T_1(u) = T_2(u)$, also auch wegen der Eindeutigkeit der Wurzel $\sqrt{T_1(u)}=\sqrt{T_2(u)}$. Damit ist u auch eine Lösung der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$. Es gehen also beim Radizieren keine Lösungen verloren.

2) Ist nun umgekehrt v eine Lösung der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$, dann gilt $\sqrt{T_1(v)}=\sqrt{T_2(v)}$, woraus sich wegen der Eindeutigkeit des Quadrats $T_1(v)=T_2(v)$ ergibt. Das bedeutet aber, dass v auch eine Lösung der Gleichung $T_1=T_2$ ist. Es kann also beim Radizieren auch keine Lösung hinzugekommen sein.
Da somit beim Radizieren weder Lösungen hinzugekommen noch verloren gegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1=T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$ überein. Radizieren ist also eine Äquivalenzumformung.

Wir wenden Satz 75.1 auf unsere beiden obigen Beispiele an:

$x^2 - 49 = 0$	$x^2 - 5 = 0$
$x^2 = 49 \quad \Vert\sqrt{}$	$x^2 = 5 \quad \Vert\sqrt{}$
$\lvert x\rvert = 7$	$\lvert x\rvert = \sqrt{5}$
$x = -7 \vee x = 7.$	$x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}.$

Du siehst, beim Radizieren von Quadraten entstehen Absolutbeträge, die sich durch Fallunterscheidungen wieder beseitigen lassen. Betrachten wir dazu allgemein die Gleichung

$x^2 = d^2 \quad \Vert\sqrt{}$

$|x| = |d|.$

Weil zwei Zahlen mit gleichem Absolutbetrag entweder gleich oder entgegengesetzt gleich sind, bedeutet die letzte Gleichung dasselbe wie

$x = d \vee x = -d.$

Merke: $\boxed{|x| = |d| \iff x = d \vee x = -d}$

Aufgaben

1. a) $x^2 = 169$ **b)** $x^2 - 1024 = 0$ **c)** $x^2 = 6{,}25$
d) $x^2 - 0{,}0324 = 0$ **e)** $16 = 0{,}64x^2$ **f)** $2{,}56x^2 - 40{,}96 = 0$
g) $144x^2 = 1225$ **h)** $22\,500 - 2025x^2 = 0$ **i)** $10{,}89x^2 = 0{,}1936$

2. a) $2x^2 = 8$ **b)** $0{,}5x^2 = 8$ **c)** $5x^2 - 45 = 0$
d) $28 - 63x^2 = 0$ **e)** $\frac{x^2}{12} = \frac{1}{27}$ **f)** $\frac{x^2}{35} - \frac{7}{125} = 0$
g) $\frac{13}{6} = \frac{78x^2}{49}$ **h)** $\frac{22}{3} - \frac{24x^2}{11} = 0$ **i)** $\frac{0{,}125x^2}{3} = \frac{1{,}5}{4}$

Beachte bei den folgenden Aufgaben die Definitionsmengen!

3. a) $\frac{4x-1}{x+1} = \frac{x-1}{4x+1}$ **b)** $\frac{2x-5}{3x+10} = \frac{x}{2x+10}$
c) $\frac{x+10}{2x-5} + \frac{5x+4}{x+7} = 0$ **d)** $\frac{x+10}{2x+5} = \frac{5x-4}{x+7}$
• e) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{7x+3}{2x+2}$ **• f)** $\frac{2x+7}{4x-6} = \frac{2x+2}{1{,}5-x}$
g) $\frac{16x-1}{x+4} = \frac{4x+25}{2-9x}$ **h)** $\frac{3x+2}{2x-3} = \frac{11x+8}{5x-9}$

4. a) $\dfrac{2x^2-5}{3}+2=\dfrac{3x^2+5}{6}$ b) $\dfrac{7x^2+1}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4x^2-2}{3}$

c) $\dfrac{1}{3x^2-2}=\dfrac{3}{17x^2-7}$ d) $\dfrac{5}{10-2x^2}+2=0$

e) $\dfrac{x-4}{x^2-1}+\dfrac{x}{x+1}=0$ f) $\dfrac{8-20x}{9x^2-4}+\dfrac{x+6}{3x-2}=1$

5. a) $\dfrac{3}{x+2}-4=\dfrac{3}{x-2}$ b) $\dfrac{1}{5x+2}+\dfrac{4}{x-1}+7=0$

c) $\dfrac{6x-8}{3x}+2x=\dfrac{3x+4}{2}-x$ d) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}+2$

• **6.** Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $ax^2=b^2$ b) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-a^2=0$

c) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{x}$ d) $a^2x^2-a=b^2x^2-b$

e) $(3x-2a)^2-(2x-3a)^2=4a^2$ f) $\dfrac{(bx-a)^2}{a^2}+\dfrac{2bx-a}{a}=b$

• **7.** Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $x^2+a=b$ b) $ax^2=b$

c) $(x+2a)^2+(2x-a)^2=5a$ d) $(3x-2a)^2+64=(x-6a)^2$

e) $a(x-b)^2+ax(x+2b)=\dfrac{1}{a}$

f) $(ax+b)^2+(bx+a)^2=2a^2+2abx(x+2)$

8. a) $(x-7)^2=9$ b) $(x+2\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$ c) $(x+2)^2=2$

d) $(0{,}5x-1{,}5)^2=2{,}25$ e) $(x-3)^2=-3$ f) $(3-x)^2=3$

g) $(x-a)^2=b^2$ h) $(x+a)^2=(2x+a)^2$

9. a) $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x+a}=2\frac{2}{3}$ b) $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}$

10. Multipliziert man $\frac{7}{50}$ einer Zahl mit $\frac{11}{18}$ derselben Zahl, dann ergibt sich 40733. Wie heißt die Zahl?

11. Länge und Breite eines Rechtecks verhalten sich wie 7 : 5, der Flächeninhalt ist 2240. Wie breit ist das Rechteck?

12. Zerlege die Zahl 11532 in zwei Faktoren, die sich wie 3 zu 4 verhalten.

13. Zerlege die Zahl z in zwei Faktoren, die sich wie $a:b$ verhalten. $(a, b, z \neq 0)$

14. *Aufgabe 6* aus dem *Papyrus Moskau* (18. Jh. v. Chr. nach einer Vorlage des 19. Jh.s v. Chr.): Ein Rechteck hat den Flächeninhalt 12. Für die Breite nimm $\frac{1}{2}$ der Länge $+\frac{1}{4}$ der Länge. Bestimme seine Seiten.

15. AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) löste in seiner *Algebra* folgende Aufgaben:

a) *Das zweite der 6 Probleme* (siehe Seite 87): Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Multipliziere ich den ersten Teil mit sich selbst und das Erhaltene mit $2\frac{7}{9}$, dann ergibt sich dasselbe, wie wenn ich 10 mit sich selbst multipliziere. Wie groß sind die Teile?

b) Multipliziere eine Zahl mit sich selbst, nimm das Vierfache, und du hast 20. Wie groß ist die Zahl?

c) *Das dritte der 6 Probleme:* Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Dann habe ich den einen durch den anderen dividiert und 4 erhalten. Wie groß sind die Teile?

Zu den Aufgaben 16 bis 19: Leonhard EULER (1707–1783) veröffentlichte 1770 in Petersburg seine *Vollständige Anleitung zur Algebra* (bereits 1768 auf russisch erschienen), der wir die folgenden Aufgaben entnommen haben.*

16. Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte, mit ihrem Drittel multipliziert, 24 gibt.

17. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, dass, wenn man zu derselben 5 addiert und ebenso von ihr auch 5 subtrahiert, jene Summe mit dieser Differenz multipliziert 96 beträgt.

•**18.** Von 3 Personen besitzt die erste so oft 7 Reichstaler wie die zweite 3 Reichstaler hat; und so oft die zweite 17 Reichstaler besitzt, hat die dritte 5 Reichstaler. Wenn man aber das Geld der ersten mit dem Gelde der zweiten und das Geld der zweiten mit dem Gelde der dritten und endlich das Geld der dritten mit dem Gelde der ersten multipliziert, hierauf diese drei Produkte addiert, so ist die Summe $3830\frac{2}{3}$. Wie viel Geld hat nun jede gehabt?

19. Einige Kaufleute bestellen einen Faktor [= Leiter einer Handelsniederlassung] und schicken ihn nach Archangel, um daselbst einen Handel abzuschließen. Jeder von ihnen hat zehnmal so viel Reichstaler eingelegt, wie es Personen sind. Nun gewinnt der Faktor an je 100 Reichstalern zweimal so viel, wie die Anzahl der Personen ist. Wenn man dann den 100. Teil des ganzen Gewinns mit $2\frac{2}{9}$ multipliziert, so kommt die Zahl der Gesellschafter heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

* 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 5, Aufgaben I, II, IV und V

3.2.2 Die Konstante ist null

Ist die Konstante null, d. h., gilt $c = 0$, dann hat die quadratische Gleichung die Gestalt $ax^2 + bx = 0$.
Man löst sie durch Faktorisieren:

$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$
$x = 0 \vee ax + b = 0$
$x = 0 \vee x = -\dfrac{b}{a} \qquad (a \neq 0).$

Wir erhalten also zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Für $b = 0$ ergibt sich 0 als einzige Lösung.
Beim Gleichungstyp $ax^2 + bx = 0$ ist also 0 immer eine Lösung.
Diese Lösung ginge verloren, wenn jemand glaubte, er könne die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ dadurch vereinfachen, dass er durch die Variable x dividiert und nur noch $ax + b = 0$ löst.

Merke: Durch einen Term darf man nur dividieren, wenn er nicht null ist.

Aufgaben

1. **a)** $x^2 - 5x = 0$ **b)** $3x^2 + 8x = 0$ **c)** $15x^2 = 18x$
d) $14x^2 + 3\frac{1}{2}x = 0$ **e)** $x^2 = x$ **f)** $x^2 = -x$

2. **a)** $0{,}12x^2 + 2x = 3{,}08x$ **b)** $\sqrt{2}x + 5x^2 = 0$
c) $3x^2 - \sqrt{3}x = x - \sqrt{3}x^2$ **d)** $\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x = -\frac{1}{2}\sqrt{5}x^2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}x$
e) $\sqrt{10}x^2 + \sqrt{5}x = 0$ **f)** $-\dfrac{\sqrt{15}}{15}x = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}x^2$

3. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):
a) $x(x + \sqrt{10}) = 9x^2$ **b)** $x(x + \sqrt{10}) = 9x$

4. *Das erste der 6 Probleme* des AL-CHARIZMI aus seiner *Algebra* (siehe Seite 87): Ich habe 10 in zwei Teile geteilt und den einen mit dem anderen multipliziert. Multipliziere ich aber den einen Teil mit sich selbst, dann erhalte ich viermal so viel wie zuvor. Wie groß sind die Teile?

5. AL-CHARIZMI behandelt weitere Beispiele quadratischer Gleichungen. In moderner Schreibweise lauten sie:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{1}{7}x$ **b)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{4}{5}x$

c) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = x$ **d)** $\dfrac{x^2 - 4x}{3} = 4x$

Bestimme die Lösungen.

6. a) $x^2 - 2ax = 0$ **b)** $x^2 + \dfrac{a-b}{2}x = 0$

c) $ax^2 = \dfrac{a+b}{2}x$ **d)** $a^2x^2 - 2bx = 4b^2x^2 - ax$

3.3 Die quadratische Ergänzung

Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$ und $ax^2 + bx = 0$ können wir schon lösen. Was aber machen wir bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung? Gelingt es, die linke Seite durch Probieren zu faktorisieren, dann ist das Problem gelöst. Dazu

Beispiel 1:

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

$x + 5 = 0 \vee x - 1 = 0$

$x = -5 \vee x = 1\,.$

Beispiel 2:

$2x^2 - 5x + 3 = 0$

$(2x-3)(x-1) = 0$

$2x - 3 = 0 \vee x - 1 = 0$

$x = \frac{3}{2} \vee x = 1\,.$

Leider wird dieses Probier-Verfahren nur in den seltensten Fällen zum Ziel führen. Wenn es gelingt, dann ist es aber auch das schnellste Verfahren. Wir brauchen jedoch eine Methode, die immer zum Ziel führt.
Dazu formen wir die Gleichung schrittweise so um, dass eine rein quadratische Gleichung entsteht, die wir schon lösen können. Wir zeigen es dir anhand einer Gleichung, die AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen« – behandelt, und verfolgen seinen Lösungsweg.

Beispiel 3: $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$x^2 + 10x - 56 = 0$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

Wir fassen den Term $x^2 + 10x$ als Anfang der linken Seite der 1. binomischen Formel $x^2 + 2ux + u^2 = (x+u)^2$ auf. Der Koeffizient von x muss dann $2u$ sein. Es gilt also $2u = 10$ und damit $u = 5$. Wir ergänzen nun das fehlende u^2, d.h. 5^2, und ziehen es gleich wieder ab, um die Konstante nicht zu verändern:

$x^2 + 10x + 5^2 - 25 - 56 = 0$.

Die ersten drei Glieder ergeben ein Quadrat:

$(x^2 + 10x + 5^2) - 81 = 0$

$(x + 5)^2 - 81 = 0$.

Das ist eine rein quadratische Gleichung für $(x + 5)$.

3. Schritt: Lösen der rein quadratischen Gleichung

durch Faktorisieren	oder	durch Radizieren
$(x + 5)^2 - 9^2 = 0$		$(x + 5)^2 = 81 \quad \| \sqrt{\ }$
$[(x + 5) + 9][(x + 5) - 9] = 0$		$\|x + 5\| = 9$
$(x + 14)(x - 4) = 0$		$x + 5 = -9 \vee x + 5 = 9$
$x = -14 \vee x = 4$.		$x = -14 \vee x = 4$.

Das vorgeführte Lösungsverfahren heißt Lösen durch **quadratische Ergänzung**.

Als »quadratische Ergänzung« bezeichnet man aber nicht nur das Lösungsverfahren, sondern auch den Term u^2, mit dem man ergänzt.

Merke: Man halbiert den Koeffizienten des linearen Glieds, quadriert und ergänzt.

Wie du schon weißt, hat die rein quadratische Gleichung zwei, eine oder gar keine Lösung. Dasselbe gilt natürlich dann auch für jede quadratische Gleichung, wenn wir sie in eine äquivalente rein quadratische Gleichung umformen können.

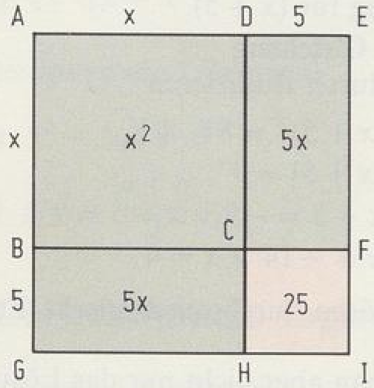
AL-CHARIZMI zeigt seinen Lesern mittels eines geometrischen Beweises (vgl. Abbildung 82.1) – er hatte ja noch keine Buchstabenrechnung –, dass die Methode der quadratischen Ergänzung richtig ist. Vielleicht helfen dir seine Gedanken auch zu einem besseren Verständnis dieses Verfahrens. Er schreibt:*

Wir gehen aus vom Quadrat ABCD, dessen Flächeninhalt gleich der gesuchten Quadratzahl x^2 ist. Unser nächstes Anliegen ist es, ihm eine Fläche vom Inhalt 10-mal der gesuchten Zahl, also $10x$, hinzuzufügen. Zu diesem Zweck halbieren wir die 10, das ergibt 5, und konstruieren an zwei Seiten des Quadrats ABCD zwei Rechtecke, nämlich CBGH und DCFE, und zwar so, dass jeweils die Längsseite 5 misst – das ist die Hälfte des Koeffizienten 10 von x –, wohingegen die Breite jeweils gleich der Quadratseite x ist. Dabei entsteht an der Ecke C ein Quadrat, nämlich FCHI. Dessen Inhalt ist 5 mit sich multipliziert: Diese 5 ist die Hälfte des Koeffizienten der Unbekannten x, die wir an jeder Seite des Ausgangsquadrats als Strecken [BG] und [DE] angefügt haben. Jetzt können wir sagen, dass das erste Quadrat mit dem Inhalt x^2 und die zwei Rechtecke an seinen Seiten, die zusammen $10x$ haben, insgesamt 56 ausmachen. Um nun zum großen Quadrat AGIE vervollständigen zu können, fehlt uns nur mehr die Qua-

* Wir haben den Text nur wenig modernisieren und dem Beispiel 3 anpassen müssen. Natürlich gibt es bei AL-CHARIZMI noch keinen Buchstaben x; auch »Koeffizient« drückt er umständlicher aus. Quadrate und Rechtecke werden nur durch die Diagonalecken – wie bei EUKLID – bezeichnet; das Quadrat ABCD heißt also nur AC usw. Seine Figur stimmt übrigens genau mit der EUKLIDS aus Buch II der *Elemente* überein; nur der mathematische Inhalt dazu wird anders formuliert. So lautet der zugehörige Satz 4 bei EUKLID: »Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist ihr Quadrat gleich der Summe der Quadrate der beiden Teilstrecken, vermehrt um ihr doppeltes Rechteck.« Teilen wir also [AE] in D, so gilt

$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DE}$.

dratzahl, die aus 5 mit sich multipliziert entsteht, also 25. Diese addieren wir zu 56 und haben damit zum großen Quadrat AGIE ergänzt. Als Summe erhalten wir 81. Wir ziehen die Wurzel, das ergibt 9, und das ist die Seite des großen Quadrats. Ziehen wir davon dasselbe ab, was wir vorher hinzugezählt haben, nämlich 5, dann erhalten wir als Rest 4. Dies ist die Seite des Quadrats ABCD, die man gesucht hat.



$$x^2 + 10x = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot \tfrac{10}{2} x = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot (5x) = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot (5x) + 5^2 = 56 + 25$$
$$(x+5)^2 = 81$$

Abb. 82.1 Die Zeichnung des AL-CHARIZMI zum Beweis der quadratischen Ergänzung

Aufgaben

1. Löse durch Faktorisieren.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $z^2 + 6z + 8 = 0$
c) $y^2 + y - 20 = 0$ **d)** $\mu^2 - 5\mu - 24 = 0$

2. Ergänze zum Quadrat.

a) $x^2 + 4x$ **b)** $x^2 - 8x$ **c)** $x^2 - 24x$
d) $x^2 - 0{,}6x$ **e)** $x^2 + 1{,}8x$ **f)** $x^2 - 0{,}5x$
g) $x^2 + 1{,}3x$ **h)** $x^2 + \frac{5}{8}x$ **i)** $x^2 - \frac{9}{4}x$

3. Ergänze zum Quadrat.

a) $x^2 + 3\frac{1}{2}x$ **b)** $x^2 - 3\frac{1}{4}x$ **c)** $x^2 + 2\frac{1}{5}x$
d) $x^2 - 3ax$ **e)** $x^2 + \dfrac{a+b}{2}x$ **f)** $x^2 - 3 \cdot \dfrac{2a-3b}{2}x$
g) $x^2 + 10\sqrt{7}x$ **h)** $x^2 - 7\sqrt{10}x$ **i)** $x^2 - \frac{4}{5}\sqrt{15}x$

4. a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ **b)** $x^2 - 2x - 3 = 0$
c) $x^2 + 11x + 28 = 0$ **d)** $x^2 + 12x + 36 = 0$
e)* $x(x + \sqrt{10}) = 20$ **f)*** $x^2 - (20 + \sqrt{10})x + 100 = 0$

5. a) $x^2 + 10x + 30 = 0$ **b)** $y^2 + 4y = 1$
c) $u^2 + 7 = 8u$ **d)** $v^2 = 3 - 2v$

* aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240)

6. a) $2x^2 - 28x + 98 = 0$ **b)** $-3z^2 + 12z + 63 = 0$
c) $-5u^2 + 120u - 730 = 0$ **d)** $8x^2 + 80x + 72 = 0$

7. a) $3x^2 + x - 2 = 0$ **b)** $\frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{3}z - 1 = 0$
c) $2u^2 - 3u + 4 = 0$ **d)** $1{,}5y^2 + 2y - 7{,}5 = 0$

8. a) $x^2 + 4kx - 5k^2 = 0$ **b)** $x^2 + 4ax + a^2 = 0$
c) $x^2 - 2nx = 6mn + 9m^2$ **d)** $rx^2 - 2r^2x = rs - r^3$

3.4 Diskriminante und Lösungsformel

Wenn ein Mathematiker immer wieder gleichartige Aufgaben lösen muss, dann wird er dessen bald müde und er beginnt zu überlegen, ob sich nicht eine Formel finden lässt, mit der er ein für alle Mal alle Aufgaben dieses Typs lösen kann. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung entwickeln wir nun eine solche Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung.

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

3. Schritt: Lösen der rein quadratischen Gleichung durch Faktorisieren
Die Faktorisierung lässt sich nur durchführen, wenn der Term $b^2 - 4ac$ nicht negativ ist. Ist er negativ, dann gibt es keine Lösung.

Ist er null, dann ist $x = -\frac{b}{2a}$ die einzige Lösung.

Ist er positiv, dann gibt es zwei Lösungen, die wir durch Faktorisieren finden, da man in diesem Fall $b^2 - 4ac$ als $(\sqrt{b^2 - 4ac})^2$ schreiben kann. Es gilt dann also

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0$$

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Für diese Oder-Aussageform schreibt man oft kurz unter Verwendung des 1631 von William OUGHTRED (1574–1660) in seinem *Clavis mathematicae* – »Schlüssel der Mathematik« – eingeführten Zeichens $\pm$, gelesen »plus oder minus«

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Damit haben wir einen formelmäßigen Ausdruck für die beiden Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung, nämlich

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

oder kurz

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Über die Existenz von Lösungen und über ihre Anzahl entscheidet, wie wir oben gesehen haben, der Term

$$b^2 - 4ac.$$

Der englische Mathematiker James Joseph SYLVESTER (1814–1897) gab ihm deshalb 1851 den Namen Diskriminante*. Wir kürzen diesen Ausdruck mit D ab. Wegen seiner Bedeutung merken wir uns

> **Definition 84.1:** $D := b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante** der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

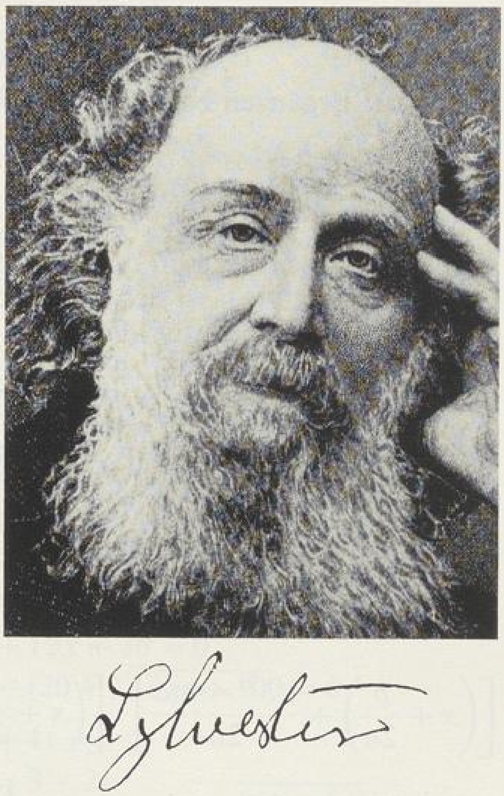


Abb. 84.1 James Joseph SYLVESTER (3.9.1814 London–15.3.1897 ebd.)

* discriminare (lat.) = trennen, unterscheiden. Diskriminante ist eine der vielen Wortschöpfungen SYLVESTERS.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in

> **Satz 85.1:** Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ hat
>
> für $D > 0$ die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
>
> für $D = 0$ die Lösung $x = -\dfrac{b}{2a}$
>
> für $D < 0$ keine Lösung.

Praktisches Vorgehen bei der Anwendung der Lösungsformel:

1) Treten in den Koeffizienten der Gleichung Nenner auf, so beseitigt man diese durch Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner.
2) Ist der Koeffizient des quadratischen Glieds negativ, dann multipliziert man die Gleichung mit -1.
3) Da D die entscheidende Rolle spielt, berechnet man nun D.
   Ist $D < 0$, so ist man fertig.
   Ist $D = 0$, so ist $x = -\dfrac{b}{2a}$ die einzige Lösung.
   Ist $D > 0$, so erhält man die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Beispiel 1:

$-5x^2 + 8x + 21 = 0 \quad \| \cdot (-1)$

$5x^2 - 8x - 21 = 0$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-21) = 64 + 420 = 484; \quad \sqrt{D} = 22.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm 22}{2 \cdot 5}$$

$x_1 = -\frac{7}{5}, \quad x_2 = 3.$

Beispiel 2:

$\frac{5}{6}x^2 + \frac{10}{9}x + \frac{10}{27} = 0 \quad \| \cdot \frac{54}{5}$

$9x^2 + 12x + 4 = 0$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0; \quad \sqrt{D} = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 9}$$

$x = -\frac{2}{3}.$

Beispiel 3:

$x^2 + x + 1 = 0 \qquad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$

Keine Lösung.

**Zur Geschichte der Lösungsformel

Der Wunsch nach einer Lösungsformel für eine quadratische Gleichung ist so alt wie die Gleichung selbst. Solange man aber nicht über eine algebraische Formelsprache verfügte, konnte man den Lösungsweg nur in Worten angeben. Anhand der Aufgabe 1 der Keilschrifttafel BM 13901 (20. Jh. v. Chr.) zeigen wir dir dieses Vorgehen. Wir stellen links den babylonischen Text, rechts die moderne algebraische Form unter Verwendung allgemeiner positiver Koeffizienten B und C dar.

Die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{3}{4}$ ist es.	$x^2 + x = \frac{3}{4}$
1, den Koeffizienten, nimmst du.	$1 = B$
Die Hälfte von 1 brichst du ab, es ist $\frac{1}{2}$.	$\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ multiplizierst du, es ist $\frac{1}{4}$.	$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ fügst du hinzu, es ist 1.	$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
1 hat als Quadratwurzel 1.	$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} = 1$
$\frac{1}{2}$, das du mit sich multipliziert hast, von 1 subtrahierst du, es ist $\frac{1}{2}$;	$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$
und das ist die Quadratseite.	$x = \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2}$

Die gegebene Gleichung hat die Normalform $x^2 + x + (-\frac{3}{4}) = 0$, d.h., $a = 1$, $b = 1 = B$ und $c = -\frac{3}{4} = -C$. Mit unserer Formel erhalten wir als positive Lösung

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4 \cdot 1 \cdot C}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-B + 2\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C}\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2},$$

also das Ergebnis der Babylonier.

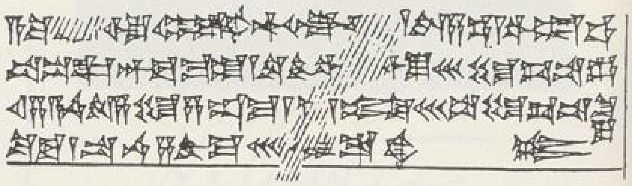


Abb. 86.1 Autographie der Aufgabe 1 der Keilschrifttafel BM 13901, aufbewahrt im **B**ritish **M**useum zu London

Nun gab es lange Zeit keine Null und erst recht keine negativen Zahlen, sodass diese auch nicht als Koeffizienten auftreten konnten. Daher gab es auch nicht *eine* quadratische Gleichung, sondern 5 verschiedene Typen. Und für jeden Typ musste ein eigenes Lösungsverfahren angegeben werden (siehe unten). Wir können fast sicher sein, dass DIOPHANT (um 250 n. Chr.) über all diese Verfahren verfügte, wenn wir auch keinen Beleg dafür haben; denn jedes Mal, wenn bei ihm eine quadratische Gleichung vorkommt, gibt er die Lösung richtig an.
Seine *Arithmetik* soll 13 Bücher umfasst haben, von denen uns nur 6 auf Griechisch überliefert wurden. Vor wenigen Jahren fand man eine um 900 angefertigte arabische Übersetzung von 4 weiteren Büchern. In den nun bekannten 10 Büchern findet man keine Theorie der quadratischen Gleichungen. Wir können nur hoffen, dass sich die letzten 3 Bücher auch noch finden!
Durch die Einführung der negativen Zahlen und auch der Null als Koeffizienten war es den Indern möglich, alle Gleichungen auf eine Standardform zu bringen und zu lösen. So verlangt BRAHMAGUPTA (598 – nach 665), jede quadratische Gleichung – in unserer Schreibweise – auf die Form $ax^2 + bx = d$ zu bringen und dann gemäß $x = \dfrac{\sqrt{4ad + b^2} - b}{2a}$ zu lösen. Mit unserem $c = -d$ ist dies fast schon unsere Lösungsformel. Es fehlt nur noch das $\pm$. Wir müssen sogar annehmen, dass bereits sein Vorgänger ARYABHATA I (um 476–?) auf diese Art quadratische Gleichungen löste (siehe Aufgabe 101/**27**).
Leider übernahmen die Araber von den Indern nicht die negativen Zahlen – ein algebraischer Rückschritt! –, sodass es bei ihnen auch keine Standardform mit Lösungsformel gibt. Einen Überblick über alle möglichen Formen bringt AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847) gleich zu Beginn seines *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen«. Wir müssen uns dabei erinnern (vgl. Abbildung 68.1), dass er darin drei Begriffe verwendet:
- die Wurzel; darunter versteht man alles, was mit sich multipliziert werden kann;
- das Vermögen; darunter versteht man alles, was sich durch Multiplizieren der Wurzel mit sich selbst ergibt;
- die (reine) Zahl; darunter versteht man alles, was ausgesprochen werden kann ohne Beziehung zu Wurzel und Vermögen.

Und nun sagt AL-CHARIZMI, dass zunächst je zwei von diesen dreien (oder Vielfache davon) untereinander gleich sein können, dass man aber auch jeweils zwei addieren und der 3. Art gleichsetzen könne. Dadurch entstehen 6 Typen von Gleichungen, die zur Grundlage der abendländischen Gleichungslehre wurden. Deutet man »Wurzel« als Unbekannte x, so wird »Vermögen« zu x^2, und es entstehen quadratische Gleichungen.* Mit positiven A, B und C können wir den arabischen Text modern umschreiben:

(A1)	Vermögen sind Wurzeln gleich.	$Ax^2 = Bx$
(A2)	Vermögen sind einer Zahl gleich.	$Ax^2 = C$
(A3)	Wurzeln sind einer Zahl gleich.	$Bx = C$
(B1)	Vermögen und Wurzeln sind einer Zahl gleich.	$Ax^2 + Bx = C$
(B2)	Vermögen und Zahl sind Wurzeln gleich.	$Ax^2 + C = Bx$
(B3)	Wurzeln und Zahl sind Vermögen gleich.	$Bx + C = Ax^2$

Jede dieser 6 Typen führt AL-CHARIZMI an einem Problem vor. Dabei bereiten die

* Natürlich kann man auch »Vermögen« als Unbekannte x wählen, was in vielen Aufgaben zweckmäßig ist. Weil dies in den Übersetzungen aber fast nie getan wurde, entstanden viele Ungereimtheiten und Missverständnisse. Siehe z. B. Aufgabe 94/**11i**.

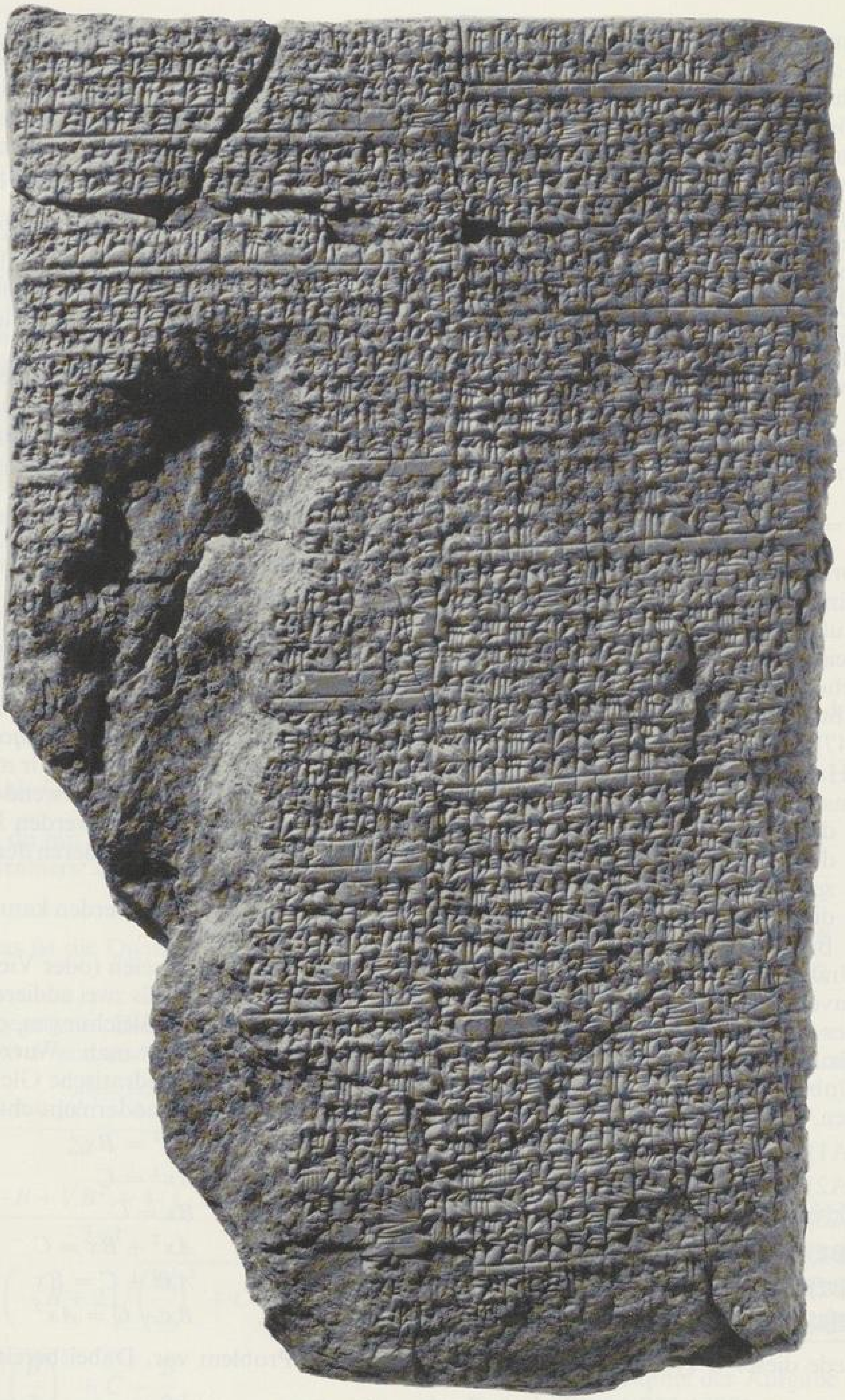


Abb. 88.1 Vorderseite der altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901, ca. 12 cm × 20 cm groß

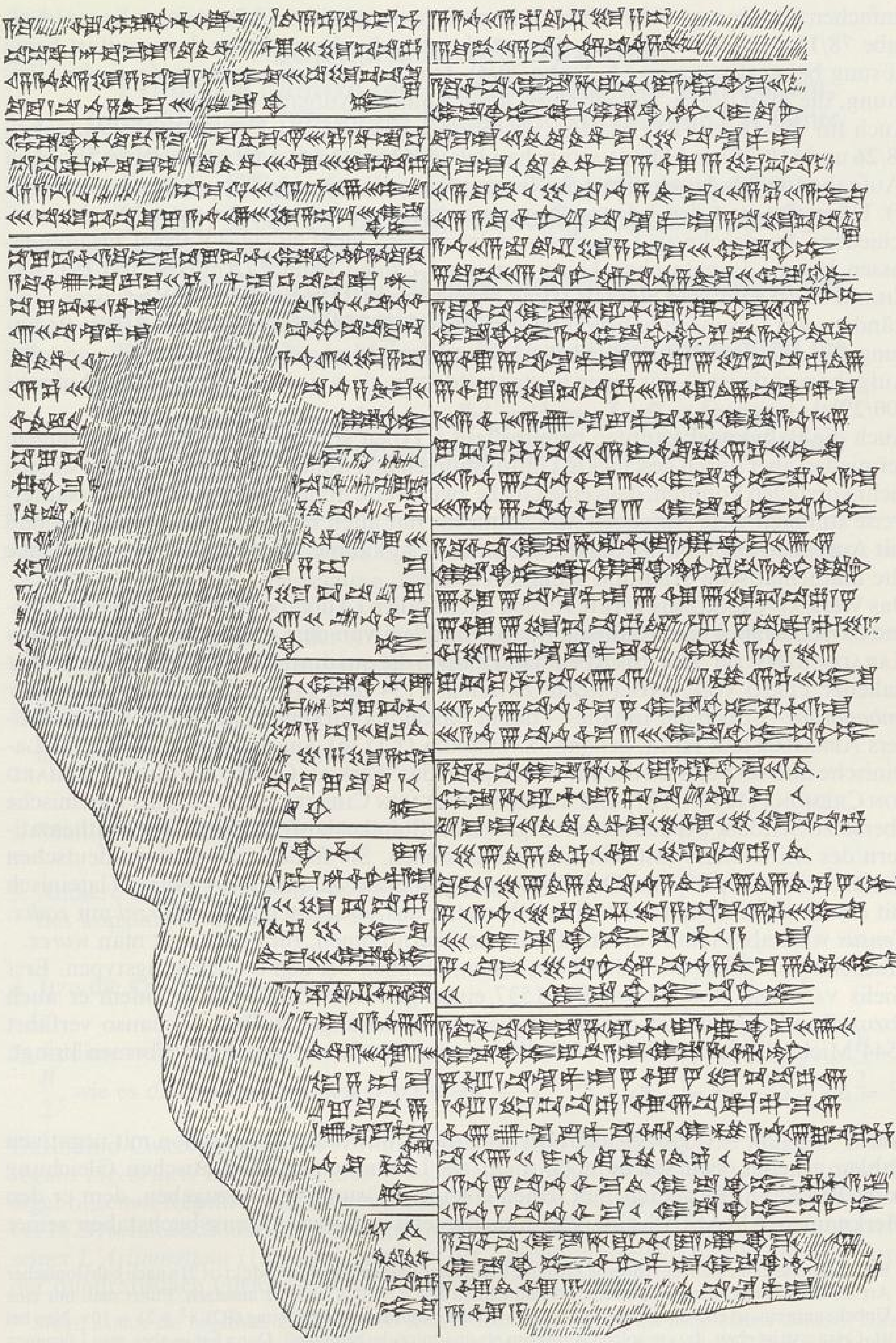


Abb. 89.1 Autographie der in Abbildung 88.1 wiedergegebenen altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901

einfachen Gleichungen (A1) bis (A3) keine Schwierigkeiten. (A3) ist sogar linear (Aufgabe 78/**15c**). (A1) wird linear, da man durch x dividieren kann; denn null ist keine Lösung bei AL-CHARIZMI (Aufgabe 79/**4**). Und (A2) ist eine rein quadratische Gleichung, die man durch Wurzelziehen lösen konnte (Aufgabe 78/**15a**).
Auch für die Typen (B1) bis (B3), die übrigens bereits von EUKLID (siehe Aufgaben 98/**26** und 110/**25**) und DIOPHANT behandelt worden waren, stellt er jeweils ein Problem (Aufgabe 100/**28**), beschreibt den Lösungsweg in Worten und beweist ihn geometrisch (!). Übersetzt man den Lösungsweg in unsere Formelsprache, so entstehen drei verschiedene Ausdrücke als Lösungsformeln, die sich nicht zu *einer* Formel zusammenfassen lassen, da man eben keine negativen Zahlen kannte (Aufgabe 100/**29**). AL-CHARIZMI erkennt aber, dass (B2) im Gegensatz zu (B1) und (B3) unter gewissen Umständen zwei Lösungen haben kann. Er gibt – natürlich wieder in Worten – die Bedingung für zwei und für eine einzige Lösung an und sogar dafür, dass »die gestellte Aufgabe nichtig ist« – wir sagen heute stattdessen, dass sie keine Lösung hat (Aufgabe 100/**29**).
Auch die Babylonier kannten bereits diese 3 Typen von quadratischen Gleichungen, vermieden aber durch geschickte Umformungen fast immer den Typ (B2), weil sie sich nicht vorstellen konnten, dass eine Größe zwei Werte annehmen sollte.* Interessanterweise stimmen viele Aufgaben AL-CHARIZMIS mit alten babylonischen Aufgaben und mit Aufgaben DIOPHANTS, dessen Werke er nicht kannte, überein, sodass wir auf eine alte mathematische Tradition schließen dürfen.
Das Werk AL-CHARIZMIS wirkte zurück nach Indien (Aufgabe 100/**30**) und wurde fortgesetzt von arabischen Mathematikern, vor allem von dem in Bagdad wirkenden AL-KARADSCHI (10./11. Jh.). Ins Abendland kamen die quadratischen Gleichungen, als der Italiener PLATO VON TIVOLI (lebte zwischen 1134 und 1145 in Barcelona) den *liber embadorum* – »Buch der Inhalte« – des in Barcelona wirkenden jüdischen Mathematikers ABRAHAM BAR HIJJA, genannt SAVASORDA († 1136), aus dem Hebräischen ins Lateinische übersetzte. Bald darauf wurde auch das Werk AL-CHARIZMIS durch GERHARD VON CREMONA (1114–1187) und durch ROBERT VON CHESTER (um 1145) ins Lateinische übersetzt. Seitdem werden seine Aufgaben als Standardaufgaben von den Mathematikern des Mittelalters fast wörtlich übernommen. Sie finden sich auch in deutschen Handschriften des 15. Jh.s. Dabei wird das arabische مال (māl) = *Vermögen* lateinisch mit *census* (seltener mit *substantia*) übersetzt, das جذر (dschidr) = *Wurzel* mit *radix*. *Census* wird als Fremdwort ins Deutsche übernommen, für *radix* sagt man *wurcz*.
Mathematisch blieb aber alles beim Alten, nämlich bei den 6 Gleichungstypen. Erst Gielis VAN DEN HOECKE schaffte 1537 einen gewissen Durchbruch, indem er auch abzuziehende Glieder in den quadratischen Gleichungen zulässt. Genauso verfährt 1544 Michael STIFEL (1487?–1567), der sie damit alle auf eine der 3 Formen bringt:

$$x^2 = Bx + C, \quad x^2 = -Bx + C, \quad x^2 = Bx - C. \quad (B \text{ und } C \text{ positiv})$$

Nur $x^2 = -Bx - C$ gibt es nicht bei ihm, da er, obwohl er sonst schon mit negativen Zahlen arbeitet, sich solche noch nicht als Lösung einer quadratischen Gleichung vorstellen kann. Es gelingt ihm, einen einzigen Lösungsweg anzugeben, dem er den Merknamen AMASIAS gibt, zusammengesetzt aus den Anfangsbuchstaben seiner

* Beispielsweise kann man die Aufgabe »10 habe ich in zwei Teile geteilt, ihr Produkt ist 21« nach babylonischer Art als Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu $x + y = 10 \wedge xy = 21$ ansetzen. Führt man nur eine Unbekannte ein, so erhält man aus $x(10 - x) = 21$ die quadratische Gleichung (B2) $x^2 + 21 = 10x$. Neu bei AL-CHARIZMI ist eben, dass er solche Aufgaben als quadratische behandelt. Dann hat er aber zwei Lösungen für x, nämlich 3 und 7, was für die Babylonier unverständlich ist. Sie bekommen auch keine zwei! Denn sie benützen die Identität $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$ und rechnen $(x - y)^2 = 100 - 4 \cdot 21 = 16$, was, da es nur positive Zahlen gibt, sofort auf $x - y = 4$ führt. Mit $x + y = 10$ ergibt sich $x = 7$ und $y = 3$.

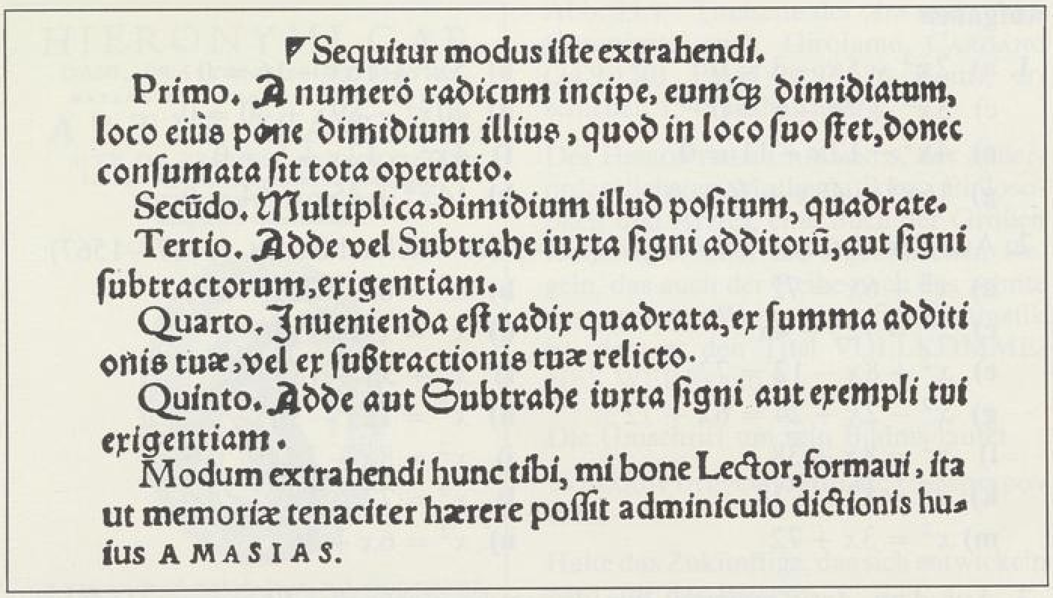

Sequitur modus iste extrahendi.
Primo. A numeró radicum incipe, eumq; dimidiatum, loco eiūs pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio.
Secūdo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate.
Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorū, aut signi subtractorum, exigentiam.
Quarto. Inuenienda est radix quadrata, ex summa additi onis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto.
Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam.
Modum extrahendi hunc tibi, mi bone Lector, formaui, ita ut memoriæ tenaciter hærere possit adminiculo dictionis huius AMASIAS.

Abb. 91.1 Die AMASIAS-Merkregel aus Michael STIFELS *Arithmetica integra* von 1544 (folium 240 v) – Übersetzung im Lösungsheft

lateinischen Merkregel aus der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – von 1544 (Abbildung 91.1). Etwas modernisiert lautet sie für $x^2 = \pm Bx \pm C$:

1. **A**nfange mit der Anzahl der Wurzeln, B
   halbiere sie und lass sie stehn. $\frac{B}{2}$
2. **M**ultipliziere diese Hälfte mit sich. $\left(\frac{B}{2}\right)^2$
3. **A**ddiere oder **S**ubtrahiere, wie es das Vorzeichen des konstanten Glieds C fordert. $\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C$
4. **I**tzo die Quadratwurzel zieh. $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C}$
5. **A**ddiere oder **S**ubtrahiere das zur Seite gestellte $\frac{B}{2}$, wie es das Vorzeichen von B verlangt. $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C} \pm \frac{B}{2}$

Geronimo CARDANO (1501–1576) hingegen erkennt in seinem *Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus* (1545) – »Das eine Buch über die Große Kunst oder die algebraischen Regeln« – als Lösungen auch negative Zahlen an.* Simon STEVIN (1548 bis 1620) schließlich lässt sowohl negative Koeffizienten wie auch negative Lösungen in seiner *L'Arithmetique* (1585) zu. Damit ist der Abschluss erreicht: Es gibt nur eine Form der quadratischen Gleichung und nur eine Lösungsformel.

* STIFEL nannte die negativen Zahlen *numeri absurdi* oder auch *numeri ficti* (eingebildete Zahlen). Diesen Ausdruck benützt auch CARDANO. Wenngleich dieser in Kapitel I seiner *Ars magna* von wahren und eingebildeten Lösungen einer quadratischen Gleichung spricht ($x^2 + 4x = 21$ hat die wahre Lösung 3 und die eingebildete -7), so führt er bei den in Kapitel V vorgerechneten Beispielen immer nur die wahre, d. h. die positive Lösung auf.

Aufgaben

1. a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 16x - 16 = 0$
c) $3x^2 - 7x - 6 = 0$ d) $40x^2 - 89x + 40 = 0$
e) $4x^2 - 12x + 11 = 0$ f) $4x^2 - 12x + 5 = 0$
g) $16x^2 - 48x + 36 = 0$ h) $14x^2 + 45x - 14 = 0$

2. Aus der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487?–1567):
a) $x^2 + 6x = 72$ b) $x^2 = 6x + 72$
c) $x^2 = 725 - 4x$ d) $x^2 = x + 35156$
e) $x^2 + 8x - 12 = 72$ f) $x^2 + 3x + 18 = 72$
g) $x^2 - 2x + 24 = 6x + 72$ h) $x^2 = 12x - 36$
i) $x^2 = 8x + 38$ j) $x^2 = 8x - 38$
k) $x^2 = 12x - 18$ l) $x^2 = 72 - 3x$
m) $x^2 = 3x + 72$ n) $x^2 = 6x + 36$

3. Aus dem *Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
a) $x^2 + 4x = 21$ b) $x^2 = 4x + 21$ c) $x^2 + 12 = 7x$
d) $x^2 = 10x + 144$ e) $144 = 10x + x^2$ f) $x^2 = 10x + 6$
g) $6 = 10x + x^2$ h) $10x = x^2 + 6$ i) $x^2 = \sqrt{12}x + 22$
j) $x^2 = \sqrt{12}x + 20$ k) $x^2 = \sqrt{12}x + 9$ l) $x^2 = \frac{2}{3}x + 11$
m) $x^2 + 16 = 10x$

4. a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 2x - 1 = 0$
c) $4x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $6x^2 - 2x - 1 = 0$
e) $5x^2 - 5x + 1 = 0$ f) $12x^2 + 48x + 47 = 0$

5. a) $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$ b) $0{,}5x^2 + 3{,}25x + 1{,}5 = 0$
c) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 2 = 0$ d) $0{,}1x^2 + \frac{43}{30}x - 1 = 0$
e) $2{,}25x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$ f) $\frac{3}{7}x^2 - \frac{29}{28}x + 0{,}5 = 0$
g) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{9} = 0$ h) $0{,}36x^2 + 0{,}4x - \frac{10}{9} = 0$

6. Runde die erhaltenen Lösungen auf Tausendstel.
a) $x^2 - 37 = 0$ b) $x^2 - 6x - 11 = 0$
c) $x^2 + 11x + 8 = 0$ d) $16x^2 - 112x + 63 = 0$
e) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$ f) $2\sqrt{3}x^2 - 12x + 5\sqrt{3} = 0$
g) $\sqrt{3}x^2 - 6x + 4\sqrt{3} = 0$ h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
i) $x^2 - (4 + 2\sqrt{2})x + 6 + 4\sqrt{2} = 0$ j) $2x^2 + x(1 - 3\sqrt{3}) + 3 - \sqrt{3} = 0$
k) $\sqrt{8}x^2 - 4\sqrt{3}x + 2\sqrt{2} = 0$ l) $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5}x - \sqrt{15} = 0$


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſ ſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolùm, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Abb. 93.1 Titelseite der *Ars magna* des Geronimo, auch Girolamo CARDANO (24.9.1501 Pavia–20.9.1576 Rom), erschienen 1545 in Nürnberg:

Des HIERONYMUS CARDANUS, des außerordentlichsten Mathematikers, Philosophen und Arztes, eine Buch der Großen Kunst oder über die algebraischen Regeln, das auch der Reihe nach das zehnte des gesamten Werks über die Arithmetik ist, dem er den Titel VOLLKOMMENES WERK gab.*

Die Umschrift um sein Bildnis lautet

τὸ μέλλον ὅτι γενήσεται εἰς τὸ φέρτερον τίθει

Halte das Zukünftige, das sich entwickeln wird, für das Bessere!

7. Gib vierstellige Näherungen für die Lösungen an, d. h., berechne die Lösungen auf vier geltende Ziffern genau (führende Nullen zählen nicht!).

a) $x^2 - 7{,}9771x + 7{,}0802 = 0$ **b)** $x^2 + 0{,}1010x - 0{,}2411 = 0$

c) $x^2 + \pi x - \pi^2 = 0$ **d)** $x^2 - \sqrt{3{,}14}\,x + 1 - \sqrt{5} = 0$

e) $3{,}14x^2 + 2{,}01x + 0{,}301 = 0$ **f)** $1509x^2 + 1998x - 7487 = 0$

g) $1{,}23 \cdot 10^4 x^2 - 2{,}34 \cdot 10^5 x - 1 = 0$

h) $\sqrt{2}x^2 + (2 - 2\sqrt{2})x + \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 2 = 0$

8. a) $(x + 5)(2x - 7) = 9$ **b)** $(1 - 3x)(5x + 2) = 0$

c) $(4x - 1)^2 + 2x = 0$ **d)** $(2x + 3)(3 - 2x) + 6x + 1 = 0$

e) $(11x - 7)^2 = (10 - 10x)^2$ **f)** $4x^2 - x(5 + 3x) = (6 - 2x)^2 - 36$

g) $(3x + 2)^2 - (2x + 1)(2x - 1) + x = 11$

* Text unter dem Bildnis:
Du findest in diesem Buch, lernbegieriger Leser, die algebraischen Regeln (die Italiener nennen sie die der Coß), die vom Verfasser durch neue Hinzuerfindungen und Beweise so bereichert wurden, dass an Stelle der recht wenigen vorher allgemein geläufigen schon siebzig herausgekommen sind. Und sie erklären nicht nur das Problem, bei dem eine Zahl einer zweiten oder zwei einer, sondern auch das, bei dem zwei zweien oder drei einer gleich gewesen sind. – Es erschien aber angebracht, dieses Buch deshalb gesondert herauszugeben, damit, wenn dieser sehr versteckte und völlig ungehobene Schatz der ganzen Arithmetik ans Licht gebracht und wie in einem Theater allen zum Anschauen vor Augen geführt wird, die Leser angespornt werden, die übrigen Bücher des »Vollkommenen Werks«, die bandweise erscheinen werden, umso begieriger aufzunehmen und mit geringerem Widerwillen durchzuarbeiten.

h) $(3+5x)^2-(3x-2)^2-(5-2x)(5+2x)=0$

i) Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170 bis nach 1240): $(1+\frac{2}{3}x)(1+\frac{3}{4}x)=73$

•9. a) $(4x+1)(6x-5)(5x+2)=(3x+4)(10x-17)(4x+3)-246$

b) $(8x-7)(9x-16)(7x-6)=(14x-13)(12x-11)(3x-5)-5$

c) $x(x-2)(x+5)+(x-3)(x-2)(8-3x)=2x^2(3-x)+208$

d) $(x-4)^3+(x+1)^3=(x-1)(x-2)(2x+3)+61$

e) $(2x+3)^3+(4x-3)^3=(2x+1)(4x+3)(9x-25)+853$

f) $(3x-4)^3-(6x-7)^3=(9x+6)(7x-12)(7-3x)+620$

g) $(5x-9)^3-(7x-5)^3=4x(14x-25x^2)-2x(59x^2-45)$

10. a) $x+\dfrac{6}{x}=5$ **b)** $x-\dfrac{18}{x}=3$

c) $3x-\dfrac{16}{x}=8$ **d)** $9x+\dfrac{45}{x}=86$

e) $\dfrac{6}{2x+5}+\dfrac{5}{4x-4}=1$ **f)** $\dfrac{8}{6x+1}-\dfrac{4}{3x-4{,}5}=5$

g) $\dfrac{3}{2x-7}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2x-6}$ **h)** $1+\dfrac{1}{x-12}=\dfrac{25}{4x+1}$

i) $9-\dfrac{13}{5x+1}+\dfrac{40}{5x-8}=0$ **j)** $\dfrac{3}{6x-2}+\dfrac{7}{3x+1}=\dfrac{5}{2}$

k) Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA:
$$\frac{60}{x+2}=5+\frac{20}{x}$$

l) Aus dem *Codex latinus monacensis 14908* (um 1460):
$$\frac{15}{x}+\frac{17}{x+3}=7$$

11. Zur Vertiefung rechnet AL-CHARIZMI in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* u. a. die folgenden Aufgaben vor. Löse die in moderner Schreibweise wiedergegebenen Gleichungen. Warum sind nicht alle von dir gefundenen Lösungen auch Lösungen bei AL-CHARIZMI?

a) $(10-x)^2-x^2=40$ **b)** $(10-x)^2+x^2+(10-x)-x=54$

c) $\dfrac{10-x}{x}+\dfrac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$ **d)** $\dfrac{5x}{2(10-x)}+5x=50$

e) $(10-x)^2=81x$ **f)** $\dfrac{x(10-x)}{10-2x}=5\frac{1}{4}$

g) $(x-(\frac{1}{3}x+3))^2=x$ **h)** $\dfrac{1{,}5}{1+x}=2x$

i)* $(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x-4)^2=x+12$ **j)** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{6}$

•12. a) $\dfrac{7}{x+5}-\dfrac{8}{x-6}=\dfrac{3}{x-1}$ **b)** $\dfrac{5}{x-4}+\dfrac{6}{x-3}=\dfrac{6}{x-6}$

c) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{6}{7-x}$ **d)** $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{9}{x+5}=\dfrac{40}{x+1}$

e) $\dfrac{6}{3x-4}-\dfrac{5}{4x-3}=\dfrac{18}{2x+5}$ **f)** $\dfrac{11}{4x-1}+\dfrac{18}{7x-3}=\dfrac{26}{3x+4}$

g) $\dfrac{18}{2x+1}-\dfrac{14}{3x+2}=\dfrac{19}{4x+3}$ **h)** $\dfrac{7}{2x-3}+\dfrac{26}{3x-2}=\dfrac{57}{4x-1}$

••i) $\dfrac{8x+7}{6x^2-13x-5}+\dfrac{10x-1}{3x^2+10x+3}=\dfrac{7x+2}{2x^2+x-15}$

•13. a) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-1}{x+4}=\dfrac{x-1}{x-4}+1$ **b)** $\dfrac{x+11}{x+2}+\dfrac{x+13}{x+3}=\dfrac{4}{x-5}+2$

c) $\dfrac{x+5}{x-3}+\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{5}{x-4}+2$ **d)** $\dfrac{x+5}{x+2}+\dfrac{x+7}{x+3}=\dfrac{x+2}{x}+1$

•14. a) $x^2+4ax+3a^2=0$ **b)** $m^2x^2-5mnx+4n^2=0,\ m\neq 0$

c) $x^2+(p-q)x-pq=0$ **d)** $x^2+(1-2a^2)x-2a^2=0$

e) $4u^2x^2-4(u^2+uv)x+(u+v)^2=0,\ u\neq 0$

••f) $2c^2x^2-2c^2x-cdx-3cd-6d^2=0,\ c\neq 0$

••g) $4x^2-4(r+s)x+r^2+2rs-1=0$

••h) $x^2+ax-2bx-2ab-2(a+2b)-4=0$

••i) $(x+2a)(x+b)(x-a+b)=(x-b)^3+b(x-a-b)^2+a(6bx-a^2)$

••j) $(x+a)^3-(x-a)^3=a(2x+a)(2x-b)+2a^3+5a^2b+4ab^2$

* Der Text AL-CHARIZMIS lautet: »Ein Vermögen, du nimmst ein Drittel davon weg und ein Viertel und 4 Dirhem [siehe Fußnote auf Seite 67]. Dann multiplizierst du den Rest mit sich selbst und das Vermögen ist wiedergewonnen, vermehrt um 12 Dirhem.«
Setzt man Vermögen $= x$, so erhält man die obige Gleichung.
CARDANO bringt diese Aufgabe als Quaestio I in Kapitel V seiner *Ars magna* (1545) und verweist auf AL-CHARIZMI als Autor: »Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atque insuper 4. residuum autem in se duxeris, fiet productum aequale quadrato illius numeri, & etiam 12.«
Würde man *numerus* $= x$ setzen, so erhielte man $(x^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^2-4)^2=x^2+12$, eine unnötig schwere Gleichung.
Diese Aufgabe ist ein schönes Beispiel dafür, dass *māl = Vermögen* nicht immer als Quadrat einer Zahl gedeutet werden muss. Übrigens gibt sich CARDANO mit der Lösung für das Quadrat der Zahl zufrieden, gibt also die angeblich gesuchte Zahl gar nicht an.

15. Führe beim Lösen der folgenden Gleichungen die erforderlichen Fallunterscheidungen durch!

a) $x^2 + 2ax + 1 = 0$ • **b)** $x^2 - 4ax + 4a = 0$

• **c)** $x^2 + abx + a^2b = 0$ **d)** $x^2 + (2a + 4b)x + 5a^2 + 5b^2 = 0$

e) $mx^2 - 2x - \frac{1-m}{m^2} = 0$ • **f)** $ax^2 + \frac{ax}{a+2} - \frac{1}{a^2-4} = 2x^2 + x$

g) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-2a}{x+a} = 2\frac{1}{4}$ • **h)** $\frac{1}{ax+b} + \frac{1}{ax-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}$

16. Wie muss man bei den folgenden Gleichungen k wählen um die angegebene Zahl von Lösungen zu erhalten?

a) $2x^2 + 6x + k = 0$ 2 Lösungen
b) $3x^2 + kx + 27 = 0$ keine Lösung
c) $6x^2 - 5kx - k^2 = 0$ 1 Lösung
d) $x^2 - kx + 4 = 0$ 2 Lösungen
e) $2x^2 + kx - 4k^2x - 2k^3 = 0$ 1 Lösung
f) $x^2 - k(2k + 0{,}5)x - k^3 = 0$ 1 Lösung

17. a) Beweise:
1) Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat im Falle $q < 0$ stets zwei verschiedene Lösungen.
2) Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt, falls a und c entgegengesetzte Vorzeichen haben, stets zwei verschiedene Lösungen.

b) Gilt von diesen Aussagen auch die Umkehrung?

18. Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $d \neq 0$ stellt bekanntlich eine Äquivalenzumformung dar. Zeige für den Fall der quadratischen Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel, dass dabei die Lösungen tatsächlich gleich bleiben.

19. Wähle in den folgenden Gleichungen k so, dass die Differenz der Lösungen den angegebenen Wert d hat.

a) $2x^2 - 5x + k = 0,$ $d = 1{,}5$
b) $6x^2 + 13x + k = 0,$ $d = \frac{5}{6}$
c) $x^2 + kx - 11 = 0,$ $d = 12$
d) $9x^2 + k^2x + 2 = 0,$ $d = \frac{17}{9}$
e) $kx^2 + 15x + 12 = 0,$ $d = 3$
f) $kx^2 - 24x - 1 = 0,$ $d = 1{,}04$

20. Für welche Werte von k haben die folgenden Gleichungen ganzzahlige Lösungen?

a) $x^2 + 2x + k^2 = 0$
b) $kx^2 - 20x + 15 = 0,\ k \in \mathbb{N}$
c) $k(x^2 + 10x) + 48 = 0,\ k \in \mathbb{Z}$

21. In der Gleichung $x^2 - 8x + n = 0$ soll die natürliche Zahl n so gewählt werden, dass eine durch 3 teilbare ganzzahlige Lösung auftritt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

22. a) Begründe: Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit rationalen Koeffizienten die irrationale Lösung $r + s\sqrt{t}$, wobei r und s rational sind, dann hat sie auch die Lösung $r - s\sqrt{t}$.

b) Eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten habe die Lösung $3 - 2\sqrt{17}$. Wie lautet ihre Normalform?

c) Die Gleichung $2x^2 - 7x + c = 0$, c rational, soll eine Lösung mit dem irrationalen Bestandteil $3\sqrt{5}$ haben. Bestimme c.

23. Gilt der Satz aus Aufgabe **22. a)** auch für rationale Lösungen? Bearbeite dazu:

a) Bestätige, dass $1 + \sqrt{4}$ Lösung der Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ ist. Ist dann auch $1 - \sqrt{4}$ Lösung?

b) Bestätige, dass $3{,}5 + \sqrt{\frac{1}{4}}$ Lösung der Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ ist. Ist auch $3{,}5 - \sqrt{\frac{1}{4}}$ Lösung?

24. Im Britischen Museum zu London wird unter der Signatur BM 13901 eine der ältesten babylonischen Keilschrifttafeln (ca. 1900 v. Chr.) aufbewahrt. Sie enthält 24 Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen mit einer (Nr. 1–7, 16 und 23), mit zwei oder mehr Unbekannten führen. Offensichtlich handelt es sich bei dieser Tafel um Übungsmaterial für den Mathematikunterricht; denn die Aufgaben sind alle vorgerechnet (siehe Seite 86). Bestimmt wurde bei den folgenden Aufgaben jeweils die Seite eines Quadrats. Suche sie!

1) Die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{3}{4}$ ist es.*

2) Die Seite meines Quadrats von der Fläche habe ich subtrahiert, und 870 ist es.

3) Ein Drittel der Fläche habe ich abgezogen, ein Drittel der Seite meines Quadrats habe ich zur Fläche hinzugefügt, und $\frac{20}{60}$ ist es.

4) Ein Drittel der Fläche habe ich subtrahiert, und die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $286\frac{2}{3}$ ist es.

5) Die Fläche und die Seite meines Quadrats und den dritten Teil der Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{55}{60}$ ist es.

6) Die Fläche und zweimal den dritten Teil der Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{35}{60}$ ist es.

7) Elf Flächen und sieben Seiten meines Quadrats habe ich addiert, und $6\frac{1}{4}$ ist es.

* Natürlich kann man Flächen und Seiten nicht addieren. Die Babylonier benützen zwar noch die geometrischen Ausdrücke, meinen damit aber immer nur die Maßzahlen der Fläche und der Seite.

16) Ein Drittel der Seite meines Quadrats von der Fläche habe ich abgezogen, und $\frac{1}{12}$ ist es.

23) Eine Fläche. Die vier Seiten und die Fläche habe ich addiert, und $\frac{25}{36}$ ist es.

25. Aus dem Buch IX des *Chiu Chang Suan Shu* (2. Jh. v. Chr.):

a) *Aufgabe 12:* Jetzt habe man eine Tür, deren Höhe und Breite man nicht kennt. Beide sind kürzer als die unbekannte Länge einer Bambusstange. Hält man diese horizontal, dann kommt man nicht hindurch; denn 4 Fuß ist sie zu lang. Hält man sie vertikal, dann kommt man um 2 Fuß nicht hindurch. Hält man sie aber schräg, dann kommt man gerade hindurch. Frage: Wie groß sind Höhe, Breite und Diagonale? [1 Fuß $\approx$ 23 cm]

b) *Aufgabe 20:* Jetzt hat man eine Stadt mit quadratischem Grundriss. Die Seitenlänge kennt man nicht. In der Mitte jeder Seite ist ein offenes Tor. Geht man aus dem Nordtor 20 Schritt hinaus, dann kommt man an einen Baum. Geht man aus dem Südtor 14 Schritt hinaus, biegt ab und geht dann nach Westen 1775 Schritt, dann erblickt man von dort den Baum. Frage: Wie groß ist die Quadratseite der Stadt? [1 Schritt = 6 Fuß $\approx 1\frac{1}{3}$ m]

26. a) EUKLID (um 300 v. Chr.) behandelt in Buch II, Satz 11 seiner *Elemente* folgendes Problem: Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt gleich ist dem Quadrat über dem anderen Abschnitt.

1) Berechne die Länge x desjenigen Teils der Strecke a, über dem das Quadrat errichtet wird.*

2) Zeige, dass stets $x > \frac{1}{2}a$ ist.

b) Zeige durch Berechnen von $\overline{AD} = x$, dass die von EUKLID angegebene Konstruktion richtig ist (Abbildung 98.1).

c) Die stetige Teilung oder der goldene Schnitt. EUKLID nennt in Buch VI (Definition 3) seiner *Elemente* eine Strecke stetig geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt genauso verhält wie der größere Abschnitt zum kleineren. Zeige, dass die Aufgabe, eine Strecke a stetig zu teilen, auf dieselbe

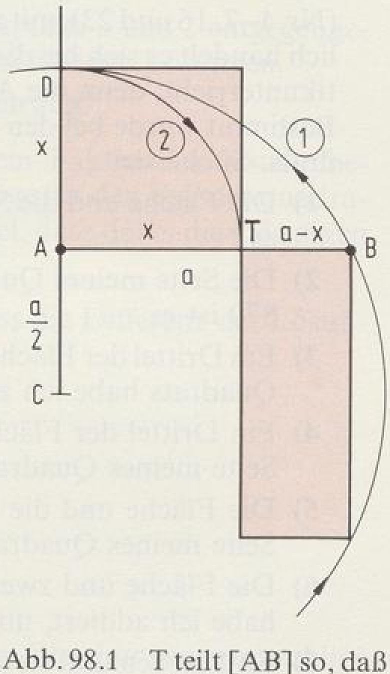


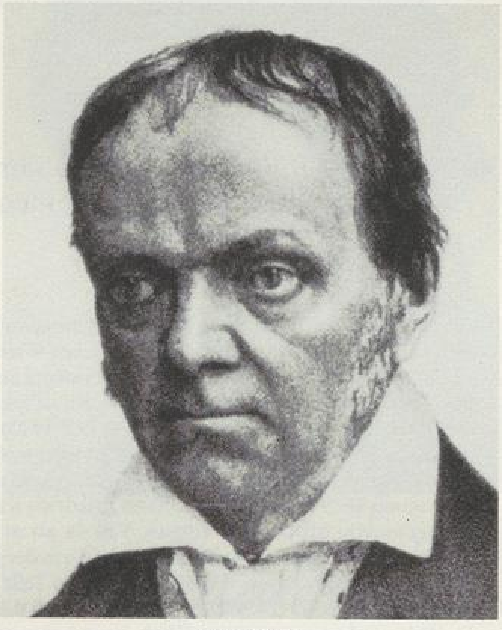
Abb. 98.1 T teilt [AB] so, daß $x^2 = a(a - x)$.
$k(C; \overline{CB})$ liefert D, $k(A; \overline{AD})$ liefert T.

* Die quadratische Gleichung für x ist vom Typ (B1). (Siehe Seite 87)

Gleichung führt wie die, mit der das Problem von EUKLIDS Satz II/11 aus Aufgabe **a** gelöst wird.*

d) Die stetige Teilung hat folgende interessante Eigenschaft: Trägt man den kleineren Abschnitt auf dem größeren Abschnitt ab, so wird dieser wieder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wobei der frühere kleinere Abschnitt die Rolle des größeren Abschnitts übernimmt. Man kann so immer weiter fortfahren. Beweise die Behauptung.

* Wenn für 3 Größen a, b, c bzw. für 4 Größen a, b, c, d usw. zutrifft, dass $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = = c : d$ usw. gilt, dann sagten ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) und auch EUKLID z. B. in Buch VIII seiner *Elemente*, es bestehe eine συνεχὴς ἀναλογία (synechés analogía), eine *zusammenhängende, fortlaufende, beständige Verhältnisgleichung*. Wörtlich übersetzte dies ins Lateinische BOETHIUS (um 480–524/5) mit *proportionalitas continua*, ins Deutsche der Bamberger Rechenmeister Wolffgang SCHMID 1539 in seinem *Das erst buch der Geometria* mit *ein stäte unzertrente auffeinander volgende proportz*. Der Augsburger Wilhelm HOLTZMANN (1532–1576), der seinen Namen zu XYLANDER gräzisierte, sprach 1562 in seiner Euklidübersetzung (Buch V, Definition 10) von einer *stetigen Proportion*.
Offensichtlich stehen nach EUKLIDS Definition 3 von Buch VI die ganze Strecke, der größere und der kleinere Abschnitt in stetiger Proportion zueinander. Es nimmt daher wunder, dass EUKLID für diese Teilung einer Strecke nicht den oben angegebenen Fachausdruck benützte; stattdessen sagt er, eine Strecke *ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν* (ákron kai méson lógon temeīn), was unter Umstellung der Adjektiva mit *media et extrema ratione secare* im Mittelalter latinisiert und mit *nach dem äußeren und mittleren Verhältnis schneiden* in die deutschen Lehrbücher des 18. Jh.s einging. Immerhin nennt XYLANDER die Strecke schon recht kurz *Proportzlich zertailt*. Erst Johann Friedrich LORENZ übersetzt 1781 EUKLIDS Wendung mit *nach stetiger Proportion geschnitten*. Wann daraus die Kurzform *stetig geteilt* wurde, konnten wir nicht ermitteln.
Man darf annehmen, dass bereits die PYTHAGOREER Kenntnis von dieser Teilung hatten, die ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Konstruktion der regulären Körper war. Luca PACIOLI (um 1445–1517) beschäftigte sich mit diesen Körpern und gab wegen der Wichtigkeit dieser Teilung seiner 1498 verfassten und 1509 gedruckten diesbezüglichen Schrift, für die sein Freund LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) die Zeichnungen anfertigte, den Titel *Divina Proportione* – »Göttliches Verhältnis«. Dieser Titel mag zur späteren Mystifizierung beigetragen haben. PACIOLI selbst gibt fünf Gründe an, warum er dieses Verhältnis göttlich nennt. Einer davon ist, dass es sich genauso wenig durch rationale Größen ausdrücken läßt wie Gott durch Wörter. Ein anderer nimmt Bezug auf PLATON (438–348 v. Chr.), der in *Timaios* (55c) das Dodekaeder, das sich ja ohne dieses Verhältnis nicht konstruieren lässt, dem Äther, der quinta essentia, d.h. in christlicher Sicht der göttlichen Kraft zuordnet. Und wie PACIOLI sieht auch 1569 der französische Mathematiker, Humanist und Philosoph Petrus RAMUS (1515–1572) die bei dieser Teilung auftretenden 3 Teile als Sinnbild der Dreifaltigkeit, da sie eine »geeinte Dreiheit und eine dreiartige Einheit« bilden. Johannes KEPLER (1571–1630) spricht in einem Brief vom 12. 5. 1608 mit Hochachtung von dieser *proportio divina*. Er sieht darin eine Idee des Schöpfers, die er wegen der in Aufgabe **d** angesprochenen Eigenschaft selbst für ein Sinnbild des Ewigen hält. Die Teilung nennt er *sectio proportionalis*. Der Ausdruck *sectio divina*, d.h. göttlicher Schnitt, stammt nicht von ihm, wie oft behauptet wird. 1619 schreibt er jedoch in seiner *Harmonice mundi* – »Weltharmonik« –, dass »die heutigen [Mathematiker] sowohl den Schnitt wie auch die Proportion göttlich nennen wegen ihrer wunderbaren Natur und ihrer vielfältigen Besonderheiten«. KEPLER sagt uns aber nicht, wer diesen Ausdruck geprägt



um 1850

Dr Martin Ohm

Abb. 99.1 Martin OHM
(6.5.1792 Erlangen – 1.4.1872 Berlin)

27. Der Inder ARYABHATA I (um 476–? n. Chr.) stellt in Vers 25 des *Ganitapada* – »Abschnitt über die Rechenkunst« – seines Werks *Aryabhatiya* die folgende Aufgabe: Eine Summe A ist für einen Monat ausgeliehen und erbringt dabei den Zins x. Dieser wird anschließend zum gleichen Zinsfuß p für t Monate ausgeliehen. Der gesamte Zinsertrag hat den Wert B.

a) Wie groß ist der Zins x? Hinweis: Drücke p durch A und x aus.

b) Welchen Wert erhält man für x, wenn man die von einem späteren Kommentator hinzugefügten Werte $A = 100$, $t = 16$ und $B = 16$ einsetzt?

28. AL-CHARIZMI behandelt als Beispiele für die Gleichungstypen (B1) bis (B3) (siehe Seite 87) die folgenden Probleme:

a) *4. Problem:* Ich habe $\frac{1}{3}$ einer Sache, vermehrt um 1 Dirhem, mit $\frac{1}{4}$ der Sache, vermehrt um 1 Dirhem, multipliziert. Das Produkt ist 20 Dirhem. Wie groß ist die Sache?

b) *5. Problem:* Ich habe 10 in zwei Teile geteilt, dann jeden Teil mit sich multipliziert. Nachdem ich die entstandenen Produkte addiert hatte, ergaben sich 58 Dirhem. Wie groß sind die Teile?

c) *6. Problem:* Ich habe $\frac{1}{3}$ einer Sache mit $\frac{1}{4}$ der Sache multipliziert, das Produkt ist gleich der Sache und 24 Dirhem dazu. Wie groß ist die Sache?

29. Für die Normalform $x^2 + px + q = 0$ wird als Sonderfall von Satz 85.1 die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ angegeben. Zeige, dass sie richtig ist.*

30. Aus dem *Bidscha-ganita* – »Samen der Rechenkunst« – des indischen Mathematikers und Astronomen BHASKARA II (1115–nach 1178):

hat. Ebenso offen bleibt diese Frage bei Christian VON WOLFF (1679–1754), der die Bildung *sectio divina* in seinen *Anfangsgründen Aller Mathematischen Wissenschaften* von 1710 (Band IV, Anmerkung 155) wie folgt erklärt: »Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen/weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Section demonstriret hat.« Im 18. Jh. ist *sectio divina* dann zum stehenden Fachausdruck geworden. 1835 schreibt schließlich Martin OHM (1792–1872) in der 2. Auflage seiner *Die reine Elementar-Mathematik* recht vage: »Diese Zerteilung [...] nennt man wohl auch den goldenen Schnitt.« Wer ist »man«? Vielleicht vermischten sich bei OHM *sectio divina* mit *regula aurea*, wie die Regel vom Dreisatz früher genannt wurde. Aber schon 1839 findet sich in Johann Friedrich KROLLS *Grundriß der Mathematik für Gymnasien* die Latinisierung »sectio divina oder aurea«. Von da ab ist diese Wortschöpfung nicht mehr aufzuhalten.
Die Vorstellung, dass der goldene Schnitt ein in der ganzen Natur waltendes Ordnungsprinzip sei, demzufolge zwei in einem derartigen Verhältnis stehende Teile ein besonders wohlgefälliges Ganzes ergäben, setzte erst 1854 Adolf ZEISING (24.9.1810 Ballenstedt–27.4.1876 München), ein anhaltischer Gymnasialprofessor, in die Welt, und zwar in seinem Werk *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt.* Es gibt nämlich in der gesamten Antike bis herauf ins 19. Jh. keine einzige Quelle, die der stetigen Teilung irgendeine ästhetische Bedeutung zuerkennen würde.

* Da AL-CHARIZMI immer $A = 1$ setzte, kannst du mit Hilfe dieser Formel die Lösungsformeln angeben, die er – natürlich in Worten – für die drei Gleichungstypen (B1) bis (B3) aufstellte, ebenso seine Bedingung dafür, dass (B2) genau eine bzw. keine Lösung hat.

a) § 139: Der achte Teil einer Herde Affen, quadriert, sprang lustig in einem Walde herum, die 12 restlichen waren auf einem Hügel zu sehen, wo sie vergnügt schnatterten. Wie viele waren es im Ganzen?

b) § 140: Der fünfte Teil einer Herde weniger drei, quadriert, ging in eine Höhle; ein Affe war noch zu sehen. Wie viele waren es? – Warum verwirft BHĀSKARA II eine Lösung?

31. Aus Kapitel V der *Ars magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501 bis 1576):

a) *Aufgabe II:* Es waren einmal zwei Heerführer, von denen jeder 48 Dukaten an seine Soldaten austeilte. Einer hatte 2 Soldaten mehr als der andere. Der, der weniger Soldaten hatte, gab jedem seiner Soldaten 4 Dukaten mehr, als der andere seinen Soldaten gab. Wie viele Soldaten hatte jeder?

b) *Aufgabe III:* Zwei Vereine, von denen einer 3 Mitglieder mehr als der andere hatte, verteilten gleich viele Goldstücke an ihre Mitglieder, nämlich 93 und dazu noch so viele, wie beide Vereine Mitglieder hatten. Auf jedes Mitglied des kleineren Vereins entfielen 6 Goldstücke mehr als auf jedes Mitglied des größeren Vereins. Wie viele Mitglieder hatte jeder Verein?

Die Aufgaben 32 bis 39 stammen aus der *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von Leonhard EULER (1707 bis 1783) aus dem Jahre 1770.*

32. Ich habe zwei Zahlen, die eine ist um 6 größer als die andere, und ihr Produkt macht 91. Welches sind diese Zahlen?

33. Suche eine Zahl, dass, wenn ich von ihrem Quadrat 9 subtrahiere, so viel über 100 bleiben, als die gesuchte Zahl weniger ist als 23; welche Zahl ist es?

34. Suche zwei Zahlen, von denen eine doppelt so groß ist als die andere, die so beschaffen sind, dass, wenn ich ihre Summe zu ihrem Produkt addiere, 90 herauskommt.

1780

Abb. 101.1 Leonhard EULER (15.4.1707 Basel–18.9.1783 St. Petersburg) – Kupferstich von Samuel Gottlob KÜTNER (1747–1828) nach dem Gemälde von Joseph Friedrich August DARBES (1747–1810)

* Aufgaben I, II, IV, V, VII–X aus 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 6. – Siehe auch Seite 78.

35. Jemand kauft ein Pferd für einige Reichstaler, verkauft es wieder für 119 Reichstaler und gewinnt daran so viel Prozent, wie das Pferd gekostet hat. Nun ist die Frage, wie teuer dasselbe eingekauft worden ist.

36. Jemand kauft einige Tücher für 180 Reichstaler. Wären der Tücher für dasselbe Geld 3 Stück mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um 3 Reichstaler wohlfeiler gekommen. Wie viel Tücher sind es gewesen?

37. Zwei Gesellschafter legen in ihr Geschäft zusammen 100 Reichstaler ein. Der erste lässt sein Geld 3 Monate lang, der zweite aber 2 Monate lang stehen, und es zieht jeder mit Kapital und Gewinn 99 Reichstaler ein. Wie viel hat jeder eingelegt?

38. Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Nun sagt die erste zu der andern: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer* gelöst.« Darauf antwortete die andere: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst.« Wie viele hat jede gehabt?

39. Zwei Schnittwarenhändler verkaufen etliche Ellen Zeug**, der zweite 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Reichstaler. Der erste sagt zum zweiten: »Aus deinem Zeuge würde ich gelöst haben 24 Reichstaler«, und es antwortet der zweite: »Ich aber hätte aus deinem $12\frac{1}{2}$ Reichstaler gelöst.« Wie viele Ellen hat jeder gehabt?

3.5 Der Satz von Vieta

Wendet man für $D > 0$ die Lösungsformel von Satz 85.1 auf $x^2 + px + q = 0$ an, dann ergibt sich

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Addiert man bzw. multipliziert man diese Lösungen, dann gibt es eine Überraschung:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q} - p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p - \sqrt{p^2 - 4q})(-p + \sqrt{p^2 - 4q})}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{2} = \frac{4q}{4} = q.$$

* Ursprünglich eine ab 1271 in Tirol geprägte Silbermünze mit einem charakteristischen Doppelkreuz, ab dem 17./18. Jh. auch als Kupfermünze weit verbreitet, 1871 aus dem Verkehr gezogen.

** Zeug, aus dem althochdeutschen giziugi, bedeutet Stoff. Elle, altes Längenmaß, in Bayern 58,4 cm, in Russland 71 cm.

Ist $D = 0$, dann hat nach Satz 85.1 die einzige Lösung den Wert $-\frac{1}{2}p$. Diesen Wert erhält man aber auch formal sowohl für x_1 wie auch für x_2, wenn man in $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$ für D null setzt. Wegen dieses formal doppelten Auftretens von $-\frac{1}{2}p$ spricht man auch von einer **Doppellösung** der quadratischen Gleichung. Mit $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}p$ ergibt sich auch hier

$$x_1 + x_2 = (-\tfrac{1}{2}p) + (-\tfrac{1}{2}p) = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = (-\tfrac{1}{2}p)(-\tfrac{1}{2}p) = \tfrac{1}{4}p^2 = q \text{ wegen } D = p^2 - 4q = 0.$$

Damit haben wir für $D \geqq 0$ einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer in Normalform geschriebenen quadratischen Gleichung und ihren Lösungen gefunden. Wir merken uns:

Satz 103.1: Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$, dann gilt
$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Bemerkung: Für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 gilt dann:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Von François VIÈTE (1540–1603) stammt die 1615 postum veröffentlichte* Umkehrung dieses Satzes:

Satz 103.2: Gelten für die Zahlen p, q, x_1 und x_2 die Beziehungen $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 \cdot x_2$, dann hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Zahlen x_1 und x_2 als Lösungen.

* Der Bedeutung des Satzes wegen und um dir den Stil VIÈTES zu zeigen, bringen wir den Originaltext mit einer Übersetzung und einer modernen Umschrift. Auf Seite 71 findest du ein Faksimile des Originals.

Text VIÈTES	Übersetzung	moderne Umschrift
Propositio I.	Satz I.	Satz I.
Si $B + D$ in $A - A$ quad. aequetur B in D. A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.	Wenn $(B+D) \cdot A - A^2 = B \cdot D$ ist, dann kann A jedes der beiden B oder D sein.	Wenn $(B+D) \cdot x - x^2 = B \cdot D$, d.h., wenn $x^2 - (B+D) \cdot x + B \cdot D = 0$ ist, dann gilt $x = B \vee x = D$.
[Beispiel] 3N.–1Q. *aequetur* 2. *fit* 1N 1. *vel* 2.	3N–1Q = 2 bewirkt 1N 1 oder 2.	$3x - x^2 = 2$, d.h., $x^2 - 3x + 2 = 0$ hat zur Folge $x = 1 \vee x = 2$.

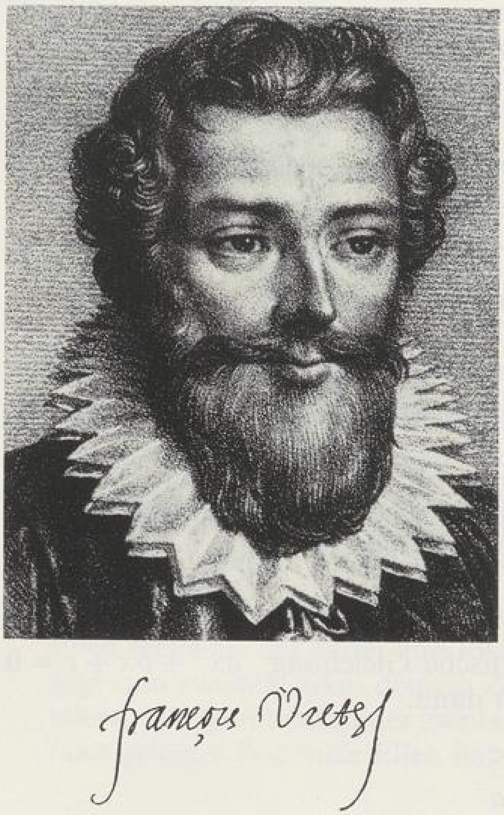
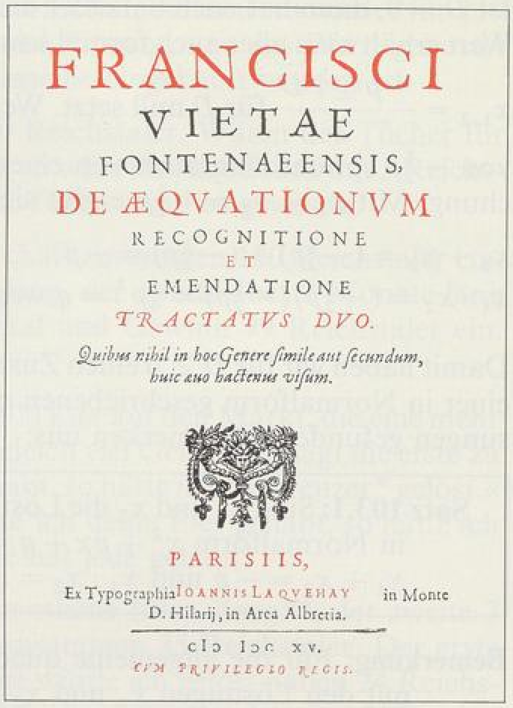


Abb. 104.1 François VIÈTE, latinisiert zu VIETA (1540 Fontenay-le-Comte/Vendée–1603 Paris)



FRANCISCI
VIETAE
FONTENAEENSIS,
DE ÆQVATIONVM
RECOGNITIONE
ET
EMENDATIONE
TRACTATVS DVO.
Quibus nihil in hoc Genere simile aut secundum, huic æuo hactenus visum.

PARISIIS,
Ex Typographia IOANNIS LAQVEHAY in Monte D. Hilarij, in Area Albretia.
clↄ Ιↄc XV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Abb. 104.2 Titelblatt der »Zwei Abhandlungen des François VIÈTE aus Fontenay über die Prüfung und Vervollkommnung von Gleichungen, worüber nichts in dieser Art Ähnliches oder Besseres diesem von Ewigkeit her bis jetzt zu Gesicht gekommen.«

Beweis: Setzt man $x_2 = -x_1 - p$ in $x_1 x_2 = q$ ein, so erhält man
$x_1(-x_1 - p) = q \Leftrightarrow -x_1^2 - px_1 = q \Leftrightarrow x_1^2 + px_1 + q = 0$;
d.h. aber, dass x_1 Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist. Ebenso weist man nach, dass x_2 diese Gleichung löst.

Bemerkung 1: Mit Hilfe dieses Satzes kann man zu zwei gegebenen Zahlen x_1 und x_2 sofort eine quadratische Gleichung in Normalform angeben, die genau diese beiden Zahlen als Lösungen hat, nämlich $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.
Bemerkung 2: Die Methode, Lösungen einer quadratischen Gleichung in Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten durch Probieren zu finden, lässt sich mit den Beziehungen von VIÈTE vereinfachen. Als ganzzahlige Lösungen kommen wegen $x_1 \cdot x_2 = q$ nur Teiler des konstanten Glieds q in Frage.

Auf Grund des einfachen Beweises von Satz 103.2 erscheint VIÈTES Erkenntnis als nicht sehr tief schürfend. Dem muss entgegengehalten werden, dass VIÈTE einen analogen Sachverhalt auch für Gleichungen höheren Grades entdeckt hat, sodass unser Satz 103.2 nur ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes ist. Zu Ehren VIÈTES werden daher die beiden letzten Sätze zusammengefasst zum

Satz 105.1: Satz von VIETA.
Bei einer quadratischen Gleichung in Normalform mit $D \geqq 0$ gilt: Die Summe der beiden Lösungen ist die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Glieds, und das Produkt der beiden Lösungen ist das konstante Glied.
Umgekehrt gilt:
Nimmt man die Gegenzahl der Summe zweier Zahlen als Koeffizienten des linearen Glieds und das Produkt dieser Zahlen als konstantes Glied einer quadratischen Gleichung in Normalform, dann sind diese Zahlen die Lösungen dieser Gleichung.

Beispiele:

1) Wie lautet eine quadratische Gleichung, deren Lösungen -3 und 5 sind?
Nach VIETA ergeben sich die Koeffizienten der Normalform zu $p = -(-3+5) = -2$ und $q = (-3) \cdot 5 = -15$. Die zugehörige Gleichung lautet also $x^2 - 2x - 15 = 0$.

2) Wie lautet eine quadratische Gleichung, deren Lösungen $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sind?
Nach VIETA ergeben sich die Koeffizienten der Normalform zu

$$p = -\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = -1 \quad \text{und}$$

$$q = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{4} = -1.$$

Die zugehörige Gleichung lautet also $x^2 - x - 1 = 0$.

3) Mit Hilfe des Satzes von VIETA sollen die Lösungen der Gleichung $x^2 - 18x + 17 = 0$ erraten werden.
Nach VIETA muss das Produkt der beiden Lösungen 17 sein. Falls es ganzzahlige Lösungen gibt, kommen nur $x_1 = -1$ und $x_2 = -17$ oder $x_1 = 1$ und $x_2 = 17$ in Frage. Die Summe der beiden Lösungen ergibt dann -18 bzw. 18. Nun ist die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Glieds 18, also gleich dem Wert der zweiten Summe. Somit besitzt die Gleichung $x^2 - 18x + 17 = 0$ die ganzzahligen Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 17$.

4) Mit Hilfe des Satzes von VIETA sollen die Lösungen der Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$ erraten werden.
Um den Satz von VIETA anwenden zu können benötigen wir die Normalform der gegebenen Gleichung. Wir dividieren durch 3 und erhalten $x^2 + x - 6 = 0$. Das Produkt der beiden Lösungen muss also -6 sein. Dafür gibt es nur die folgenden ganzzahligen Möglichkeiten:

$$(-1) \cdot 6, \quad 1 \cdot (-6), \quad (-2) \cdot 3 \quad \text{und} \quad 2 \cdot (-3).$$

Die entsprechenden Summen sind $5, -5, 1$ und -1.
Weil die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Gliedes -1 ist, sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ die Lösungen der Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$.

Eine einfache Folgerung des Satzes von VIETA ist

Satz 106.2: Der Faktorisierungssatz.
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, dann gilt

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Bemerkung: Weil $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ linear sind, sagt man auch, der quadratische Term $ax^2 + bx + c$ ist in **Linearfaktoren** zerlegt.

Beweis: Nach VIETA gilt: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, also ist

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 =$$
$$= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a \cdot \frac{c}{a} = ax^2 + bx + c.$$

Für eine Doppellösung x_0 gilt

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2.$$

Der Faktor $(x - x_0)$ tritt also doppelt auf, was erneut die Bezeichnung Doppellösung rechtfertigt.

Beispiele:

1) Der Term $3x^2 + 5x - 2$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. Dazu lösen wir die zugehörige quadratische Gleichung $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Ihre Diskriminante ergibt sich zu $D = 25 + 24 = 49$. Somit ist $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6}$, d.h. $x_1 = -2$ und $x_2 = \frac{1}{3}$. Nach dem Faktorisierungssatz erhält man also
$3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)(x - \frac{1}{3}) = (x + 2)(3x - 1)$.

2) Der Term $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3}$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. Dazu lösen wir die zugehörige quadratische Gleichung
$\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} = 0$. Ihre Diskriminante ergibt sich zu
$D = 36 - 36 = 0$.

Das ergibt die Doppellösung $x_0 = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Nach dem Faktorisierungssatz erhält man also
$\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})^2$.

Aufgaben

1. Wie lautet die Normalform einer quadratischen Gleichung mit folgenden Lösungen?

a) $x_1 = -2;\ x_2 = 3$ **b)** $x_1 = 0;\ x_2 = 5$
c) $x_1 = -8;\ x_2 = -1$ **d)** $x_1 = -3;\ x_2 = -3$
e) $x_1 = 1;\ x_2 = 2{,}5$ **f)** $x_1 = -3{,}1;\ x_2 = 7$
g) $x_1 = -4{,}3;\ x_2 = -4{,}2$ **h)** $x_1 = -\frac{1}{7};\ x_2 = \frac{2}{7}$
i) $x_1 = \frac{5}{6};\ x_2 = \frac{5}{3}$

2. Welche quadratische Gleichung in Normalform hat folgende Lösungen?

a) $x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = 4$ **b)** $x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 2\sqrt{3}$
c) $x_1 = -2{,}3;\ x_2 = 1 + \sqrt{7}$ **d)** $x_1 = 2 - \sqrt{2};\ x_2 = 1 + \sqrt{2}$
e) $x_1 = 3 + \sqrt{5};\ x_2 = \sqrt{3} + 5$ **f)** $x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

3. Bestimme den fehlenden Koeffizienten und die zweite Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn gegeben ist:

a) $p = 3;\ x_1 = 2$ **b)** $p = -5;\ x_1 = 5$ **c)** $p = 2{,}5;\ x_1 = -4$
d) $p = 9;\ x_1 = -4{,}5$ **e)** $p = 0;\ x_1 = 2{,}37$ **f)** $q = 6;\ x_1 = 4$
g) $q = 3{,}5;\ x_1 = -7$ **h)** $q = 6{,}25;\ x_1 = -2{,}5$ **i)** $q = 0;\ x_1 = 17$

4. Berechne mit Hilfe der gegebenen Lösung den unbekannten Koeffizienten und die zweite Lösung der Gleichung.

a) $2x^2 - 4x + c = 0;\ x_1 = 1$ **b)** $5x^2 + 4x + c = 0;\ x_1 = 0{,}2$
c) $0{,}1x^2 - x + c = 0;\ x_1 = -7$ **d)** $3x^2 + bx + 6 = 0;\ x_1 = 2$
e) $12x^2 + bx - 27 = 0;\ x_1 = 1{,}5$ **f)** $\frac{1}{7}x^2 + bx - \frac{1}{2} = 0;\ x_1 = -\frac{3}{2}$
g) $ax^2 + 7x - 14 = 0;\ x_1 = -2$ **h)** $ax^2 - 1{,}8x - 0{,}12 = 0;\ x_1 = -0{,}6$

5. Bestimme zu dem gegebenen Koeffizienten der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die beiden fehlenden so, dass die vorgeschriebenen Lösungen auftreten.

a) $a = 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = 5$ **b)** $a = \frac{3}{2};\ x_1 = -7;\ x_2 = -4$
c) $b = 3;\ x_1 = -4;\ x_2 = 5$ **d)** $b = 31;\ x_1 = 1{,}7;\ x_2 = 4{,}5$
e) $c = 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2$ **f)** $c = -8;\ x_1 = -2{,}8;\ x_2 = \frac{4}{7}$

6. Versuche mit Hilfe des Satzes von VIETA, die Lösungen der Gleichung zu erraten.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 15 = 0$ **c)** $x^2 - 2x - 15 = 0$
d) $x^2 + 8x + 15 = 0$ **e)** $x^2 + 10x - 11 = 0$ **f)** $x^2 - 9x + 14 = 0$
g) $2x^2 + 26x + 44 = 0$ **h)** $\frac{1}{2}x^2 - x - 12 = 0$ **i)** $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 16 = 0$

7. Zerlege die folgenden Polynome zweiten Grades in Linearfaktoren.
a) $x^2 - 4$ **b)** $x^2 - 3x + 2$ **c)** $x^2 - 3x - 40$
d) $x^2 + 3{,}5x - 15$ **e)** $x^2 - 16{,}7x + 67$ **f)** $x^2 - 2x - 6$
g) $5x^2 - 12x - 81$ **h)** $30x^2 + 73x + 33$ **i)** $25x^2 - 10\sqrt{11}x + 3$

8. Bestimme zwei Zahlen mit der Summe u und dem Produkt v.
a) $u = 3;\ v = -18$ **b)** $u = -6;\ v = 5$ **c)** $u = 14;\ v = 49$
d) $u = 13{,}4;\ v = -24$ **e)** $u = 8;\ v = 15{,}75$ **f)** $u = 6;\ v = 6$

9. Gib, ohne die Lösungen selbst zu berechnen, folgende Mittelwerte an:
a) das arithmetische Mittel der Lösungen von $2x^2 + 13x - 143 = 0$;
b) das geometrische Mittel der Lösungen von $8x^2 - 29x + 18 = 0$;
c) das harmonische Mittel der Lösungen von $9x^2 - 24x + 10 = 0$;
d) das arithmetische Mittel der Lösungen von $x^2 + x + 1 = 0$ (!).

10. Berechne das arithmetische Mittel*
a) aus den Lösungen der Gleichung $x^2 + 9x + 0{,}91 = 0$ und der Zahl 12;
b) aus den Lösungen der Gleichung $6x^2 - 45x + 53 = 0$ und den Zahlen $\frac{4}{3}$, 5 und $\frac{7}{6}$;
c) aus den Lösungen der Gleichungen $x^2 - 7x - 13 = 0$ und $3x^2 + x - 7 = 0$.

11. Bestimme k so, dass das arithmetische Mittel*
a) aus 7 und den Lösungen der Gleichung $10x^2 + kx + 10 = 0$ den Wert 3 hat;
b) aus der kleinsten und der größten zweistelligen Zahl und den Lösungen der Gleichung $kx^2 - 2{,}75x - 1{,}5 = 0$ gleich 30 ist;
c) aus den Lösungen der Gleichungen $kx^2 - 63x + 104 = 0$ und $3x^2 - kx - 30 = 0$ den Wert 2,5 hat.

•12. a) Kann man in der Gleichung $x^2 + bx + 9 = 0$ den Koeffizienten b so wählen, dass zwei Lösungen mit vorgeschriebenem arithmetischem Mittelwert m vorhanden sind? Gib die Menge aller Mittelwerte an, für welche die Aufgabe lösbar ist.
b) Wie ist die in **a** gestellte Frage bei der Gleichung $x^2 + bx - 9 = 0$ zu beantworten?

13. Welcher quadratischen Gleichung in Normalform genügen die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 4,5 und deren harmonisches Mittel 4 ist? Um welche Zahlen handelt es sich?

14. Berechne mit Hilfe einer quadratischen Gleichung die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 10,5 und deren geometrisches Mittel $6\sqrt{3}$ ist.

* Das arithmetische Mittel von n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist definiert zu $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

15. Berechne die unbekannten Koeffizienten, wenn gelten soll:

a) Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 5x + q = 0$ sollen sich um 3 unterscheiden.

b) Die Lösungen von $x^2 + px + 96 = 0$ sollen sich wie $2:3$ verhalten.

c) Die Lösungen von $0{,}2x^2 + bx + 3 = 0$ sollen auch die Gleichung $x_1 + 2x_2 = 11$ erfüllen.

16. Bestimme diejenige quadratische Gleichung in Normalform, deren Lösungen folgende Bedingungen erfüllen:

a) $x_1 + x_2 = 17$ und $x_2 - x_1 = 8$

b) $x_1 + x_2 = 24$ und $x_2 : x_1 = 5:3$

c) $x_2 - x_1 = 2$ und $x_1 : x_2 = 2:3$

17. Welche Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ erfüllt die Bedingung

a) $p = 2q$ und hat als eine Lösung -1;

b) $2p = q$ und hat als eine Lösung 2;

c) $3p = 2q - 5$ und hat als eine Lösung 1?

18. Wie lautet diejenige quadratische Gleichung in Normalform, deren Lösungen

a) die Kehrwerte der Lösungen von $6x^2 + x - 2 = 0$ sind,

b) die Quadrate der Lösungen von $2x^2 - 7x - 30 = 0$ sind,

c) jeweils um 4 größer sind als das Sechsfache der entsprechenden Lösungen von $3x^2 - 4x - 15 = 0$?

19. a) Was für eine Beziehung besteht zwischen den Lösungen einer Gleichung der Form $x^2 + px + 1 = 0$?

b) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind reziprok zueinander. Was kann man über die Koeffizienten a und c dieser Gleichung sagen?

•**20.** Bestimme zur Gleichung $x^2 + 5x + 2 = 0$ ohne Berechnung der Lösungen eine zweite quadratische Gleichung $y^2 + py + q = 0$ so, dass zwischen entsprechenden Lösungen der beiden Gleichungen folgender Zusammenhang besteht:

a) $y = x - 1$ **b)** $y = x^2 + 3$ **c)** $y = x^3 - 1$

d) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **e)** $y = \dfrac{x}{x+1}$ •**f)** $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

21. Bestimme bei den folgenden Gleichungen k so, dass zwei Lösungen vorhanden sind, die das angegebene Verhältnis besitzen.

a) $x^2 + 14x + k = 0, \quad 3:4$ **b)** $kx^2 - 6x - 21 = 0, \quad 7:(-5)$

c) $x^2 + kx + 18 = 0, \quad 2:1$ **d)** $x^2 + kx + 45k = 0, \quad (-2):3$

22. Wie lautet die Normalform einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die folgende irrationale Lösung hat? Beachte Aufgabe 97/**22a**.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $1-\sqrt{3}$ **c)** $3{,}5+\sqrt{17}$ **d)** $-3-2\sqrt{5}$

e) $0{,}6-\sqrt{0{,}7}$ **f)** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$ **•g)** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **•h)** $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$

23. Bestimme in den folgenden Gleichungen den rationalen Koeffizienten k so, dass eine Lösung der angegebenen Art existiert (r sei eine rationale Zahl). Beachte Aufgabe 97/**22a**.

a) $x^2+6x+k=0;\ r+\sqrt{7}$ **b)** $x^2-22x+k=0;\ r-4\sqrt{11}$

c) $x^2+kx-16=0;\ r+2\sqrt{5}$ **d)** $x^2+kx-0{,}25=0;\ r+\sqrt{0{,}5}$

e) $kx^2-10x-10=0;\ r-\sqrt{3}$ **f)** $kx^2+16x+120=0;\ r+6\sqrt{6}$

24. Eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten habe als eine Lösung $5-3\sqrt{2}$. Bestimme unter Beachtung von Aufgabe 97/**22a** eine Gleichung $y^2+py+q=0$, für deren Lösungen gilt:

a) $y_1=x_1+x_2$ und $y_2=x_1\cdot x_2$

b) $y_1=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ und $y_2=x_1^2+x_2^2$

⁑25. Das **Anlegen von Flächen** – Παραβαλεῖν τῶν χωρίων (parabaleīn tōn chorion) – geht auf die PYTHAGOREER zurück. Im Wesentlichen handelt es sich darum, die beiden Seiten eines Rechtecks zu bestimmen, dessen Flächeninhalt einer bestimmten Forderung unterworfen wird. Die Grundaufgabe behandelt EUKLID (um 300 v. Chr.) im 1. Buch der *Elemente* als Satz 44. Sie besteht darin, an eine gegebene Strecke b ein Rechteck so anzulegen, dass sein Flächeninhalt einem vorgegebenen Wert c gleich wird. Sie heißt daher Anlegen mit *Gleichheit* (παραβολή [parabolē], lateinisch *aequalitas*, zu Deutsch *Parabel*) und führt auf die Gleichung $bx=c$, die sich leicht durch Flächenverwandlung geometrisch lösen lässt, wie du im Geometrieunterricht lernst; dabei denkt man sich c durch die Fläche eines Quadrats dargestellt.*

Weitaus schwieriger hingegen sind die folgenden beiden Aufgaben, die EUKLID im 6. Buch als Satz 28 und 29 behandelt.** Mit diesen beiden Sätzen konnte man dann auf geometrische Weise die quadratischen Gleichungen vom Typ (B1) bis (B3) (siehe Seite 87) lösen.

a) Anlegen mit *Fehlen* (ἔλλειψις [élleipsis], lateinisch *defectus*, zu Deutsch *Ellipse*; Abbildung 111.1): An eine gegebene Strecke b ist ein Rechteck gegebenen Flächeninhalts c so anzulegen, dass ein Quadrat

* Mehr darüber noch im Abschnitt **5.2**.

** EUKLID löst die Aufgabe weitaus allgemeiner; er spricht nur von Parallelogrammen.

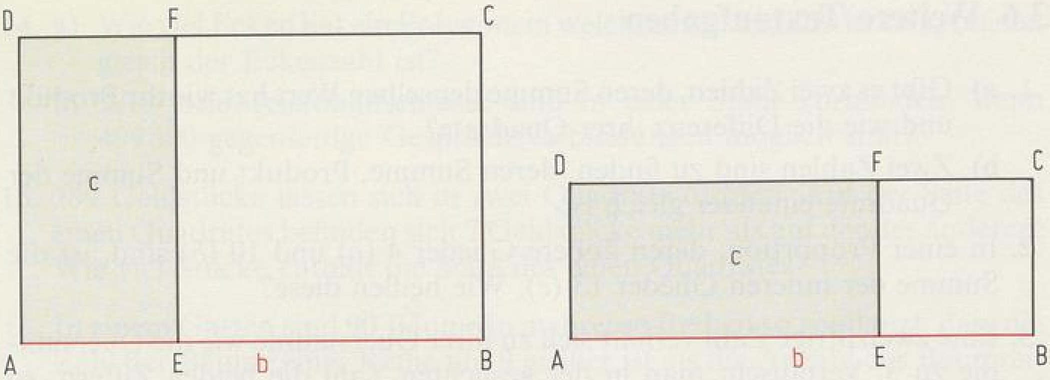


Abb. 111.1 Flächenanlegung eines Rechtecks AEFD mit Inhalt c an [AB] mit Fehlen: Das Quadrat EBCF fehlt zum Rechteck ABCD.

zum Rechteck gleicher Breite über ganz b fehlt. Zeige, dass die einer Rechtecksseite gleiche Quadratseite und die andere Rechtecksseite die Lösungen einer Gleichung vom Typ (B2) sind.

b) Konstruiere die Quadratseite, für die es nach Abbildung 111.1 zwei Möglichkeiten gibt. Wähle $b = 10\,\text{cm}$ und $c = 11\,\text{cm}^2$.

c) Anlegen mit *Überschuss* (ὑπερβολή [hyperbolē], lateinisch *excessus*, zu Deutsch *Hyperbel*; Abbildung 111.2): An eine gegebene Strecke b ist ein Rechteck gegebenen Flächeninhalts c so anzulegen, dass als überschießendes Stück ein Quadrat entsteht. Zeige, dass

1) die einer Rechtecksseite gleiche Quadratseite und die negativ genommene andere Rechtecksseite die Lösungen einer quadratischen Gleichung vom Typ (B1) sind;

2) eine Rechtecksseite und die negativ genommene Quadratseite, die der anderen Rechtecksseite gleich ist, die Lösungen einer Gleichung vom Typ (B3) sind.

d) Konstruiere für $b = 10\,\text{cm}$ und $c = 11\,\text{cm}^2$

1) die Quadratseite gemäß **c 1**,

2) die Rechtecksseite gemäß **c 2**.

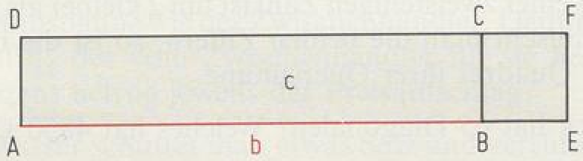


Abb. 111.2 Flächenanlegung eines Rechtecks AEFD mit Inhalt c an [AB] mit Überschuss: Das Quadrat BEFC schießt über das Rechteck ABCD hinaus.

3.6 Weitere Textaufgaben

1. a) Gibt es zwei Zahlen, deren Summe denselben Wert hat wie ihr Produkt und wie die Differenz ihrer Quadrate?
   b) Zwei Zahlen sind zu finden, deren Summe, Produkt und Summe der Quadrate einander gleich ist.
2. In einer Proportion, deren äußere Glieder 4 (a) und 10 (b) sind, ist die Summe der inneren Glieder 13 (c). Wie heißen diese?
3. Eine zweiziffrige Zahl verhält sich zu ihrer Quersumme wie die Quersumme zu 3. Vertauscht man in der gesuchten Zahl die beiden Ziffern, so entsteht eine um 45 größere Zahl.
4. Aus einer gewissen zweistelligen Zahl wird durch Umstellen ihrer Ziffern eine neue Zahl gebildet. Die Summe der beiden Zahlen hat den Wert 165, ihr Produkt den Wert 6786.
5. Welche Zahl muss man von a subtrahieren und zu a addieren, sodass die Summe der Quadrate der beiden Ergebnisse wieder a ergibt? Für welche a gibt es Lösungen? Wann gibt es nur eine Lösung und wie heißt sie? Welche Lösungen gibt es für $a = 0{,}01$?
6. Man addiert zu einer Zahl 42 und man subtrahiert von derselben Zahl 42. Der Quotient Summe durch Differenz ergibt 12,5 % der Zahl. Wie heißt sie?
7. Bestimme zu a eine Zahl x so, dass das arithmetische Mittel der Zahlen $a+x$, $a-x$, ax und $\frac{a}{x}$ wieder a ist.
8. Aus einer dreistelligen Zahl (erste Zahl) bildet man eine zweite Zahl, indem man die Einerziffer wegnimmt und vor die beiden anderen Ziffern setzt. Vor die drei Ziffern der zweiten Zahl schreiben wir noch eine 1 und erhalten so eine dritte Zahl. Wie heißen die drei Zahlen, wenn das Produkt aus der ersten und zweiten den Wert 655 371 hat und die dritte Zahl um 946 größer als die erste ist?
9. Die Wurzel aus einer zweistelligen Zahl ist um 2 kleiner als die Quersumme der Zahl. Vertauscht man die beiden Ziffern, so ist die neue Zahl um 3 größer als das Quadrat ihrer Quersumme.
10. Welches Vieleck hat 65 Diagonalen? Welches hat 4850 Diagonalen?
11. Bei einem Schachturnier spielt jeder gegen jeden. Wie viele Spieler nahmen teil, wenn 253 Partien gespielt wurden?
12. Auf einem Blatt mit vielen Geraden zählt man 153 Schnittpunkte. Wie viele Gerade sind es mindestens?
13. Auf einem Blatt sind eine Vielzahl von Punkten markiert. Man zeichnet 990 Gerade, die je zwei Punkte verbinden. Wie viele Punkte sind es mindestens?

14. **a)** Wie viel Ecken hat ein Polygon, in welchem die Anzahl der Diagonalen gleich der Eckenzahl ist?

b) Wie viele Telefonanschlüsse sind in einer Stadt vorhanden, wenn 499 500 gegenseitige Gesprächsverbindungen möglich sind?

15. 289 Geldstücke lassen sich in zwei Quadrate ordnen. Auf der Seite des einen Quadrates befinden sich 7 Geldstücke mehr als auf der des anderen. Wie viel Stücke enthält die Seite des einen Quadrates?

16. In einem Garten sind 90 Bäume in mehreren Reihen so gepflanzt, dass die Zahl der Bäume einer Reihe um 9 größer ist als die Anzahl der Baumreihen. Wie viel Reihen sind es, und wie viel Bäume stehen in einer Reihe?

17. In einer Familie ist der Sohn um 5 Jahre älter als die Tochter. Das Alter des Vaters verhält sich zu dem des Sohnes wie das Alter des Sohnes zu demjenigen der Tochter. In drei Jahren wird der Vater dreimal so alt sein wie Sohn und Tochter zusammen. Wie alt sind Vater, Sohn und Tochter heute?

18. Auf einem Konto lagen zu Beginn eines Jahres 800 €. Am Jahresende wurden die Zinsen nicht abgehoben. Im darauf folgenden Jahr gewährte die Bank einen um $\frac{1}{2}$% höheren Zinssatz. Beim Jahresabschluss ergab sich mit den Zinsen ein Kontostand von 861,12 €. Wie hoch war demnach der Zinsfuß im 1. bzw. 2. Jahr?

19. Jemand nimmt ein Darlehen von 3000 € zu 6 % auf und verpflichtet sich es durch regelmäßig zu zahlende Raten von 120 € wiederzuerstatten. Mit einer Rate wird jeweils zunächst der seit der letzten Zahlung angefallene Zins beglichen; der Rest dient zur Tilgung. Nach dem Einzahlen der 2. Rate berechnet sich die Restschuld zu 2878,80 €.
Wie viel Monate beträgt demnach die Zeit zwischen 2 aufeinander folgenden Ratenzahlungen?

20. Ein Zwischenhändler bezieht eine Ware direkt von der Fabrik und gibt sie an den Einzelhandel weiter. Dabei verlangt er einen Preis, der um einen bestimmten Prozentsatz über seinem eigenen Einkaufspreis liegt. Der Einzelhändler veranschlagt bei der Berechnung des Endpreises eine doppelt so hohe Gewinnspanne wie der Zwischenhändler. Dadurch steigt der Preis der Ware auf $\frac{33}{25}$ des vom Zwischenhändler für sie bezahlten Betrages. Wie viel Prozent betrug jeweils der Preisaufschlag?

21. In 600 cm^3 Wasser schüttet man etwas Salz und verrührt. Da die Lösung noch zu schwach ist, gibt man noch einmal 15 g Salz dazu. Dadurch steigt die Konzentration der Lösung um $2\frac{1}{4}$%. Wie viel Gramm Salz wurden zuerst in das Wasser geschüttet?

22. In einem Glas Wasser löst man einen Esslöffel voll Zucker. Durch die Zugabe von weiteren 20 g Zucker erhöht sich die Konzentration der Lösung um 5 %. Da die Lösung nun aber zu konzentriert ist, verdünnt man wieder mit 95 cm^3 Wasser. Nun beträgt der Zuckergehalt 8 %. Wie viel

Wasser befand sich anfangs im Glas und wie viel Zucker wurde mit dem Löffel dazugegeben?
(*Anmerkung:* Sind x Gramm und y Gramm die gesuchten Größen, so empfiehlt sich eine Vereinfachung des Gleichungssystems durch die Substitution $z = x + y$.)

23. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen kürzeste und längste Seite sich um 8 cm unterscheiden, beträgt 3 dm. Berechne die Dreiecksseiten.

24. In einem rechtwinkligen Dreieck von 36 mm Höhe ist die Hypotenuse 78 mm lang. In welchem Verhältnis wird letztere durch den Höhenfußpunkt geteilt?

25. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt der Längenunterschied der Katheten 5 cm und derjenige der Hypotenusenabschnitte 7 cm. Berechne die Seiten.

26. In welchen rechtwinkligen Dreiecken ist die Höhe um 5 mm länger als das Doppelte des kleinen Hypotenusenabschnittes und um 30 mm kürzer als der größere Hypotenusenabschnitt?

27. Ein rechtwinkliges Dreieck mit 14 cm Umfang hat 7 cm^2 Inhalt. Berechne die Seiten.

28. In einem Drachenviereck mit 2 rechten Winkeln sind die Diagonalen 48 mm und 60 mm lang. In welche Abschnitte wird die längere durch den Diagonalenschnittpunkt zerlegt?

29. Welche Rechtecke haben folgende Eigenschaft:
Wird die erste Seite um die Hälfte der zweiten verlängert und die zweite um die Hälfte der ersten verkürzt, so nimmt der Umfang um 8 cm und die Fläche um 67 cm^2 zu.

30. In einer Ecke eines eingezäunten rechteckigen Grundstücks wurde ein rechteckiger Gemüsegarten von 120 m^2 angelegt. Zu seiner Abgrenzung wurden noch einmal 23,5 m Maschendraht benötigt. Berechne Länge und Breite.

31. Zum Einzäunen eines rechteckigen Gartens von 540 m^2 Fläche, der auf einer Seite von einer Hauswand begrenzt ist, waren 30 Pfosten notwendig. Die Pfosten wurden in Abständen von je 3 m aufgestellt; der erste und der letzte Pfosten standen unmittelbar an der Hauswand. Berechne Länge und Breite des Gartens.

32. In einen Kreis vom Radius r wird eine Sehne der Länge $\frac{5}{6}r$ eingezeichnet. In welche Abschnitte zerlegt sie den zu ihr senkrechten Durchmesser?

33. In einem Kreis mit $r = 7$ cm ist durch einen Punkt P, der vom Mittelpunkt 4,2 cm entfernt ist, eine Sehne von 13 cm Länge gezogen. In welche Abschnitte wird die Sehne durch P zerlegt?

34. Durch zwei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 13$ mm und $r_2 = 37$ mm soll eine Gerade so gelegt werden, dass die Kreise auf ihr Sehnen ausschneiden, deren Längenunterschied 6 cm beträgt. Welchen Abstand vom Mittelpunkt muss die Gerade haben?

35. Um die Punkte M_1 und M_2, deren Abstand 1 cm beträgt, sind Kreise mit den Radien $r_1 = 2$ cm und $r_2 = 1$ cm geschlagen. Senkrecht zur Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte verläuft eine Sekante so, dass die vom 1. Kreis auf ihr ausgeschnittene Sehne durch die Schnittpunkte mit dem 2. Kreis in 3 gleiche Teile zerlegt wird. Welche Abstände hat die Sekante von M_1 und M_2? Wie lang sind die ausgeschnittenen Sehnen?

36. 2 Punkte A und B haben einen Abstand von 7 cm. Um A wird ein Kreis mit $r = 5$ cm geschlagen und durch B eine Sekante gezogen, auf welcher der Kreis eine Sehne der Länge r ausschneidet. Welche Abstände haben die Endpunkte der Sehne von B?

37. Um welche Strecke x muss man den Durchmesser eines Kreises mit Radius r verlängern, damit die vom Endpunkt aus an den Kreis gezogene Tangentenstrecke die Länge **a)** x, **b)** nx, **c)** r, **d)** nr hat?

38. Eine Strecke der Länge 10 wird so geteilt, dass sich das kleinere Stück zum größeren so verhält wie dieses zur ganzen Strecke. Wie lang ist das größere Stück? (Goldener Schnitt)

39. Einem Kreis ist ein Drachenviereck so einbeschrieben, dass die Diagonalen die Längen 15 und 17 haben. Wie groß ist der Radius? In welche Teilstücke zerlegt der Diagonalenschnittpunkt die Diagonalen?

40. Von einem Würfel schneidet man parallel zu einer Seitenfläche zuerst eine Scheibe von 2 cm Dicke ab und darauf durch einen senkrecht zum ersten verlaufenden zweiten Schnitt noch einmal eine Scheibe von 1 cm Dicke. Es ergibt sich ein Restkörper von 412 cm² Oberfläche. Um wie viel cm³ wurde der Rauminhalt verkleinert?

41. Die Entfernung München–Köln beträgt in Luftlinie 460 km. Von München fliegt ein Flugzeug nach Köln. Es legt in 1 Stunde 540 km zurück. Ihm begegnet ein Flugzeug, das zur gleichen Zeit in Köln startete. Wäre jedes der beiden Flugzeuge um 20 km/h schneller geflogen, so hätte die Begegnung $1\frac{1}{4}$ Minuten früher stattgefunden. Welche Geschwindigkeit hat das zweite Flugzeug, und nach welcher Flugzeit erfolgte die Begegnung?

42. Zwei Verkehrsflugzeuge, die im Gegenverkehr auf der Strecke Frankfurt–London eingesetzt sind, starten gleichzeitig und fliegen normalerweise mit gleicher Geschwindigkeit. An einem gewissen Tag wird jedoch von London aus eine Maschine eingesetzt, die eine um 60 km/h höhere Reisegeschwindigkeit entwickelt, während das in Frankfurt startende Flugzeug wegen Gegenwind seine Normalgeschwindigkeit um 30 km/h unterschreitet. Die Flugzeuge begegnen sich 1 Minute früher als sonst und an einem Ort, der vom gewöhnlichen Treffpunkt 26,25 km entfernt ist. Berechne die

Geschwindigkeiten der Flugzeuge und den Luftweg von Frankfurt nach London.

43. Ein Flugzeug konnte seine Flugzeit für eine 960 km lange Strecke um 10 Minuten verringern, indem es seine Geschwindigkeit um 24 km/h steigerte. Wie groß war dann die Geschwindigkeit, und wie lange dauerte der Flug?

44. Ein die 24 km lange Seestrecke von A nach B fahrendes Schiff sollte laut Fahrplan um 16.30 Uhr in B eintreffen. Da sich die Abfahrt in A um 15 Minuten verzögerte, erhöhte das Schiff seine Geschwindigkeit um 4 km/h. Es traf um 16.33 Uhr in B ein. Wie groß war seine Geschwindigkeit? Wann hätte es nach dem Fahrplan in A abfahren sollen?

45. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Körper mit gleicher konstanter Geschwindigkeit vom Scheitel weg. Der erste startet im Scheitel, der zweite 10 s später im Abstand 10 m vom Scheitel. 20 s nach dem Start des ersten Körpers haben die beiden Körper eine Entfernung von 20 m. Welche Geschwindigkeit haben sie?

46. Zwei Schiffe, A und B, fahren Kurs NO bzw. NW mit konstanten Geschwindigkeiten. A ist 2 kn schneller als B. 1 sm (= 1,852 km) hinter A kreuzt B die Bahn von A. Eine halbe Stunde später beträgt ihre Entfernung 10 sm. Wie viele kn (1 kn = 1 sm/h) betragen ihre Geschwindigkeiten?

47. Auf einer Strecke von 450 m macht das Vorderrad eines Wagens 120 Umdrehungen mehr als das Hinterrad; das Vorderrad eines anderen Wagens, dessen Räder je 0,5 m mehr Umfang haben, macht auf derselben Strecke 75 Umdrehungen mehr als sein Hinterrad. Welchen Umfang haben die Räder des ersten Wagens?

48. In einer Gasmenge, deren Volumen konstant gehalten wurde, stieg der Druck um 160 hPa, während sich die Temperatur um 60 K erhöhte. Als danach das Gas in Eiswasser auf 0 °C abgekühlt wurde, ging der Druck wieder um 232 hPa zurück. Wie groß waren am Anfang Druck und Temperatur?

49. Ein 1 m langes Glasrohr (innerer Durchmesser etwa 3 mm) wird 52 cm tief senkrecht in Petroleum ($\varrho = 0{,}8\ \text{g/cm}^3$) getaucht. Dann wird die obere Öffnung luftdicht verschlossen und das Rohr aus der Flüssigkeit gehoben. Welche Höhe hat die im Rohr zurückbleibende Flüssigkeitssäule, wenn der äußere Luftdruck 1000 hPa beträgt?

50. Bei einem Luftdruck von 960 hPa wird ein einseitig verschlossenes Rohr von 50 cm Länge (innen!) mit der Öffnung nach unten senkrecht in Wasser getaucht. Die Rohröffnung befindet sich im Endzustand 2,5 m unter dem Wasserspiegel. Wie weit ist dann das Wasser von unten her in das Rohr eingedrungen? (Luft- und Wassertemperatur sollen als gleich angenommen werden).

3.7 Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Es gibt Gleichungen, die sich durch geeignete Umformungen auf quadratische zurückführen lassen. Einige der wichtigsten Typen wollen wir im Folgenden betrachten.

3.7.1 Wurzelgleichungen

Wie in **2.5** gezeigt, kann man Wurzelgleichungen durch das Verfahren »Isolieren – Quadrieren« lösen. In der Definitionsmenge der Wurzelgleichung ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, wenn beide Seiten gleiches Vorzeichen haben; andernfalls muss man die Probe machen, weil womöglich die Lösungsmenge vergrößert wurde. Kennt man die Definitionsmenge nicht, dann muss man die Probe auf alle Fälle machen.

Beispiel 1:

$5\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x-5}; \qquad D = [\tfrac{5}{3}; +\infty[$

$\Rightarrow\ 25(x-1) + 4(2x+5) - 20\sqrt{(x-1)(2x+5)} = 3x - 5$

$-20\sqrt{2x^2+3x-5} = -30x$

$2\sqrt{2x^2+3x-5} = 3x.$ Wir erkennen, x kann nicht negativ sein.

$4(2x^2+3x-5) = 9x^2$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$x_1 = 10;\ x_2 = 2$

Probe:

$x_1 = 10$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{LS} & = 5\sqrt{10-1} - 2\sqrt{2\cdot 10+5} = 5\cdot 3 - 2\cdot 5 = 5 \\ \text{RS} & = \sqrt{3\cdot 10 - 5} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ 10 ist Lösung.}$$

$x_2 = 2$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{LS} & = 5\sqrt{2-1} - 2\sqrt{2\cdot 2+5} = 5\cdot 1 - 2\cdot 3 = -1 \\ \text{RS} & = \sqrt{3\cdot 2 - 5} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ 2 ist keine Lösung.}$$

Lösungsmenge $L = \{10\}$

Beispiel 2:

Aufgabe IX aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):

Zerlege die Zahl 10 so in zwei Teile, dass der größere, vermindert um das Doppelte seiner Wurzel, gleich ist dem kleineren, vermehrt um das Doppelte seiner Wurzel.

Bezeichnen wir den größeren Teil mit x, dann muss gelten:

$x - 2\sqrt{x} = (10 - x) + 2\sqrt{10 - x}; \quad D = [0; 10]$

$\sqrt{10 - x} = (x - 5) - \sqrt{x}$

$\Rightarrow 10 - x = (x - 5)^2 - 2(x - 5)\sqrt{x} + x$

$2(x - 5)\sqrt{x} = (x - 5)^2 + 2x - 10$

$(x - 5)(2\sqrt{x} - (x - 5) - 2) = 0$

$(x - 5)(2\sqrt{x} - x + 3) = 0$

$\underline{x = 5} \vee 2\sqrt{x} = x - 3.$ Für $x \geqq 3$ gilt weiter:

$$4x = x^2 - 6x + 9$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$(x - 9)(x - 1) = 0$$
$$\underline{x = 9}$$

Beachte: $x - 1$ kann nicht null werden, da $x \geqq 3$ gilt.

Probe:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5\text{: LS} = 5 - 2\sqrt{5} \\ \quad\text{RS} = (10 - 5) + 2\sqrt{10 - 5} = 5 + 2\sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{5 ist keine Lösung.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 9\text{: LS} = 9 - 2\sqrt{9} = 9 - 6 = 3 \\ \quad\text{RS} = (10 - 9) + 2\sqrt{10 - 9} = 1 + 2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{9 ist Lösung.}$$

Die gesuchte Zerlegung lautet also: $10 = 9 + 1$.

Beispiel 3:

$\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} = 2\sqrt{a - b}$; $D = [0; a]$ für $a \geqq 0$; für $a < 0$ ist die Gleichung unsinnig. Wegen $a - b \geqq 0$ muss $b \leqq a$ sein. Für $x \in D$ sind beide Seiten nicht negativ und wir ändern die Lösungsmenge beim Quadrieren nicht:

$a + x + a - x - 2\sqrt{a^2 - x^2} = 4(a - b)$

$2b - a = \sqrt{a^2 - x^2}$

Für $a > 2b$ gibt es keine Lösung. Für $0 \leqq b \leqq a \leqq 2b$ erhält man durch Quadrieren der letzten Gleichung (Äquivalenzumformung!):

$4b^2 + a^2 - 4ab = a^2 - x^2$

$x^2 = 4b(a - b)$

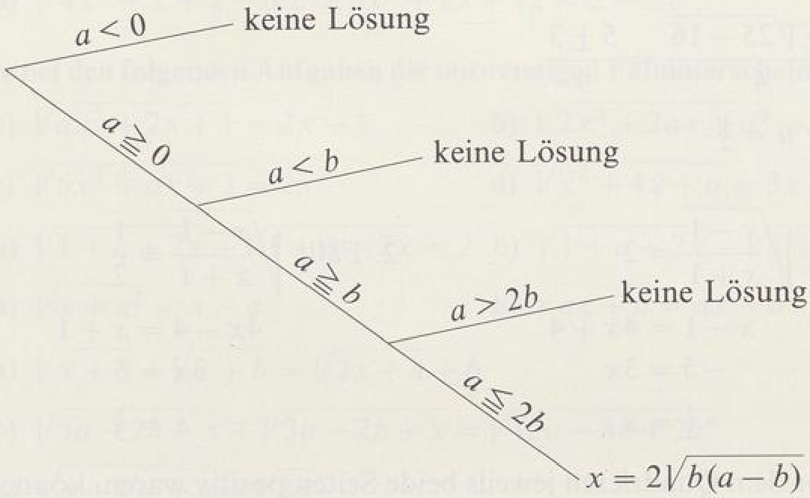
Die rechte Seite ist unter unseren Voraussetzungen sicher nicht negativ, also ergibt sich

$|x| = 2\sqrt{b(a-b)}$

Wegen $x \in D$ ist $x \geqq 0$, und es gilt schließlich

$x = 2\sqrt{b(a-b)}$.

Einen Überblick über die betrachteten Fälle gibt der Lösungsbaum:



Manchmal ist es von Vorteil, eine Wurzel durch eine neue Variable zu ersetzen und die Gleichung mit der neuen Variablen zu lösen. Eine solche Ersetzung heißt **Substitution***.

Beispiel 4:

$2x - 5\sqrt{x} - 12 = 0$ Substitution: $u := \sqrt{x}$

$2u^2 - 5u - 12 = 0$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$u = 4 \vee u = -\frac{3}{2}$.

Um x zu erhalten machen wir die Substitution rückgängig. Die letzte Zeile liefert die beiden Gleichungen

$\sqrt{x} = 4 \vee \sqrt{x} = -\frac{3}{2}$.

Die zweite ist widersprüchlich, die erste liefert $x = 16$.

Also: $L = \{16\}$

* substituere (lat.) = an die Stelle einer Person oder Sache setzen

Beispiel 5:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\frac{5}{2}=0 \qquad \text{Substitution: } u:=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$u+\frac{1}{u}-\frac{5}{2}=0$$

$$2u^2-5u+2=0$$

$$u=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$u=2 \vee u=\tfrac{1}{2}$$

1. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=2$

$$x-1=4x+4$$
$$-5=3x$$
$$-\tfrac{5}{3}=x$$

2. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{1}{2}$

$$4x-4=x+1$$
$$3x=5$$
$$x=\tfrac{5}{3}$$

Weil vor dem Quadrieren jeweils beide Seiten positiv waren, können wir auf die Probe verzichten; es gilt also $L=\{\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\}$.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{11-5x}=3-x$ **b)** $\sqrt{3x+7}+x=7$

2. a) $\sqrt{4x-15}=3-x$ **b)** $\sqrt{2x+3}=x+1$

3. a) $\sqrt{2x+9}+x+3=2\sqrt{2x+9}$ **b)** $3\cdot\sqrt{3x+1}-2x=6-\sqrt{3x+1}$

4. a) $\sqrt{4x+3}-3=3x-2\sqrt{3+4x}$

b) $2\sqrt{19+5x}-2x+4\sqrt{5x+19}=\sqrt{5x+19}+22$

5. a) $\sqrt{5x^2+2x+6}=x+4$ •**b)** $\sqrt{x^2-3x+3}=4x+7$

6. a) $\sqrt{12x^2+20x+3}=4x+2$ **b)** $\sqrt{3x^2-16x+3}=3x-2$

7. a) $\sqrt{2x+1}+2=2\sqrt{x+9}-3$ **b)** $\sqrt{2x+1}+2=3-2\sqrt{x+9}$

8. a) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{5-4x}=4$ **b)** $2-3\sqrt{x+2}=2\sqrt{2x+3}-3$

9. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+10}$ **b)** $\sqrt{5x-1}-2\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}$

10. a) $\sqrt{x+2}+2\sqrt{x}-\sqrt{13x+3}=0$ **b)** $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-5}-2\sqrt{2-x}=0$

11. a) $\sqrt{x+4+\sqrt{3x-5}}=3$ **b)** $\sqrt{\sqrt{x-15}+1}-x=4$

12. a) $\sqrt{7{,}5+x-\sqrt{5+4x}}=2{,}5$ **b)** $\sqrt{3+\sqrt{3-2x}}+x=2$

13. a) $\sqrt{2x+5+\sqrt{x^2+3x+3}}=2$ **b)** $\sqrt{\sqrt{3x^2+5x-1}-1}-0{,}5x=0{,}5$

14. a) $\sqrt{x^2+2+\sqrt{7-6x}}+x=1$

b) $\sqrt{4x^2-x+2-0{,}2\cdot\sqrt{5x^2+8x+12}}=2-2x$

Führe bei den folgenden Aufgaben die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

•**15. a)** $\sqrt{ax^2+2x+1}=2x-1$ **b)** $\sqrt{2x^2+2ax+a^2}=x+2a$

c) $\sqrt{5x^2+ax+3}=2x$ **d)** $\sqrt{x^2+4x+a}=3x+2$

•**16. a)** $\sqrt{1+a+2x}+\sqrt{1+a-2x}=2$ **b)** $\sqrt{1+a+2x-\sqrt{1+a-2x}}=2$

••**17. a)** $\sqrt{x+a^2}=x-a$ **b)** $\sqrt{ax+a}=ax-a$

•**18. a)** $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{2x+a+b}$

b) $\sqrt{3a-2b-x}+\sqrt{3a-2b+x}=\sqrt{12a-8b+2x}$

•**19. a)** $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=\sqrt{2x}$

••**b)** $\sqrt{\sqrt{a^2x^2+abx+b^2}-ax}=\sqrt{ax+b}$

20. Angeregt durch die *Practica Arithmeticae et Mensurandi singularis* – »Einzigartige Handhabung der Arithmetik und des Messens« – des Geronimo Cardano (1501–1576) aus dem Jahre 1539 stellte Michael Stifel (1487? bis 1567) in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – 1544 folgende Aufgabe:
Ein Spieler gewinnt am 1. Tag so viel, wie er hatte, am 2. Tag die Quadratwurzel aus dem Ganzen und dazu noch 2 Gulden, am 3. Tag das Quadrat dessen, was er am 2. Tag hatte, sodass er schließlich 5550 Gulden besaß. Wie viel hatte er anfangs?

21. Aufgabe IV aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo Cardano (1501–1576):
Addiert man zu einer Zahl das Doppelte ihrer Wurzel und dazu die doppelte Wurzel dieser Summe, dann erhält man 15. Wie heißt diese Zahl?*

22. a) $x-2\sqrt{x}+1=0$ **b)** $x+5\sqrt{x}=14$ **c)** $3\sqrt{x}=-2-x$

23. a) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}=3$ **b)** $\sqrt{\dfrac{7x^2+2x}{2-x^2}}=2+3\sqrt{\dfrac{2-x^2}{7x^2+2x}}$

* In der Originalaufgabe von Cardano steht 10 statt 15. Wer Mut hat, rechne die Aufgabe mit diesem Wert.

24. **a)** $2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+5=3\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ **b)** $\dfrac{7\sqrt{\frac{x+1}{x}}+5}{7\sqrt{\frac{x}{x+1}}-5}=6$

25. Aus dem *liber abaci* (1202) des Leonardo von Pisa (um 1170 – nach 1240):

a) $x-(\frac{7}{12}x+4)=\sqrt{x}$ **b)** $3x+4\sqrt{x^2-3x}=20$

c) $3x+4\sqrt{x^2-3x}=x^2+4$ **d)** $x^2=\sqrt{6x}\sqrt{5x}+10x+20$

26. Aus *Lilavati* – »Die Schöne« – von Bhāskara II (1115 – nach 1178):

a) § 67: Ardschuna, Prithas Sohn, im Kampf gereizt, schoss einen Köcher Pfeile um Karna zu töten. Mit der Hälfte seiner Pfeile parierte er die seines Gegners, mit dem Vierfachen der Wurzel seines Köcherinhalts tötete er dessen Pferde, mit 6 Pfeilen Salya, und mit 3 Pfeilen zerstörte er Schirm, Standarte und Bogen, mit einem schließlich trennte er den Kopf seines Feindes vom Rumpf. Wie viele Pfeile ließ Ardschuna fliegen?

b) § 68: Die Wurzel aus der Hälfte eines Bienenschwarms flog zu einem Jasminbusch. $\frac{8}{9}$ des Schwarms blieben im Stock. Ein Weibchen schließlich umschwirrte eine Lotosblume, in der ein Männchen gefangen saß, das vom Duft zur Nachtzeit angelockt worden war*. Sag mir, wunderschöne Frau, die Anzahl der Bienen!

c) § 69: Eine Zahl, vermehrt um ihr Drittel und um das 18fache ihrer Wurzel, ergibt 1200. Wie heißt die Zahl?

3.7.2 Die biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^4+bx^2+c=0$ mit $a \neq 0$ lässt sich durch die Substitution $u := x^2$ auf eine quadratische Gleichung der Form $au^2+bu+c=0$ zurückführen. Weil $u^2=(x^2)^2$ ist, nennen wir und auch andere Autoren eine solche Gleichung **biquadratisch****. Gleichungen dieser Art lösten bereits die Babylonier im Zusammenhang mit Gleichungssystemen (siehe **3.8**). Die folgenden zwei Beispiele stammen aus Kapitel I der *Ars magna* (1545) des Geronimo Cardano (1501–1576).

* Der Lotos öffnet sich nachts und schließt sich bei Tage.

** *bis* (lat.) = *zweimal, auf doppelte Weise.* – Bei Descartes (1596–1650) findet man 1628/29 *biquadratum* an Stelle von *quadratumquadratum* zur Bezeichnung der 4. Potenz, bei Christian von Wolff (1679 bis 1754) in seinen *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710 den Ausdruck *biquadratische Aequation* als Bezeichnung für eine allgemeine Gleichung 4. Grades, also eine Gleichung der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, wie es auch heute noch bei manchen Autoren üblich ist. In der 2. Auflage erfolgte dann die Eindeutschung *biquadratische Gleichung*.

Beispiel 1:

$x^4 + 12 = 7x^2$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 - 7u + 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(7 \pm 1)$

$u = 3 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2$

$x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \vee x = -2 \vee x = 2.$

Wir erhalten eine 4-elementige Lösungsmenge: $\{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

Beispiel 2:

$x^4 + 3x^2 = 28$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 + 3u - 28 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{121}) = \frac{1}{2}(-3 \pm 11)$

$u = -7 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = -7 \vee x^2 = 4$

$x^2 = -7 \vee |x| = 2.$

Da die erste Gleichung widersprüchlich ist, erhalten wir eine 2-elementige Lösungsmenge, nämlich $L = \{\,\} \cup \{-2; 2\} = \{-2; 2\}$.

Mit einiger Übung kann man sich die Schreibarbeit der Substitution ersparen, wenn man gleich x^2 als neue Variable nimmt. Dann schreibt sich Beispiel 1 wie folgt:

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1})$

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4$, woraus man wie oben erhält

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2$, also $L = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

Manchmal lassen sich auch Gleichungen höheren Grades durch eine geeignete Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Auch hierzu wieder ein Beispiel von Geronimo CARDANO, diesmal aus Kapitel VI seiner *Ars magna*.

Beispiel 3:

$x^8 + x^4 = 12$ Substitution: $u := x^4$

$u^2 + u - 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{49}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 7)$

$u = -4 \vee u = 3.$

Somit muss gelten

$x^4 = -4 \vee x^4 = 3$ || radizieren

$x^2 = \sqrt{3}$ || radizieren

$|x| = \sqrt{\sqrt{3}}$

$x = -\sqrt{\sqrt{3}} \vee x = \sqrt{\sqrt{3}}.$

Da $x^4 = -4$ eine widersprüchliche Gleichung ist, erhält man als Lösungsmenge $\{-\sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{3}}\}$.

Aufgaben

1. Aus der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487?–1567):
a) $2x^4 = 1450 - 8x^2$ **b)** $x^4 = 18x^2 + 648$ **c)** $x^4 - 4x^2 = 2205$
d) $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 2538$ **e)** $x^8 = 214\,651\,701 - 20x^4$
f) $x^8 = 2000x^4 + 185\,076\,881$ **g)** $x^8 = 20\,000x^4 - 78\,461\,119$

2. Aus Kapitel I, VI und XXIV der *Ars magna* (1545) das Geronimo CARDANO (1501–1576):
a) $x^4 + 12 = 7x^2$ **b)** $x^4 + 12 = 6x^2$ **c)** $x^4 = 2x^2 + 8$
d) $x^4 + x^2 = 12$ **e)** $x^4 + 2x^2 = 10$

3. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ **c)** $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$
d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **e)** $x^4 - 20x^2 = 125$ **f)** $12x^4 - 81x^2 - 21 = 0$

4. a) $3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ **b)** $9x^4 + 64x^2 = -7$ **c)** $2x^4 - 11x^2 + 16 = 0$

5. a) $2x^5 - 39x^3 - 245x = 0$ **b)** $32x^4 - 82x^2 - 405 = 0$

6. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):
$(\frac{1}{3}x^2 + 1)(\frac{1}{4}x^2 + 2) = x^2 + 13$

•**7. a)** $\dfrac{9x^4 - 325x^2 + 36}{3x^2 + 17x - 6} = 0$ **b)** $\dfrac{x^6 - 16x^2}{5x^4 - 19x^2 - 4} = 0$

8. a) Beweise: Wenn die drei Koeffizienten einer biquadratischen Gleichung dasselbe Vorzeichen haben, dann ist $L = \{\}$.
b) Ist der vorausgehende Satz über biquadratische Gleichungen umkehrbar? (Vgl. Aufgabe **2a** und **4c**.)

**3.7.3 Kubische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^3+bx^2+cx+d=0$ mit $a \neq 0$ heißt **kubische Gleichung*** oder **Gleichung 3. Grades**. Wenn man eine Lösung einer kubischen Gleichung schon kennt oder errät, dann lässt sich die kubische Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Zum Nachweis folgen wir einem Gedankengang, den Geronimo CARDANO (1501–1576) in Regel 6 von Kapitel XXV seiner *Ars magna* 1545 anspricht und den François VIÈTE (1540–1603) in seinem *Tractatus de emendatione aequationum* (erschienen 1615) erweitert. Sei x_0 eine Lösung der Gleichung $ax^3+bx^2+cx+d=0$, dann gilt
$ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d=0$.
Dies verwenden wir nun um das auf der linken Seite der kubischen Gleichung stehende Polynom 3. Grades umzuformen:

$$\begin{aligned}
&ax^3+bx^2+cx+d=\\
&=ax^3+bx^2+cx+d-0=\\
&=ax^3+bx^2+cx+d-ax_0^3-bx_0^2-cx_0-d=\\
&=a(x^3-x_0^3)+b(x^2-x_0^2)+c(x-x_0).
\end{aligned}$$

Nun ist aber $x^3-x_0^3=(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)$, sodass wir im zuletzt erhaltenen Ausdruck $x-x_0$ ausklammern können. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&(x-x_0)[a(x^2+xx_0+x_0^2)+b(x+x_0)+c]=\\
&=(x-x_0)[ax^2+(ax_0+b)x+(ax_0^2+bx_0)+c]=\\
&=(x-x_0)(Ax^2+Bx+C) \quad \text{mit} \quad A:=a\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; B:=ax_0+b\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; C:=ax_0^2+bx_0+c.
\end{aligned}$$

Man erkennt, wie man, ausgehend von a, schrittweise A, B und C aufbauen kann:
$A=a, \quad B=Ax_0+b, \quad C=Bx_0+c.$
Wir halten das Ergebnis dieser Umformung fest in

> **Satz 125.1:** Ist x_0 eine Lösung der kubischen Gleichung ax^3+bx^2+ $+cx+d=0$, so lässt sich die linke Seite faktorisieren zu
>
> $$\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d=(x-x_0)(Ax^2+Bx+C)}$$
>
> mit $A=a$, $B=Ax_0+b$, $C=Bx_0+c$.

* Eine Zahl der Form a^3 heißt bei EUKLID (um 300 v. Chr.) κύβος (kýbos) = Würfel, was wohl auf die PYTHAGOREER zurückgeht. HERON von Alexandria – von seinen Lebensdaten wissen wir nur, dass er eine Mondfinsternis des Jahres 62 n. Chr. beschreibt – bezeichnet mit κύβος die 3. Potenz. Bei DIOPHANT (um 250 n. Chr.) gewinnt κύβος dann auch die Bedeutung »3. Potenz der Unbekannten«, wofür die Araber كعب (kaaba) sagen, was wieder nichts anderes als Würfel bedeutet. (So heißt heute noch das seit 703 unveränderte quaderförmige Gebäude [12 m × 10 m × 15 m] in Mekka, das Ziel der muslimischen Pilgerfahrten.) Als im 12. Jh. die arabischen mathematischen Schriften ins Lateinische übertragen wurden, übersetzte man *kaaba* wortgetreu mit *cubus*. Im *Mathematischen Lexicon* von 1716 des Christian VON WOLFF (1679–1754) erscheint der Fachausdruck **kubische Gleichung**, der 1710 in den *Anfangsgründen* noch *kubische Aequation* lautete.

Aus Satz 125.1 ergibt sich als wichtige

Folgerung: Eventuelle weitere Lösungen der kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ müssen Lösungen der quadratischen Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ sein.
Dazu

Beispiel 1: $3x^3 - 2x^2 - 23x + 30 = 0$

Durch Probieren mit den Werten 0, ± 1, ± 2 usw. findet man, dass die Zahl 2 eine Lösung ist. Also gilt $A = 3$, $B = 3 \cdot 2 - 2 = 4$ und $C = 4 \cdot 2 - 23 = -15$. Eventuelle weitere Lösungen der Gleichung $3x^3 - 2x^2 - 23x + 30 = 0$ müssen also Lösungen der quadratischen Gleichung $3x^2 + 4x - 15 = 0$ sein. Wir erhalten

$$x = \tfrac{1}{6}(-4 \pm \sqrt{196}) = \tfrac{1}{6}(-4 \pm 14)$$

$$x = -3 \vee x = \tfrac{5}{3}.$$

Wer sich nicht die Ausdrücke für A, B und C merken will, erhält den quadratischen Faktor $Ax^2 + Bx + C$ des kubischen Terms $ax^3 + bx^2 + cx + d$, indem er letzteren durch $x - x_0$ dividiert. Da der kubische Term ein Polynom und auch $x - x_0$ ein Polynom in x ist, nennt man eine solche Division **Polynomdivision**. Wie sie praktisch abläuft, zeigen wir am Polynom von Beispiel 1; dabei ist $x_0 = 2$.

Beispiel 2: Die Polynomdivision

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) : (x - 2)$

Wir beginnen mit der Division bei den Termen mit den höchsten Potenzen von x, also mit $3x^3 : x = 3x^2$.

Das Ergebnis $3x^2$ schreiben wir rechts vom Gleichheitszeichen als ersten Summanden an und multiplizieren damit den Divisor $x - 2$. Das erhaltene Produkt $3x^3 - 6x^2$ ziehen wir vom Dividendenpolynom ab. Dieses Verfahren setzen wir mit dem Restpolynom so lange fort, bis sich als Rest null ergibt:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) : (x - 2) = 3x^2 + 4x - 15 \\
\underline{-(3x^3 - 6x^2)} \\
\qquad\quad 4x^2 - 23x + 30 \\
\qquad\ \underline{-(4x^2 - \ \ 8x)} \\
\qquad\qquad\quad -15x + 30 \\
\qquad\qquad \underline{-(-15x + 30)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Beachte: Ergibt sich nicht 0 als Rest, so hast du entweder beim Probieren einen Fehler gemacht und dein x_0 ist gar keine Lösung, oder du hast dich beim Dividieren verrechnet.

Man kommt ohne Polynomdivision schneller zum quadratischen Faktor, wenn man vorher ein wenig kopfrechnet. Setzt man nämlich auf Grund der obigen Überlegungen an

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) = (x - 2)(Ax^2 + Bx + C)$

und multipliziert in Gedanken aus, so erkennt man sofort, dass $A = 3$ und $C = -15$ sein müssen. Also kann man stattdessen gleich mit dem Ansatz

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) = (x - 2)(3x^2 + Bx - 15)$

beginnen. Vergleicht man die Koeffizienten der quadratischen Glieder auf beiden Seiten – rechts muss man in Gedanken ausmultiplizieren –, so ergibt sich $-2 = -6 - 2B$, also $B = 4$,

und damit der quadratische Faktor wie oben zu $3x^2 + 4x - 15$.

Aufgaben

1. Zur Polynomdivision

a) Fehlen bei den Polynomen Glieder, so rät Michael Stifel (1487? bis 1567) in seiner *Arithmetica integra* (1544), die fehlenden Potenzen mit dem Koeffizienten null zu versehen und sie im Polynom mitzuführen, also die Division $(x^3 + 1) : (x + 1)$ in der Form $(x^3 + 0x^2 + 0x + 1) : (x + 1)$ auszuführen. Mach es und verfahre ebenso bei den folgenden Aufgaben.

b) $(x^3 - 1) : (x - 1)$ **c)** $(x^3 + 8) : (x + 2)$

d) $(8x^3 + 125) : (2x + 5)$ **e)** $(16x^4 - 81) : (2x - 3)$

2. Auf einer babylonischen Keilschrifttafel, deren einer Teil in London (BM 85200) und deren anderer in Berlin (VAT 6599) liegt, finden sich mehrere kubische Gleichungen:

a) Aufgabe 5: $z^3 + z^2 = 252$ **b)** Aufgabe 20: $z^3 + 7z^2 = 8$

3. Bei den Griechen findet sich die erste nicht geometrisch gelöste kubische Gleichung bei Diophant (um 250 n. Chr.) in Buch VI seiner Ἀριθμητικῶν βιβλία bei der Behandlung des folgenden Problems (Nr. 17):
Eine Quadratseite ist um 2 Längeneinheiten größer als die Kante eines Würfels, dessen Volumenmaßzahl aber um 2 größer ist als die Flächenmaßzahl des Quadrats. Wie groß sind Quadratseite und Würfelkante? – Diophant bezeichnete die Würfelkantenlänge mit $x - 1$. Verfahre ebenso!

4. Bei Bhāskara II (1115–nach 1178) findet sich im *Bidscha-ganita* (§ 137) die Gleichung $12x + x^3 = 6x^2 + 35$.

5. Christoff Rudolff (um 1500 Jauer/Schlesien – vor 1543 Wien?) hat 1525 in seiner *Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coß genennt werden* einige kubische Gleichungen gelöst ohne den Lösungsweg anzugeben.

a) $63 + x^3 = 10x^2$ **b)** $605 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3$ **c)** $x^3 + 75x^2 + 1875x = 27250$

Zu den Aufgaben 6 bis 10. Die größte Leistung auf dem Gebiet der kubischen Gleichungen vollbrachte Geronimo CARDANO (1501–1576), der für sie eine allgemeine Lösungsformel beweisen konnte (Näheres in *Algebra 10*). Viele Kapitel seiner *Ars magna* (1545), der mit Ausnahme von **8h** die folgenden Aufgaben entnommen sind, beschäftigen sich mit kubischen Gleichungen. Wie damals üblich schreibt CARDANO noch keine negativen Koeffizienten, sodass er den Lösungsgang für die dadurch verschiedenen möglichen Typen vorführen muss. CARDANO erkennt aber, dass eine, zwei oder drei Lösungen auftreten können, wofür er auch Fallunterscheidungen angibt.

6. a) $x^3 + 6x = 20$ **b)** $x^3 + 16 = 12x$ **c)** $x^3 = 19x + 30$

7. a) $x^3 + 22\frac{1}{2}x^2 = 98$ **b)** $x^3 + 48 = 10x^2$ **c)** $x^3 = 3x^2 + 16$

8. a) $x^3 = 3x^2 + 20x + 6$ **b)** $x^3 + 6x^2 = 20x + 56$
c) $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$ **d)** $x^3 + 9 = 6x^2 + 24x$
e) $x^3 + 6x^2 + x = 14$ **f)** $x^3 + 6x^2 + 12 = 31x$
g) $x^3 + 3x + 18 = 6x^2$ **h)*** $25 + 4x^2 + 2x^3 = 16x + 55$

9. a) $x^6 + 3x^4 = 20$ **b)** $x^6 + 3x^4 + 10 = 15x^2$

10. Bei den Gleichungen vom Typ $x^3 = px + q$ und $x^3 + q = px$ versagte gerade dann die von CARDANO bewiesene Formel, wenn – wie wir heute wissen – es 3 Lösungen gibt. Das ist der Fall, wie CARDANO entdeckte, wenn $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$ ist. Man nannte diesen Fall später **casus irreducibilis**, d. h. unzurückführbarer Fall. Im Kapitel XXV seiner *Ars magna*, das er mit *De Capitulis imperfectis et specialibus* – »Über die unvollkommenen und nur in Sonderfällen brauchbaren Regeln« – überschreibt, gibt er daher besondere Verfahren zur Lösung solcher Gleichungen an. Ihm entnehmen wir mit Ausnahme von **a)** die folgenden Gleichungen**.
a) $x^3 = 9x + 10$ **b)** $x^3 = 32x + 24$ **c)** $x^3 = 16x + 21$
d) $x^3 + 12 = 34x$ **e)** $x^3 + 18 = 19x$ **f)** $x^3 + 8 = 18x$

11. Von François VIÈTE (1540–1603) stammen aus dem
a) *Responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit* ADRIANUS ROMANUS von 1595***: $3x - x^3 = \sqrt{2}$
b) *Tractatus de aequationum recognitione* (1615 gedruckt):
1) $8x - x^3 = 7$ **2)** $9x^2 - x^3 = 8$

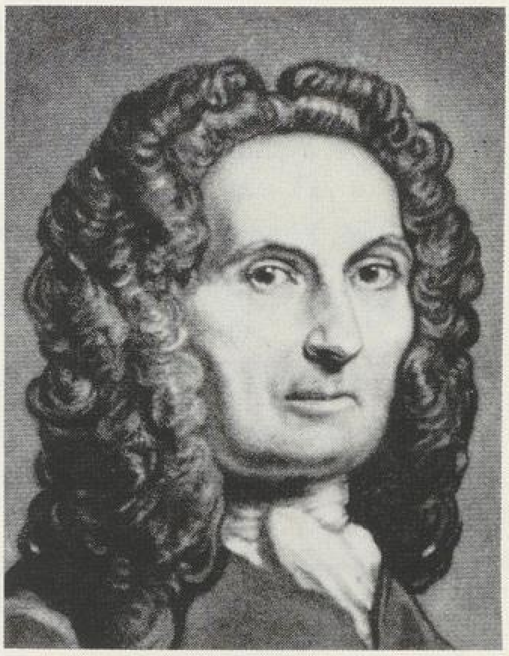
* Michael STIFEL bringt diese Aufgabe in seiner *Arithmetica integra* 1544 auf Blatt 317. Er hat sie CARDANOS *Practica Arithmeticae* von 1539 entnommen, in der sich jener auch schon mit kubischen Gleichungen beschäftigt hatte. STIFEL empfiehlt dieses Buch seinen Lesern wärmstens, rät ihnen aber, statt der umständlichen Bezeichnungen CARDANOS seine viel bequemeren zu verwenden.

** Mit der in **a** wiedergegebenen Gleichung teilte CARDANO seine Entdeckung des casus irreducibilis TARTAGLIA in einem Brief mit, den dieser am 4.8.1539 erhalten hat.

*** »Antwort auf das Problem, das ADRIAEN VAN ROOMEN [1561–1615] allen Mathematikern des ganzen Erdkreises [1593] zur Lösung stellte«. VIÈTE konnte die gestellte Gleichung 45. Grades lösen.

**3.7.4 Reziproke Gleichungen

Abraham DE MOIVRE (1667–1754) stieß bei seinen Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einen besonderen Typ von Gleichungen, den er 1711 in seiner Abhandlung *De mensura sortis* – »Über ein Maß des Zufalls« – beschrieb und für den er 1730 in seinen *Miscellanea Analytica* – »Allerlei zur Analysis« – wichtige Sätze herleitete. 1733 beschäftigte sich Leonhard EULER (1707–1783) mit diesen Gleichungen und nannte sie wegen einer wichtigen Eigenschaft, die wir gleich beweisen wollen, reziproke Gleichungen. Da sie einer Verallgemeinerung fähig sind, fügt man heute noch »1. Art« bei. Unter Benützung der von DE MOIVRE gegebenen Beschreibung legen wir also fest



1736

A. DeMoivre

Abb. 129.1 Abraham DE MOIVRE (26.5.1667 Vitry-le-François bis 27.11.1754 London) – Gemälde von Joseph HIGHMORE (1692–1780)

> **Definition 139.1:** Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 1. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten jeweils gleich sind.

Beispiele:

1) $3x^2 + 5x + 3 = 0$ Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$

} Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich, ebenso der zweite und der vorletzte.

Offensichtlich kann 0 nicht Lösung einer reziproken Gleichung sein, da der letzte Koeffizient gleich dem ersten Koeffizienten und damit ungleich null ist. Der folgende Satz macht nun den von EULER gegebenen Namen verständlich.

> **Satz 129.1:** Ist r Lösung einer reziproken Gleichung 1. Art, so ist auch der reziproke Wert $\frac{1}{r}$ Lösung dieser Gleichung.

Beweis: Der Beweis sei beispielhaft für eine Gleichung 4. Grades vorgeführt. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (mit $a \neq 0$) ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 4. Wenn r Lösung dieser Gleichung ist, dann gilt
$ar^4 + br^3 + cr^2 + br + a = 0$.
Da $r \neq 0$ ist, können wir r^4 ausklammern und erhalten

$$r^4\left(a + b\left(\frac{1}{r}\right) + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right)^3 + a\left(\frac{1}{r}\right)^4\right) = 0.$$

Da r^4 nicht null werden kann, muss die Klammer null sein. In der Klammer steht aber, von rechts nach links gelesen, der gegebene Gleichungsterm, in den an Stelle von x der Wert $\frac{1}{r}$ eingesetzt wurde. Also ist $\frac{1}{r}$ Lösung, was zu zeigen war.

Wie findet man aber nun die Lösungsmenge einer reziproken Gleichung 1. Art? Auch hier wollen wir das Wesentliche wieder anhand von Beispielen zeigen.

Beispiel 1: Der Grad der reziproken Gleichung 1. Art ist gerade.

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

Da null keine Lösung ist, dürfen wir durch x^2 dividieren und erhalten

$$6x^2 + 5x - 38 + 5 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Joseph Louis de LAGRANGE (1736–1813) schlug 1770 die Substitution

$$x + \frac{1}{x} =: z \text{ vor.}$$

Durch Quadrieren erhält man $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$, sodass die letzte Gleichung übergeht in

$$6(z^2 - 2) + 5z - 38 = 0$$
$$6z^2 + 5z - 50 = 0$$
$$z = -\tfrac{10}{3} \vee z = \tfrac{5}{2}.$$

Machen wir die Substitution wieder rückgängig, dann erhalten wir

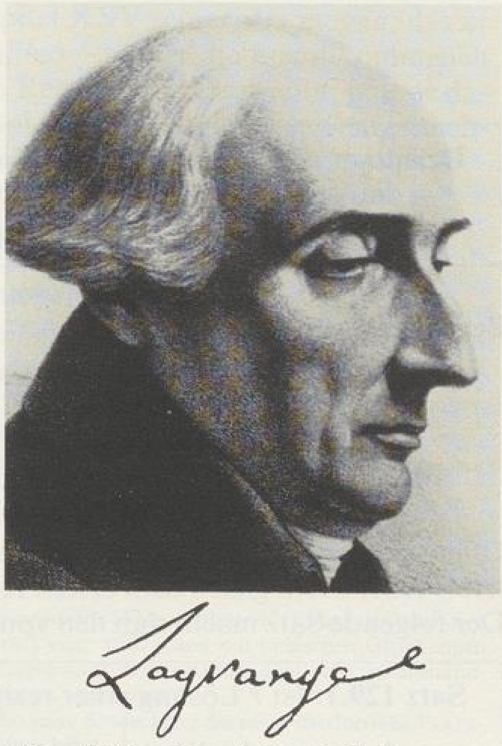


Abb. 130.1 Joseph Louis de LAGRANGE (25.1.1736 Turin–10.4.1813 Paris)

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \vee x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

was durch Multiplikation mit dem Hauptnenner auf zwei reziproke quadratische Gleichungen führt:

$$3x^2+10x+3=0 \quad \vee \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$x=-3 \vee x=-\tfrac{1}{3} \quad \vee \quad x=\tfrac{1}{2} \vee x=2.$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet somit $L=\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.

Ist der Grad einer reziproken Gleichung 1. Art ungerade, dann gilt

Satz 131.1: Eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades hat stets die Lösung -1.

Beweis: $ax^3+bx^2+bx+a=0$ ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Setzt man -1 ein, so erhält man $-a+b-b+a=0$, was zu zeigen war. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

In Satz 125.1 haben wir gezeigt, dass man eine kubische Gleichung faktorisieren kann, wenn man eine Lösung kennt. Dieser Satz gilt allgemein, wenn der Gleichungsterm ein Polynom ist.* Damit lässt sich eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades auf eine Gleichung kleineren Grades reduzieren. Dazu

Beispiel 2: $12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=0$

Die Division durch $(x-(-1))$ liefert

$12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=$
$=(x+1)(12x^4-4x^3-41x^2-4x+12),$

wie du leicht nachrechnen kannst. Setzen wir den 2. Faktor null, so haben wir in $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$ wieder eine reziproke Gleichung 1. Art vor uns. Dieser Sachverhalt gilt allgemein, wie man beweisen kann. Wie in Beispiel 1 substituiert man $z:=x+\frac{1}{x}$ und erhält

$12z^2-4z-65=0 \Leftrightarrow z=-\frac{13}{6} \vee z=\frac{5}{2}.$

Daraus gewinnt man, indem man die Substitution rückgängig macht, schließlich die beiden quadratischen reziproken Gleichungen 1. Art

$6x^2+13x+6=0 \quad \vee \quad 2x^2-5x+2=0$

mit $\{-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\}$ bzw. $\{\frac{1}{2}, 2\}$ als Lösungsmengen, sodass man nun die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung 5. Grades angeben kann zu

$L=\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 2\}.$

* Beweis: Dividiert man ein Polynom $P(x)$ durch $(x-x_0)$, so erhält man ein Polynom $Q(x)$ und einen Rest R; es gilt also $P(x)=(x-x_0)Q(x)+R$. Den Rest R kann man aber leicht bestimmen. Setzt man nämlich an Stelle von x den Wert x_0 ein, so erhält man $P(x_0)=(x_0-x_0)Q(x_0)+R=0+R=R$, d.h., R ist der Wert des Polynoms $P(x)$ an der Stelle x_0. Ist nun x_0 eine Nullstelle des Polynoms, dann ist $P(x_0)=0$, also auch $R=0$, und es gilt $P(x)=(x-x_0)Q(x)$; das Polynom ist faktorisiert.

Die eingangs angekündigte Erweiterung des Begriffs der reziproken Gleichung liefert

Definition 132.1: Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 2. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten dem Betrage nach jeweils gleich sind, aber verschiedenes Vorzeichen haben.

Folgerung: Ist der Grad einer reziproken Gleichung 2. Art gerade, z. B. $2k$, so muss für den mittleren Koeffizienten a_k gelten $a_k = -a_k$, d.h., der mittlere Koeffizient muss den Wert null haben.

Beispiele:

1) $3x^2 - 3 = 0$ — Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 + 3x - 5 = 0$

(2) und 3):) Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen, ebenso der zweite und der vorletzte.

Satz 129.1 gilt auch für reziproke Gleichungen 2. Art, wie du selbst leicht beweisen kannst (Aufgabe 133/**1**). An Stelle von Satz 131.1 gilt

Satz 132.1: Jede reziproke Gleichung 2. Art hat die Lösung $+1$.

Von der Richtigkeit dieses Satzes kannst du dich durch Einsetzen in die obigen Beispiele überzeugen; der Beweis ist leicht (Aufgabe 133/**2**).

Dividiert man eine reziproke Gleichung 2. Art durch $x - 1$, so erhält man immer, wie man zeigen kann, eine reziproke Gleichung 1. Art. Wir begnügen uns zum Nachweis auch hier mit einem Beispiel, nämlich

Beispiel 3:

$x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ ist eine reziproke Gleichung 2. Art. Somit lässt sich der links stehende Term durch $x - 1$ dividieren und man erhält die Faktorisierung

$(x-1)(x^3 - 5x^2 - 5x - 1) = 0$.

Setzt man die Klammer null, so erhält man eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Diese hat -1 als Lösung. Daher kann man das Polynom in der Klammer durch $x + 1$ dividieren und erhält die Faktorisierung

$(x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 1) = 0$.

Setzt man nun den 3. Faktor null, so erhält man eine quadratische Gleichung – sie ist reziprok von 1. Art – mit den Lösungen $3 \pm \sqrt{8}$. Die Ausgangsgleichung $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ hat also die Lösungsmenge $L = \{3 - \sqrt{8}, -1, 1, 3 + \sqrt{8}\}$.

Aufgaben

1. Beweise die Gültigkeit von Satz 129.1 für eine reziproke Gleichung 2. Art. Unterscheide dabei, ob sie geraden oder ungeraden Grades ist, und führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

2. Zeige, dass eine reziproke Gleichung 2. Art stets 1 als Lösung besitzt. Führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

3. a) $12x^3 - 13x^2 - 13x + 1 = 0$ **b)** $x^3 - 5x^2 + 5x + 1 = 0$

4. a) $20x^4 + 19x^3 - 402x^2 + 19x + 20 = 0$
b) $20x^4 - 189x^3 + 482x^2 - 189x + 20 = 0$

5. a) $18x^4 + 51x^3 - 334x^2 + 51x + 18 = 0$
b) $36x^4 - 9x^3 - 103x^2 - 9x + 36 = 0$

6. a) $7x^4 + 36x^3 - 86x^2 + 36x + 7 = 0$
b) $10x^4 - 29x^3 + 20x^2 - 29x + 10 = 0$

7. a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$
b) $20x^4 + 16x^3 + 19x^2 + 16x + 20 = 0$

8. a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$

9. a) $16x^4 - 72x^3 + 113x^2 - 72x + 16 = 0$
b) $2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 9x + 2 = 0$

10. Beweise für reziproke Gleichungen 1. Art vom Grad 4:

a) Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung ist genau dann nicht leer, wenn die durch die Substitution $z := x + \frac{1}{x}$ gewonnene Hilfsgleichung mindestens eine Lösung hat, welche die Bedingung $|z| \geqq 2$ erfüllt.

b) Eine Doppellösung tritt genau dann auf, wenn die Hilfsgleichung die Lösung 2 oder -2 hat. Wie heißt die zugehörige Doppellösung?

c) Löst z_1 die Hilfsgleichung, so haben die zugehörigen Lösungen der Ausgangsgleichung stets dasselbe Vorzeichen wie z_1, wenn $|z_1| > 2$ ist.

11. a) $12x^5 + 23x^4 - 135x^3 - 135x^2 + 23x + 12 = 0$
b) $2x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$
c) $2x^6 - 13x^5 + 34x^4 - 46x^3 + 34x^2 - 13x + 2 = 0$

12. a) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$ **b)** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

13. a) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ **b)** $x^4 - 10x^3 + 10x - 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$

14. a) $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$
b) $5x^5 - 31x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 31x - 5 = 0$ **c)** $x^5 - 1 = 0$

15. a) $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$
b) $2x^8 - 5x^7 - 4x^6 + 15x^5 - 15x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$

**3.8 Gleichungssysteme, die auf quadratische Gleichungen führen

Im letzten Jahr hast du lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten kennen gelernt. Dabei kamen die Variablen nur in der 1. Potenz vor und, ohne dass es dir vielleicht aufgefallen ist, auch nicht durch Multiplikation miteinander verbunden. Tritt also ein Term der Form x^2, y^2 oder xy auf, dann handelt es sich um ein quadratisches und nicht mehr um ein lineares Gleichungssystem. Besonders einfach sind solche Systeme, die aus einer linearen und einer quadratischen Gleichung bestehen. Dass die Lösung solcher Systeme erst mit Hilfe von quadratischen Gleichungen möglich ist, zeigt

Beispiel 1:

Auf Seite I des Keilschrifttextes AO 8862, der um 2000 v. Chr. entstanden ist und zu den ältesten babylonischen Texten gehört*, steht:
NISABA [Schutzpatronin der Wissenschaften] Länge, Breite. Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Was die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich zur Fläche addiert, und es macht 183. Wiederum Länge und Breite addiert, gibt 27. Länge, Breite und Fläche ist was?
Der Text führt zu Beginn die beiden Unbekannten »Länge« und »Breite« ein; ihr Produkt heißt »Fläche«. Wählen wir x für »Länge« und y für »Breite«, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & xy + (x - y) = 183 \\ \text{II} & x + y = 27 \end{array} \qquad \text{Nebenbedingung: } x > y$$

Hier löst man am besten II z. B. nach y auf und setzt $y = 27 - x$ in I ein.

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & x(27 - x) + (x - 27 + x) = 183 \\ \text{II}' & y = 27 - x \\ \hline \text{I}' & x^2 - 29x + 210 = 0 \\ \text{II}' & y = 27 - x \\ \hline \text{I}' & x = 14 \quad \vee \quad x = 15 \\ \text{II}' & y = 27 - x \end{array}$$

Die Lösungsmenge $L_{\text{I}'}$ kann in einem x-y-Koordinatensystem (Abbildung 134.1) durch ein Parallelenpaar dargestellt werden, $L_{\text{II}'}$ durch eine Gerade. Die Lösungsmenge L des Gleichungssystems ergibt sich als Schnittmenge $L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'}$ zu
$L = \{(14|13), (15|12)\}$.

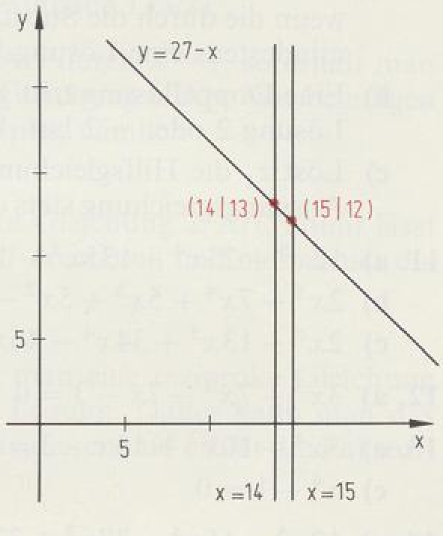


Abb. 134.1 Die Lösungsmenge von Beispiel 1

* gefunden in Larsa, aufbewahrt in Paris im Louvre in der Abteilung Antiquités Orientales. Es handelt sich um ein vierseitiges, auf allen Seiten beschriebenes Prisma der Höhe 16,8 cm und der Basisseite 7,3 cm.

Praktisch geht man so vor, dass man zu jedem aus I′ erhaltenen x-Wert den zugehörigen y-Wert aus II′ errechnet:

$x = 14 \Rightarrow y = 13$ und $x = 15 \Rightarrow y = 12$.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems besteht also aus 2 Paaren. Wir erhalten somit zwei verschiedene Antworten auf die gestellte Frage:

Lösung 1: Länge = 14, Breite = 13, Fläche = 182,

Lösung 2: Länge = 15, Breite = 12, Fläche = 180.

Die Nebenbedingung ist jedesmal erfüllt. Eine Probe ist nicht nötig, da nur Äquivalenzumformungen vorgenommen wurden. – Auf der Keilschrifttafel ist übrigens nur Lösung 2 angegeben.

Der hier eingeschlagene Lösungsweg führt bei jedem derartigen Gleichungssystem zum Ziel. Die lineare Gleichung wird nach einer der beiden Unbekannten aufgelöst und der gefundene Ausdruck in die quadratische Gleichung eingesetzt. Man hat dann als neues äquivalentes System im Allgemeinen eine quadratische Gleichung mit nur einer Unbekannten und die lineare Gleichung. Je nachdem, ob die quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat, besteht die Lösungsmenge des Systems aus zwei, einem oder keinem Zahlenpaar.

Besteht hingegen das System aus zwei quadratischen Gleichungen, dann kann der Lösungsweg schließlich bis zu einer Gleichung 4. Grades für eine Unbekannte führen, die du unter Umständen nicht lösen kannst. Sehr leicht lassen sich dagegen Systeme lösen, in deren Gleichungen nur die Quadrate der Unbekannten vorkommen. Dazu die folgenden beiden Beispiele.

Beispiel 2:

I $2x^2 - y^2 = -7$
II $6x^2 + 2y^2 = 104$

Durch die Substitution $u := x^2$, $v := y^2$ wird daraus ein lineares System:

I′ $2u - v = -7$
II′ $6u + 2v = 104$

I″ $u = 9$
II″ $v = 25$

Das Ausgangssystem ist also äquivalent mit

I″ $x^2 = 9$
II″ $y^2 = 25$

I″ $x = -3 \quad \vee \quad x = 3$
II″ $y = -5 \quad \vee \quad y = 5$.

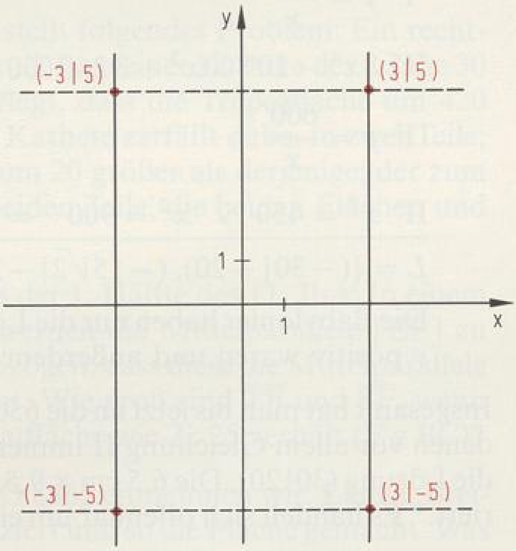


Abb. 135.1 Die Lösungsmenge von Beispiel 2

——— $L_{I''}$ - - - - $L_{II''}$

$L_{\mathrm{I}''}$ lässt sich als Parallelenpaar zur y-Achse, $L_{\mathrm{II}''}$ als Parallelenpaar zur x-Achse graphisch darstellen (Abbildung 135.1). Für L erhält man $L = L_{\mathrm{I}''} \cap L_{\mathrm{II}''} = \{(-3|-5), (-3|5), (3|-5), (3|5)\}$.

Ebenso wie in Beispiel 2 geht man vor in

Beispiel 3:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}\ 3x^2 - 5y^2 = 20 & \mathrm{I}'\ x^2 = 5 \\ \mathrm{II}\ 7x^2 + 9y^2 = 26 & \Leftrightarrow \quad \mathrm{II}'\ y^2 = -1 \end{array}$$

Da $L_{\mathrm{II}'} = \{\ \}$, ist auch $L = L_{\mathrm{I}'} \cap L_{\mathrm{II}'} = \{\ \}$.

Zum Abschluss behandeln wir noch ein Gleichungssystem, das auf eine biquadratische Gleichung führt. Es stammt von der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 8390.

Beispiel 4:

Länge und Breite habe ich multipliziert, 600 ist die Fläche. Die Länge habe ich mit sich selbst multipliziert. Das ergibt eine Fläche, die das 9fache der Fläche ist, die man erhält, wenn man das, was die Länge über die Breite hinausgeht, mit sich selbst multipliziert. Länge und Breite ist was?

Bedeute x die »Länge« und y die »Breite«, dann erhält man

$$\mathrm{I}\ \ xy = 600$$
$$\mathrm{II}\ \ x^2 = 9(x-y)^2$$

$$\mathrm{I}'\ \ y = \frac{600}{x}$$
$$\mathrm{II}'\ \ 8x^4 - 10\,800x^2 + 3\,240\,000 = 0$$

$$\mathrm{I}'\ \ y = \frac{600}{x}$$
$$\mathrm{II}'\ \ x^2 = 450 \ \vee\ x^2 = 900 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 15\sqrt{2} \ \vee\ x = \pm 30$$

$$L = \{(-30|-20), (-15\sqrt{2}|-20\sqrt{2}), (15\sqrt{2}|20\sqrt{2}), (30|20)\}.$$

Die Babylonier haben nur die Lösung $(30|20)$ angegeben, da für sie x und y positiv waren und außerdem $x > y$ gelten sollte.

Insgesamt hat man bis jetzt an die 650 Aufgaben von diesem Typ gefunden, bei denen vor allem Gleichung II immer wieder verändert wird. Alle aber haben die Lösung $(30|20)$. Die 6,5 cm × 9,5 cm großen Täfelchen sind durchnummeriert.* Es handelt sich offenbar um einen Satz von Übungsaufgaben, der einst

* Da sie aus Raubgrabungen stammen, lassen sie sich nur schwer datieren. Man vermutet, dass sie mittelbabylonisch sind, d.h. aus der Zeit der Kassiten stammen (ca. 1530–1160 v. Chr.). Sie enthalten fast keinen Worttext mehr, sondern nur mehr mathematische Zeichen, stellen also eine Art babylonischer Zeichenalgebra dar.

aus mindestens 14 solcher Täfelchen bestand. Wir dürfen daraus wohl schließen, dass bereits die Babylonier erkannt hatten, dass Mathematik nur dadurch gelernt werden kann, dass man viel übt. Für dich folgt daher eine Reihe von

Aufgaben

1. a) $x+y=7$, $xy=10$ **b)** $xy=6$, $3x-y=3$ **c)** $x+3=4+y$, $xy=2$

2. a) $xy=9+x$, $2x-y=2$ **b)** $2xy-x+2y=1$, $x+2y=0$ **c)** $3x+2y-4xy=-5$, $5x+2y=12$

3. Seite I und Seite III des Keilschrifttextes AO 8862 liefern die Systeme
a) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+xy=15$, $x+y=7$ **b)** $x+y=xy$, $x+y+xy=9$

4. In Susa fand man folgende Keilschrifttexte aus altbabylonischer Zeit:
a)* $\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}y+\frac{1}{7}xy=2$, $x+y=5\frac{5}{6}$ **b)** $xy+x+y=1$, $\frac{1}{17}(3x+4y)+y=\frac{1}{2}$

5. Eine interessante Aufgabe enthält der altbabylonische Keilschrifttext** VAT 7528, der, auf unser Maßsystem umgerechnet, lautet:
Gebaut wurde ein kleiner Kanal von 2160 m Länge und $\frac{3}{4}$ m Tiefe. Sein Querschnitt ist trapezförmig und misst oben 1 m, unten $\frac{1}{2}$ m. Ein Arbeiter konnte täglich 6 m^3 Erde ausheben. Die Anzahl der Arbeiter zu der der Arbeitstage addiert ergibt $29\frac{1}{4}$. Wie viele Leute haben wie viele Tage gearbeitet?

6. VAT 8512, ebenfalls altbabylonisch, stellt folgendes Problem: Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch eine Parallele zu einer Kathete der Länge 30 in ein Dreieck und ein Trapez so zerlegt, dass die Trapezfläche um 420 größer ist als die Dreiecksfläche. Die Kathete zerfällt dabei in zwei Teile; der Teil, der zum Dreieck gehört, ist um 20 größer als derjenige, der zum Trapez gehört. Wie groß sind diese beiden Teile, die beiden Flächen und die parallele Strecke?

7. Aus einer arabischen Handschrift aus der 1. Hälfte des 11. Jh.s: In einem Quadrat ABCD der Seitenlänge 10 werden die Mittelparallele [EF] zu [AB] und von A aus eine Gerade so gezogen, dass diese die Mittelparallele in S und die Seite [BC] in T schneidet. Wie groß sind $\overline{TF}$ und $\overline{SF}$, wenn die Fläche von ΔSTF sich zur Quadratfläche wie 2 : 25 verhält (F $\in$ BC)?

8. Der Seite II des Keilschriftprismas AO 8862 entnehmen wir: Länge, Breite. Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Was die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich mit der Summe aus Länge

* SKT 362, Straßburger Keilschrift-Texte, aufbewahrt in Straßburg, Bibliothèque Nationale et Universitaire.
** aufbewahrt in Berlin, Staatliche Museen: Vorderasiatische Abteilung; Tontafeln.

und Breite multipliziert; dazu habe ich meine Fläche addiert. Es macht 4400. Dann habe ich Länge und Breite addiert, das ergibt 100.

9. Die Aufgaben 8–10, 14 und 19 aus der altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901 (siehe Seite 88f. und Aufgabe 97/**24**):

a) $x^2 + y^2 = 1300$, $x + y = 50$ **b)** $x^2 + y^2 = 1300$, $x - y = 10$ **c)** $x^2 + y^2 = 21\frac{1}{4}$, $y - x = -\frac{1}{7}x$

d) $x^2 + y^2 = 1525$, $y = \frac{2}{3}x + 5$ **e)** $x^2 + y^2 + (x-y)^2 = 1400$, $x + y = 50$

10. Aus der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 363:

a) $x^2 + y^2 = 1000$, $y = \frac{2}{3}x - 10$ **b)** $x^2 + y^2 = 2225$, $y = \frac{2}{3}(x-10) + 5$ **c)** $x^2 + y^2 = 3125$, $y = \frac{2}{3}(x-20) + 5$

11. a) $x^2 - 3x + y = 2$, $x + 3y = 6$ **b)** $2y^2 - 5x + 3y = 0$, $-2x + 7y = 5$

c) $3x + 2y = 3$, $2x^2 - y^2 = -7$ **d)** $4x - 3y = 11$, $2x^2 + 3y^2 = 11$

12. a) Aus dem *liber abaci* (1202) des Leonardo von Pisa (um 1170–nach 1240):

$x + y = 10 \wedge \frac{xy}{x-y} = \sqrt{6}$. Mache die Probe!

b) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$, $\frac{y - 1{,}8}{x - 4} = \frac{9}{20}$ **c)** $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{9}y^2 = 1$, $\frac{y+4}{x-4} = -\frac{3}{4}$

13. a) $x^2 - 2xy - y^2 = -4$, $x - 5y = 6$ (!)**b)** $x^2 - 2xy + y^2 + 4 = 0$, $x - 5y - 6 = 0$

14. a) $2x^2 + xy + y^2 - 2x + y = 6$, $2x - 3y = 9$

b) $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 24x + 68y - 41 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$

15. a) $x^2 + 2y^2 = 9$, $3x^2 - y^2 = -1$ **b)** $2x^2 + 5y^2 = 47$, $5x^2 + 2y^2 = 23$

16. a) $7x^2 - 2y^2 + 32 = 0$, $3x^2 + 5y^2 - 80 = 0$ **b)** $6x^2 + 2y^2 = 6$, $4x^2 - 3y^2 = 43$

17. a) $11x^2 - 7y^2 = 0$, $-8x^2 + 5y^2 = 0$ **b)** $11x^2 - 7y^2 = -2$, $-8x^2 + 5y^2 = 0$

18. a) $x^2 + 3y^2 = 3$
$6x^2 - 2y^2 = 13$

b) $5x^2 + 9y^2 - 32{,}2 = 0$
$4x^2 - 3y^2 + \frac{193}{75} = 0$

19. a) $3x^2 - 5y^2 = 0$
$2x^2 - 7y^2 = 11$

b) $4x^2 - 3y^2 = 7$
$3x^2 + 5y^2 = 56$

•**20. a)** $2x^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
$5x^2 - 0{,}5x + 3y - 7 = 0$

b) $2x + 5y + 2xy = 3$
$x - 3y - 4xy = 33$

c) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 25$

d) $x + 2x^2 + 3y - 6y^2 = 28$
$x - x^2 - 2y + 3y^2 = -20$

21. a) $x^2 + 2x + 4y - 47 = 0$
$5x^2 - 25x + 6y - 18 = 0$

b) $2x^2 + y^2 - 10x = 13$
$5x^2 - 2y^2 + 15x = 0$

c) $y^2 + 2xy + 3y = 0$
$3y^2 - 3xy - y = 30$

•**d)** $(x-2)^2 - (y+1)^2 = -24$
$3x^2 + y^2 - 12x + 2y = 87$

22. Die auf Seite 136 erwähnte Aufgabensammlung aus kassitischer Zeit befindet sich fast vollständig in der Yale Babylonian Collection von New Haven (USA). Die auf der Tafel YBC 4697 angegebenen Gleichungssysteme löst man am besten mit der Substitution $x := u + v$ und $y := u - v$. Die erste Gleichung heißt immer $xy = 600$, die zweite dagegen

a) $\frac{1}{3}(x+y) + \frac{1}{60}(x-y)^2 = 18\frac{2}{3}$,

b) $\frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{60}(x-y)^2 = 15$,

c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}(x+y) + \frac{1}{60}(x-y)^2 = 3\frac{1}{3}$.

23. a) $x^2 + y^2 = 10$
$x^2y^2 = 9$

b) $x^2 - 8y^2 = 23$
$4(xy)^2 = 25$

c) $x^4 - 3x^2 + 2y^2 = 6$
$4x^2 - 5y^2 = -16$

d) $x^4 - y^4 = 65$
$2x^2 + 3y^2 = 30$

24. a) $(x+1)^2 + 3(y+3)^2 = 12$
$2(x+1) - 7(y+3) = -1$

•**b)** $2(2x - 3y + 7)^2 - 3(4x - 2y + 5)^2 = 5$
$5(2x - 3y + 7)^2 - 7(4x - 2y + 5)^2 = 13$

25. a) $3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{y} = 4$
$3 \cdot \frac{1}{x^2} + 8 \cdot \frac{1}{y^2} = 5$

•**b)** $18 \cdot \frac{1}{x^2} - 7 \cdot \frac{1}{y^2} = 2$
$6 \cdot \frac{1}{x^2} + 3 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{2}{3}$

26. a) Aufgabe 12 aus dem Keilschrifttext BM 13901 ergibt das System
$x^2 + y^2 = 1300 \quad \wedge \quad xy = 600$.

b) Aufgabe 22 der Tafel YBC 4668 aus kassitischer Zeit ergibt

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=2\tfrac{1}{6} \quad \wedge \quad xy=600.$$

c) Aufgabe 25 der Tafel YBC 4668 aus kassitischer Zeit ergibt

$$\frac{x}{y}-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=1\tfrac{1}{6} \quad \wedge \quad xy=600.$$

27. In Susa fand man auf einer Keilschrifttafel den Text XIX, Problem D:
$xy=1200 \quad \wedge \quad x\cdot x^2\sqrt{x^2+y^2}=3\,200\,000.$

28. a) $x+2=y-1$
$\sqrt{3x+2y}=2x$

b) $2-2x=(y+4)^2$
$\sqrt{x^2+y^2}=7-x$

29. a) $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \qquad \sqrt{x^2-6x-y^2}=\frac{1}{3}y$

:b) $\sqrt{3x+y}+\sqrt{2x-y}=\sqrt{7x+2y}$
$\sqrt{\sqrt{4x^2+y^2+4xy}-2x}-3+x-y=\sqrt{3x-1}$

30. Besteht ein Gleichungssystem mit zwei Variablen nur aus einer Gleichung, so ist es unterbestimmt. Stelle die Lösungsmengen der folgenden unterbestimmten Systeme graphisch dar.

a) $x^2+y^2=0$ **b)** $(x-3)^2+(y+2)^2=0$
c) $x^2-y^2=0$ **d)** $(x+y)^2=4$
e) $x(x-2y)=0$ **f)** $y^2-3xy+2y=0$
•g) $\sqrt{x^2}+y=1$ **•h)** $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=1$

•31. Die beiden folgenden ersten Aufgaben sind die Nr. 94 bzw. 96 aus Kapitel LXVI der 1539 erschienenen *Practica Arithmeticae* des Geronimo CARDANO (1501–1576). Michael STIFEL (1487?–1567) bringt sie 1544 in seiner *Arithmetica integra* und fügt als weitere Beispiele die beiden anderen Aufgaben an. – Zur Lösung raten wir, zuerst xy zu berechnen.

a) $(x-y)^2=xy$
$x^2+y^2=20$

b) $x+y=xy$
$x^2+y^2+(x+y)=20$

c) $x^2+y^2=52$
$xy-x-y=14$

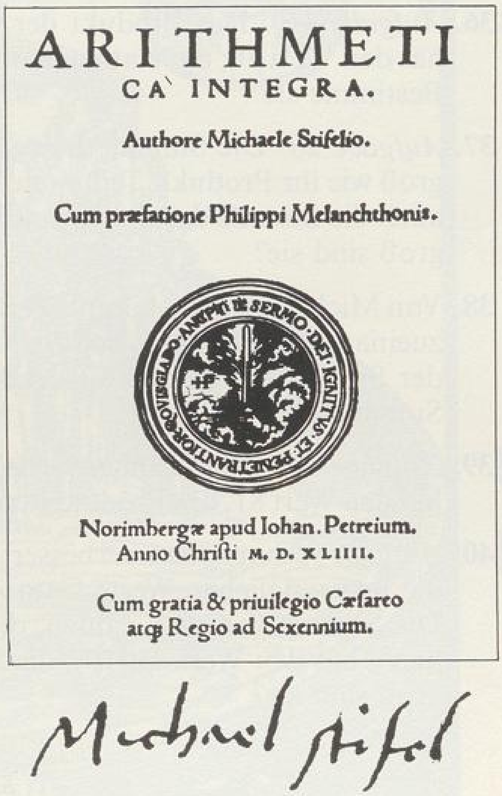
d) $x^2+y^2=52$
$xy+x+y=34$

32. In Kapitel LXI seiner *Practica Arithmeticae* behandelt CARDANO ein überbestimmtes Gleichungssystem, für das STIFEL bessere Zahlen wählt, damit die Aufgabe aufgeht:
Zerlege 468 in zwei Summanden. Das Produkt aus dem größeren Teil und dem Quadrat des kleineren Teils soll 5 359 375 ergeben, das Produkt aus dem kleineren Teil und dem Quadrat des größeren hingegen 14 706 125. Wie heißen die Summanden?

Die folgenden Aufgaben ergeben Gleichungssysteme für 3 und mehr Unbekannte. Sie stammen aus Kapitel LXVI der *Practica Arithmeticae* (1539) des Geronimo CARDANO (1501–1576). Michael STIFEL (1487?–1567) fand sie so interessant, dass er sie ganz am Ende seiner *Arithmetica integra* (1544) bringt. Angeregt durch sie, fügt er gelegentlich ergänzende Aufgaben hinzu.

33. *Aufgabe 78:* Zerlege 14 so in 3 Summanden, dass sie in stetiger Proportion zueinander stehen* und dass die Summe aus dem 2fachen des ersten, dem 3fachen des zweiten und dem 4fachen des dritten 36 ergibt.


HIERONIMI C.CARDANI MEDICI MEDIOLANENSIS, PRACTICA ARITHmetice, & Mensurandi singularis. In qua que preter alias cōtinentur, versa pagina demonstrabit.


ARITHMETICA INTEGRA.

Authore Michaele Stifelio.

Cum præfatione Philippi Melanchthonis.

Norimbergæ apud Iohan. Petreium. Anno Christi M. D. XLIIII.

Cum gratia & priuilegio Cæsareo atq; Regio ad Sexennium.

Abb. 141.1 Titelblatt der *Practica Arithmeticae* von 1539 des Geronimo CARDANO (1501–1576)** und dessen Unterschrift.

Abb. 141.2 Titelblatt der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – (1544) von Michael STIFEL (1487? Esslingen bis 19.4.1567 Jena) und dessen Unterschrift. Ein Bildnis ist nicht überliefert.***

* 3 Größen a, b, c bzw. 4 Größen a, b, c, d stehen in stetiger Proportion zueinander oder verhalten sich stetig, wenn $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ gilt.

** Des Hieronimus C. CARDANUS mailändischen Arztes, einzigartige Handhabung der Arithmetik und des Messens. Was in ihr unter anderen enthalten ist, legt er auf der nächsten Seite dar.
Die Umschrift NEMO PROPHETA ACCEPTUS IN PATRIA um das Bildnis ist eine Anspielung auf Matth. 13,57, das im Deutschen zu »Der Prophet gilt nichts in seinem Vaterlande« verkürzt wird.

*** Auf dem Titelblatt liest man ferner: Mit einem Vorwort Philipp MELANCHTHONS. Zu Nürnberg bei Johann PETREIUS. Im Jahre Christi 1544. Mit der Gunst und dem kaiserlichen und königlichen Privileg für einen Zeitraum von sechs Jahren. Die Umschrift um das Flammenschwert lautet SERMO DEI IGNITUS ET PENETRANTIOR QUOVIS GLADIO ANCIPITI, d.h.: Die Sprache Gottes ist feurig und durchdringender als jedes zweischneidige Schwert. – Am Ende schreibt STIFEL, dass er das Manuskript mehr als ein Jahrfünft zurückgehalten habe; es war also bereits 1539 fertig. – Die in der 1. und 2. Auflage wiedergegebene Unterschrift ist kein Autograph STIFELS.

34. Michael Stifel verwandelt die vorstehende Aufgabe in:
Zerlege 182 so in 3 Summanden, dass sie in stetiger Proportion zueinander stehen*. Bildet man dann die Summe der 3 möglichen Produkte aus je zweien von ihnen, so erhält man 7644. Wie heißen die Teile?

35. Michael Stifel ergänzt die vorstehende Aufgabe durch:
Zerlege 78 in 3 Summanden, die sich stetig verhalten* und für die gilt: Teilt man 78 durch jeweils einen der Summanden, so ist die Summe dieser drei Quotienten $18\frac{7}{9}$. Wie groß sind die Summanden?

36. *Aufgabe 110:* Das Produkt der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks hat den Wert 10; die Katheten und die Hypotenuse verhalten sich stetig*. Bestimme sie.

37. *Aufgabe 28:* Die Summe dreier Zahlen, die sich stetig verhalten*, ist so groß wie ihr Produkt. Teilt man 25 durch jeweils eine von ihnen, so ergibt auch die Summe der drei Quotienten die Summe dieser drei Zahlen. Wie groß sind sie?

38. Von Michael Stifel stammt: Zerlege 76 in drei Summanden, die sich stetig zueinander verhalten*, sodass das Produkt aus dem mittleren Glied mit der Summe der beiden äußeren Glieder 1248 ergibt. Wie groß sind die Summanden?

39. *Aufgabe 112:* Vier Zahlen verhalten sich stetig zueinander*. Ihr Produkt hat den Wert 81, das Produkt der beiden ersten den Wert 6. Wie heißen sie?

40. *Aufgabe 95* hat Stifel verbessert, sodass sie aufgeht. In Klammern stehen die ursprünglichen Werte Cardanos:
Die Summe von vier Zahlen, die in stetiger Proportion zueinander stehen*, hat den Wert 45 (10); die Summe ihrer Quadrate ist 765 (60). Wie groß sind sie?

* 3 Größen a, b, c bzw. 4 Größen a, b, c, d stehen in stetiger Proportion zueinander oder verhalten sich stetig, wenn $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ gilt.

4 Quadratfunktion und Wurzelfunktion

NOVA SCIENTIA INVENTA DA NICOLO TARTALEA. B.

Disciplinæ Mathematicæ loquuntur.
Qui cupitis Rerum varias cognoscere causas
Discite nos: Cunctis hac patet una via.

Titelblatt von *Nova Scientia* – »Neue Wissenschaft« –, die Niccolò TARTAGLIA (1499 bis 1557) im Jahre 1537 herausbrachte, weil Sultan SULAIMAN II. DER PRÄCHTIGE (reg. 1520–1556) weiter zum Krieg gegen die Christenheit rüstete.
Das Buch handelt vorwiegend von der Schießkunst. TARTAGLIA beweist darin, dass man am weitesten schießen könne, wenn das Geschütz 45° über den Horizont aufgerichtet wird. Die im Titelbild dargestellte Flugbahn des Geschosses sieht wie eine Parabel aus. TARTAGLIA wusste aber noch nicht, dass Geschosse sich wirklich auf einer Parabel bewegen (Abbildung 159). Erst Galileo GALILEI (1564–1642) erbrachte rund 70 Jahre später den Beweis dafür (siehe Seite 174).
Die beiden Wappen sind nicht sehr genau gezeichnet. Das linke ist das Wappen von FRANZ MARIA I. (1490–1538) aus dem Hause DELLA ROVERE. Er war Herzog von Urbino (1508–1538) und Generalkapitän von Venedig, ferner Autor der *Discorsi militari*. An ihn ist der Brief gerichtet, der das Werk einleitet. Das rechte Wappen ist das seiner Ehefrau ELEONORE († 1570) aus dem Hause GONZAGA, das in Mantua regierte.
Der Wahlspruch AURUM PROBATUR IGNI, ET INGENIUM MATHEMATICIS – Gold wird auf Echtheit geprüft durch das Feuer, der Geist durch die Mathematik – sei, so Luca PACIOLI (um 1445–1517) in seiner *Divina Proportione* (1498, gedruckt 1509), unter den Gelehrten sprichwörtlich geworden um auszudrücken, dass »mathematische Begabung hervorragend für jede andere Wissenschaft geeignet mache«.
Der Ausspruch der mathematischen Wissenschaften, die, durch Damen symbolisiert, in einem Garten stehen, ist ein Distichon, das VERGILS (70–19 v. Chr.) *rerum cognoscere causas* – das Wesen der Welt erkennen – (*Georgica* II, 490 – »Landleben«) aufgreift.

Die mathematischen Wissenschaften sprechen:
Ihr, die Ihr den Wunsch habt, die mannigfaltigen Ursachen der Dinge zu erkennen,
Lernet uns; für alle ist hierher nur ein einziger Weg gangbar.

Spielt TARTAGLIA damit vielleicht auf den Spruch des MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) an – du findest ihn auf der Titelseite dieses Buches –, dass es in der Mathematik keinen Königsweg, sondern nur einen Weg für alle gibt?*
TARTAGLIA selbst steht in diesem Garten, zu dem EUKLID einlässt, umgeben von der Musik, der Arithmetik, der Geometrie, der Perspektive und der Astronomie. Auf den Spruchbändern sind noch die Architektur und die Astrologie entzifferbar, darüber hinaus die verschiedenen Künste des Wahrsagens, so die durch das Los (sortilegio), die durch Befragung der Seelen Verstorbener (necromantia), die durch Beschau des Opferfeuers (pyromantia), der Leber der Opfertiere (aruspitio), des Fluges der Wahrsagevögel (auspitio), die durch Beobachtung der Mäuse (myomanteia) und schließlich die Wahrsagung durch Beobachtung und Deutung von Wahrzeichen (augurio).
Der Zugang zur Philosophie ist nur möglich über ARISTOTELES und PLATON, auf dessen Band wir

NEMO HUC GEOMETRIAE EXPERS INGREDIATUR

lesen, die lateinische Version jener Inschrift, die über dem Eingangstor seiner Akademie geschrieben stand**:

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

Kein der Mathematik Unkundiger trete hier ein

* Dem Distichon stellt Luca PACIOLI in der *Divina Proportione* die Zeile »Corpora loquuntur« (Die Körper sprechen) voran.

** ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω (ageométretos medeís eisítō) – Die von PLATON (428–348 v. Chr.) um 385 v. Chr. gegründete Philosophenschule ist nach einem in der Nähe befindlichen Heiligtum des Helden AKADEMOS benannt. Geschlossen wurde sie 529 n. Chr. durch Kaiser JUSTINIAN (reg. 527–565). Die Inschrift überlieferte uns ELIAS PHILOSOPHUS (6. Jh. n. Chr.) in seinen *Ad Aristotelis Categorias commentaria*. – Nicolaus COPERNICUS (1473–1543) wählte sie als Motto seines *De revolutionibus orbium coelestium* (1543).

4 Quadratfunktion und Wurzelfunktion

4.1 Quadratfunktion und Normalparabel

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kann man als die Nullstellen einer Funktion f mit dem Term $f(x) = ax^2 + bx + c$ deuten. Da $f(x)$ ein quadratischer Term ist, heißt f **quadratische Funktion**. Die einfachste quadratische Funktion hat den Term $f(x) = x^2$. Man gibt ihr einen besonderen Namen:

Definition 145.1: Die Funktion $f: x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, heißt **Quadratfunktion**, ihr Graph heißt **Normalparabel***.

Um die Normalparabel zeichnen zu können berechnen wir eine Wertetabelle:

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}3$	0	0,3	0,5	1	1,5	2	3
y	9	4	2,25	1	0,25	0,09	0	0,09	0,25	1	2,25	4	9

Abbildung 145.1 gibt die Normalparabel wieder. Da man sie sehr oft zeichnen muss, lohnt sich eine Zeichenschablone**.

Wir stellen einige wichtige Eigenschaften der Normalparabel zusammen:

1. Die Normalparabel ist eine gekrümmte Kurve, die sich nach oben öffnet.
Sie ist symmetrisch zur y-Achse, da zu entgegengesetzten Abszissen x und $-x$ wegen $(-x)^2 = x^2$ gleiche Ordinaten gehören. Die

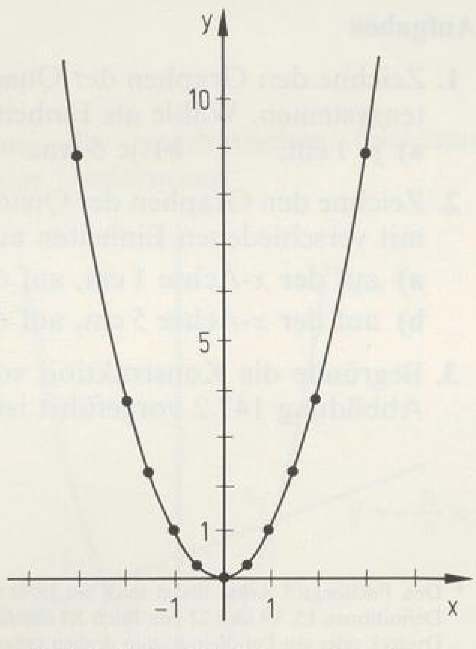


Abb. 145.1 Die Normalparabel

* ἡ παραβολή (he parabolē) = *die Nebeneinanderstellung, die Vergleichung, die Gleichheit*. Das Wort wurde bereits von den PYTHAGOREERN benutzt (siehe Aufgabe 110/**25**). Den Graphen der Funktion $x \mapsto ax^2$ bezeichnete als erster APOLLONIOS VON PERGE (um 262 bis um 190 v. Chr.) in seinen *Κωνικά* (Konikà) – »Die Kegelschnitte« – als Parabel (siehe **5.2**).
Das Adjektiv **normal** erscheint in Deutschland zu Anfang des 18. Jh.s. Es geht zurück auf das lateinische *normalis*, das zum Substantiv *norma* gehört. Dieses bedeutete ursprünglich *Winkelmaß*, später dann aber auch – so z.B. bei CICERO (106–43 v. Chr.) – *Richtschnur, Regel, Vorschrift*, sodass *normalis* im übertragenen Sinn *der Regel entsprechend* bedeutet.

** Das französische Wort *échantillon* (Probe, Muster) gelangt an den Niederrhein und ergibt unter Einfluss des mittelniederländischen *scampen* (behauen) in Kleve 1477 *sc(h)amplioen*, im 16. Jh. niederdeutsch *schampelūn* im Sinne von *Vorbild, Muster, Modell*. Unter dem Einfluss des Verbums *schaben* verliert es sein *m*. Die Form *Schablon* ist 1783 in Berlin belegt.

y-Achse heißt Symmetrieachse oder kurz **Achse*** der Normalparabel.

2. Aus $y = x^2 \geqq 0$ folgt, dass es keine Kurvenpunkte unter der x-Achse gibt. Auf der x-Achse liegt nur der tiefste Kurvenpunkt $(0|0)$. Er ist auch der Schnittpunkt der Achse mit der Normalparabel und heißt **Scheitel**** der Normalparabel.

3. Aus $0 \leqq x_1 < x_2$ folgt $0 < x_2 - x_1$. Multipliziert man mit $x_2 + x_1$, dann ergibt sich $0 < x_2^2 - x_1^2$ und somit $0 \leqq x_1^2 < x_2^2$, d.h., mit wachsenden positiven Abszissen nehmen auch die entsprechenden Ordinaten zu. Die Kurve steigt im 1. Quadranten und fällt auf Grund ihrer Symmetrie im 2. Quadranten.

4. Wenn x beliebig groß wird, dann wird erst recht x^2 beliebig groß. Also erstreckt sich die Normalparabel nach oben ins Unendliche. Die Wertemenge der Quadratfunktion ist demnach nicht nach oben beschränkt. Sie besteht aus allen nicht negativen reellen Zahlen, weil man aus jeder nicht negativen reellen Zahl die Wurzel ziehen kann, deren Quadrat wieder die Zahl liefert (Abbildung 147.1). Also gilt $W = \mathbb{R}_0^+$.

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen der Quadratfunktion in verschiedenen Koordinatensystemen. Wähle als Einheiten auf den beiden Achsen
a) je 1 cm, **b)** je 5 cm.

2. Zeichne den Graphen der Quadratfunktion in einem Koordinatensystem mit verschiedenen Einheiten auf den Achsen, und zwar
a) auf der x-Achse 1 cm, auf der y-Achse 5 cm;
b) auf der x-Achse 5 cm, auf der y-Achse 1 cm.

3. Begründe die Konstruktion von Punkten P der Normalparabel, die in Abbildung 147.2 vorgeführt ist.

* Den Fachbegriff **Achse** findet man bei EUKLID (um 300 v. Chr.) als ὁ ἄξων (ho áxōn) lediglich in den Definitionen 15, 19 und 22 von Buch XI der *Elemente* für diejenige Gerade, um die sich ein Halbkreis, ein Dreieck oder ein Parallelogramm drehen müssen, damit eine Halbkugel, ein Kegel oder ein Zylinder entsteht. Das zugehörige lateinische *axis* wird durch CONRADT VON MEGENBURG 1349 in seiner Übersetzung der *De sphaera mundi* des JOHANNES DE SACRO BOSCO (1200?–1256?) als *achs* wiedergegeben, das aus dem althochdeutschen *ahsa* herkommt. APOLLONIOS (um 262–um 190 v. Chr.) benützt ἄξων = *Achse* in unserem Sinn.

** ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) nannte diesen Punkt ἡ κορυφή (he koryphē) = *Spitze*, *Gipfel*, *Scheitel*, was Johann Christoph STURM (1635–1703) mit *Scheitelpunkt* in seinem 1670 erschienenen *Des Unvergleichlichen Archimedes Kunst-Bücher*, *Teutscher Archimedes* übersetzte.

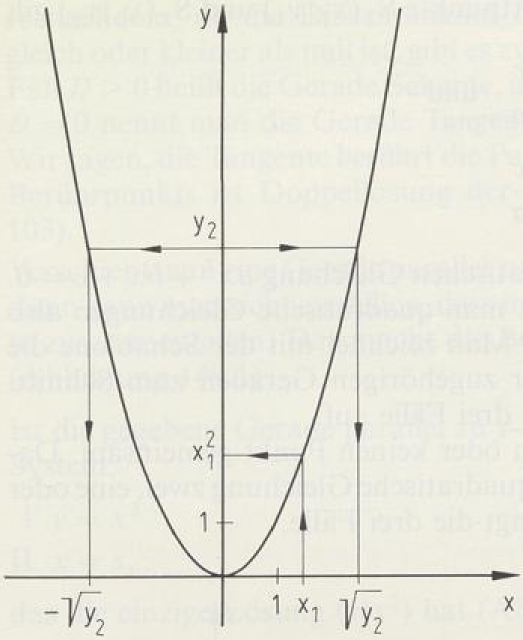


Abb. 147.1 Quadrieren und Radizieren mit Hilfe der Normalparabel

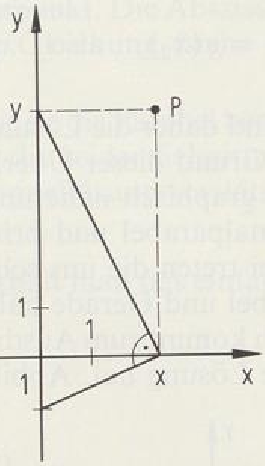


Abb. 147.2 Konstruktion von Punkten der Normalparabel

4.2 Normalparabel und Gerade

Ein graphisches Verfahren zur Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ beruht auf der Umformung

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Wir fassen die beiden Seiten als Terme von zwei Funktionen f und g auf, nämlich

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Der Graph von f ist die Normalparabel, der von g eine Gerade mit der Steigung $-\frac{b}{a}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{c}{a}$. (Siehe Abbildung 147.3.)

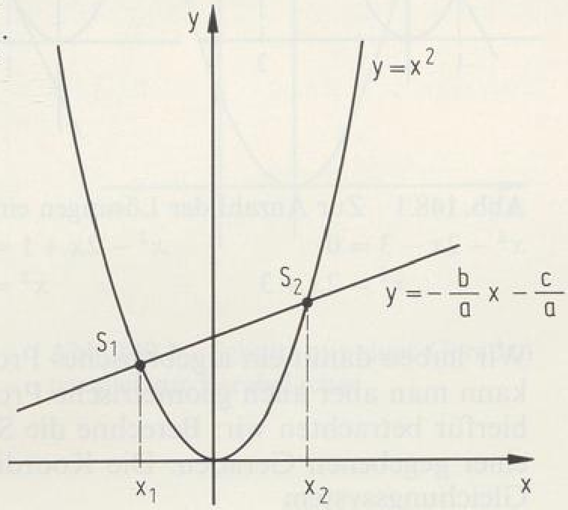


Abb. 147.3 Graphische Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Für die Abszissen x_1 und x_2 der Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$ und $S_2(x_2|y_2)$ gilt

$$f(x_1) = g(x_1), \quad \text{also} \quad x_1^2 = -\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a} \quad \text{und}$$

$$f(x_2) = g(x_2), \quad \text{also} \quad x_2^2 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}.$$

Sie sind daher die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Auf Grund dieser Überlegungen kann man quadratische Gleichungen also auch graphisch näherungsweise lösen: Man zeichnet mit der Schablone die Normalparabel und bringt sie mit der zugehörigen Geraden zum Schnitt. Dabei treten die uns schon bekannten drei Fälle auf:
Parabel und Gerade haben zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam. Dadurch kommt zum Ausdruck, dass die quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat. Abbildung 148.1 zeigt die drei Fälle.

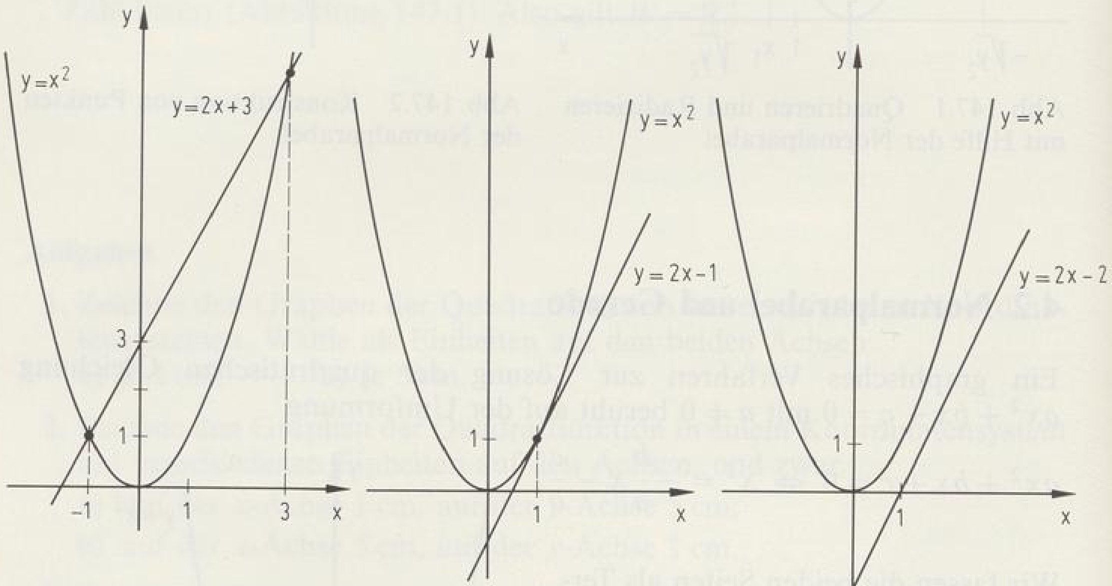


Abb. 148.1 Zur Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung

$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 - 2x + 2 = 0$
$x^2 = 2x + 3$	$x^2 = 2x - 1$	$x^2 = 2x - 2$

Wir haben damit ein algebraisches Problem geometrisch gelöst. Umgekehrt kann man aber auch geometrische Probleme algebraisch lösen. Als Beispiel hierfür betrachten wir: Berechne die Schnittpunkte der Normalparabel mit einer gegebenen Geraden. Die Koordinaten der Schnittpunkte müssen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = x^2 \\ \text{II} & y = mx + t \end{array} \quad \text{erfüllen, das mit} \quad \begin{array}{ll} \text{I}' & x^2 - mx - t = 0 \\ \text{II}' & y = mx + t \end{array} \quad \text{äquivalent ist.}$$

Je nachdem, ob die Diskriminante $D = m^2 + 4t$ der Gleichung I′ größer, gleich oder kleiner als null ist, gibt es zwei, einen oder keinen Schnittpunkt. Im Fall $D > 0$ heißt die Gerade **Sekante**, im Fall $D < 0$ heißt sie **Passante**; im Fall $D = 0$ nennt man die Gerade **Tangente***.
Wir sagen, die Tangente **berührt** die Parabel im **Berührpunkt**. Die Abszisse des Berührpunkts ist Doppellösung der quadratischen Gleichung (siehe Seite 103).
Verschiebt man eine Gerade parallel zu sich so weit, bis sie die Parabel berührt, dann kann man sich vorstellen, dass im Berührpunkt die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Das macht die Bezeichnung Doppellösung verständlich (Abbildung 149.1).

Ist die gegebene Gerade parallel zu y-Achse, dann erhält man das einfachere System

I $y = x^2$
II $x = s$,

das die einzige Lösung $(s|s^2)$ hat (Abbildung 149.2).

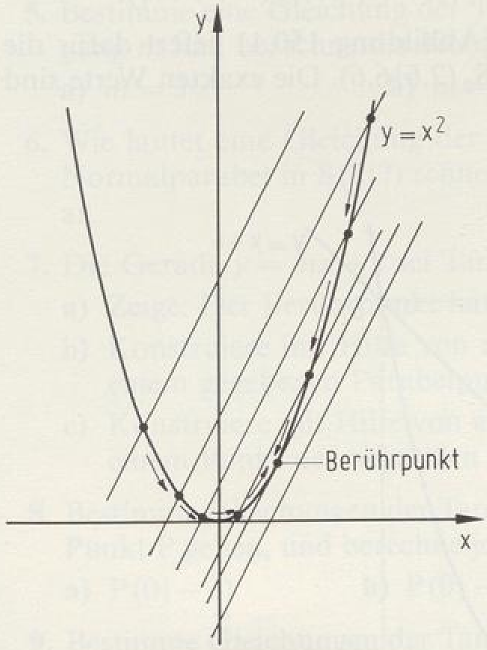


Abb. 149.1 Zur Erklärung des Begriffs »Doppellösung«

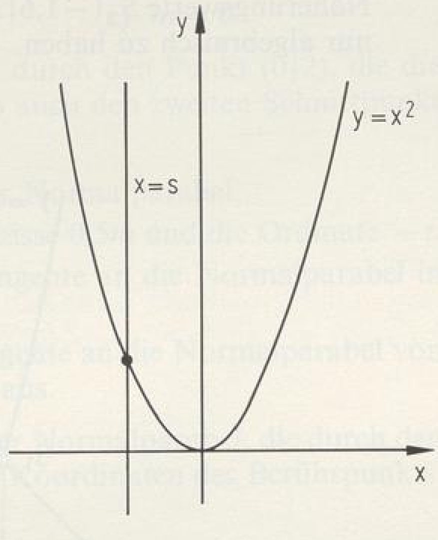


Abb. 149.2 Schnitt mit einer Geraden parallel zur Parabelachse

* secans (lat.) = schneidend; tangens (lat.) = berührend.
Passante ist eine Analogiebildung zu den vorherigen Begriffen. Aus *passus* (lat.) = *das Ausspreizen der Füße beim Gehen* wird das französische *passer* = *vorübergehen, vorbeikommen*, das wir in unserem *passieren* wiederfinden.

Ein Zahlenbeispiel soll dir zeigen, wie man im konkreten Fall vorgeht.

Beispiel:

Berechne die Schnittpunkte der Geraden $y = x + 4$ mit der Normalparabel.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = x^2 \\ \text{II} & y = x + 4 \\ \hline \text{I}' & x^2 - x - 4 = 0 \\ \text{II}'' & y = x + 4 \\ \hline \text{I}' & x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \\ \text{II}'' & y = x + 4 \end{array}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) + 4 = \tfrac{1}{2}(9 - \sqrt{17})$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) + 4 = \tfrac{1}{2}(9 + \sqrt{17})$$

Das ergibt die Schnittpunkte

$S_1(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) | \frac{1}{2}(9 - \sqrt{17}))$ und $S_2(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) | \frac{1}{2}(9 + \sqrt{17}))$.

Das graphische Lösungsverfahren (Abbildung 150.1) liefert dafür die Näherungswerte $S_1(-1{,}6|2{,}4)$ und $S_2(2{,}6|6{,}6)$. Die exakten Werte sind nur algebraisch zu haben.

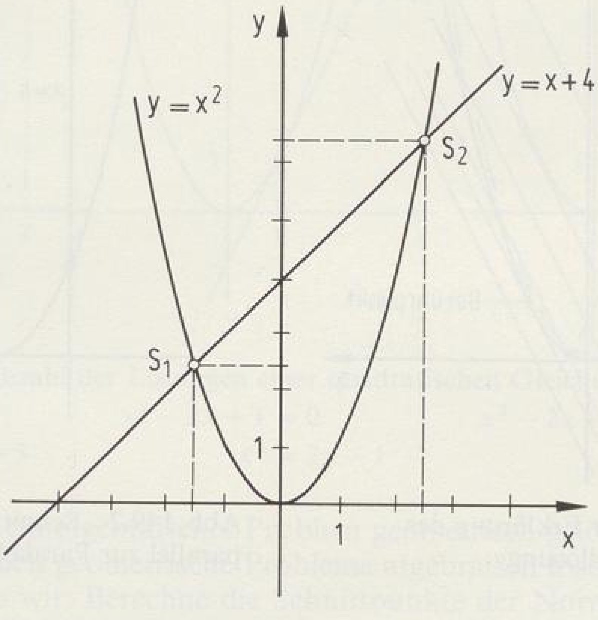


Abb. 150.1 Schnittpunkte der Normalparabel mit der Geraden $y = x + 4$

Aufgaben

1. Löse zuerst graphisch und dann rechnerisch.

a) $x^2 - 2x = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 6x = -11$ **d)** $2x^2 + 24 = 16x$

2. Löse zuerst graphisch und dann rechnerisch.

a) $x^2 - 1{,}6x - 2{,}6 = 0$ **b)** $3x^2 - 2x - 12 = 0$

c) $0{,}25x^2 + 0{,}5x - 0{,}5 = 0$ **d)** $6x^2 + 2x - 25 = 0$

e) $8x^2 - 14x + 1 = 0$ **f)** $0{,}1x^2 + 0{,}32x + 0{,}12 = 0$

3. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Normalparabel mit der Geraden

a) $y = -0{,}5x + 5$, **b)** $y = 6x - 3$.

4. Überprüfe, ob die Gerade Sekante, Tangente oder Passante der Normalparabel ist, und berechne gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte.

a) $y = x - 1$ **b)** $y = -4x - 4$ **c)** $y = 20x - 100$

d) $y = 100x - 20$ **e)** $y = 3x + 4$ **f)** $y = 2{,}5x - 1{,}5625$

5. Bestimme eine Gleichung der Tangente der Normalparabel, die die Steigung m hat; berechne die Koordinaten des Berührpunkts.

a) $m = 3$ **b)** $m = -6$ **c)** $m = 0$

6. Wie lautet eine Gleichung der Geraden durch den Punkt $(0|2)$, die die Normalparabel in $S(3|?)$ schneidet? Gib auch den zweiten Schnittpunkt an.

7. Die Gerade $y = mx + t$ sei Tangente der Normalparabel.

a) Zeige: Der Berührpunkt hat die Abszisse $0{,}5m$ und die Ordinate $-t$.

b) Konstruiere mit Hilfe von **a)** die Tangente an die Normalparabel in einem gegebenen Parabelpunkt.

c) Konstruiere mit Hilfe von **a)** die Tangente an die Normalparabel von einem Punkt der negativen y-Achse aus.

8. Bestimme Gleichungen der Tangenten der Normalparabel, die durch den Punkt P gehen, und berechne jeweils die Koordinaten des Berührpunkts.

a) $P(0|-3)$ **b)** $P(0|-10{,}24)$

9. Bestimme Gleichungen der Tangenten der Normalparabel, die durch den Punkt P gehen, und berechne jeweils die Koordinaten des Berührpunkts.

a) $P(1|-3)$ **b)** $P(-3|8)$

4.3 Die Wurzelfunktion

4.3.1 Definition der Wurzelfunktion

Ordnet man jeder nicht negativen Zahl x ihre Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zu, so hat man eine Funktion; sie heißt Quadratwurzelfunktion oder kurz Wurzelfunktion. Wir merken uns

> **Definition 152.1:**
> Die Funktion $f\colon x \mapsto \sqrt{x},\ D_f = \mathbb{R}_0^+$ heißt **Wurzelfunktion**.

Zum Zeichnen des Graphen der Wurzelfunktion berechnen wir eine Wertetabelle, auf Zehntel gerundet.

x	0	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$	0	0,5	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

Abbildung 152.1 gibt den Graphen wieder.
Wegen $0 \leqq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ (vergleiche Seite 53) ist die Wurzelfunktion echt monoton wachsend. Die Wertemenge der Wurzelfunktion ist $\mathbb{R}_0^+$. Wäre die Wertemenge nämlich nach oben beschränkt, dann müsste es eine Zahl N geben, sodass $\sqrt{x} < N$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gälte. Aus $\sqrt{x} < N$ folgt aber $x < N^2$, und das ist ein Widerspruch, weil x beliebig groß werden kann.

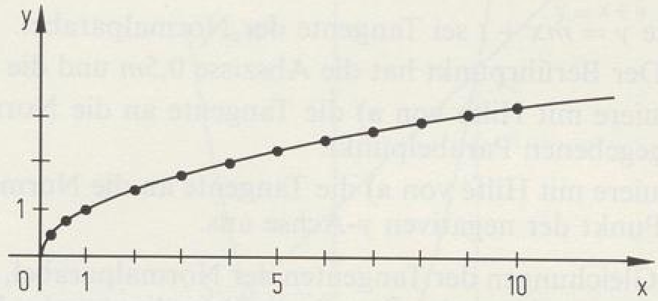


Abb. 152.1 Der Graph der Wurzelfunktion

Aufgaben

1. Bestimme die maximale Definitionsmenge der folgenden Funktionsterme und berechne eine Wertetabelle, sodass du die Graphen der zugehörigen Funktionen zeichnen kannst.
a) $\sqrt{-x}$ **b)** $-\sqrt{-x}$ **c)** $\sqrt{|x|}$ **d)** $-\sqrt{|x|}$

2. Löse wie in Aufgabe **1**:
a) $\sqrt{x^2}$ **b)** $-\sqrt{x^2}$ **c)** $\sqrt{-x^2}$

4.3.2 Die Umkehrfunktion

Eine Funktion f: $x \mapsto y$ mit $y = f(x)$ ordnet jeder Zahl x ihrer Definitionsmenge D genau eine Zahl y ihrer Wertemenge W zu.

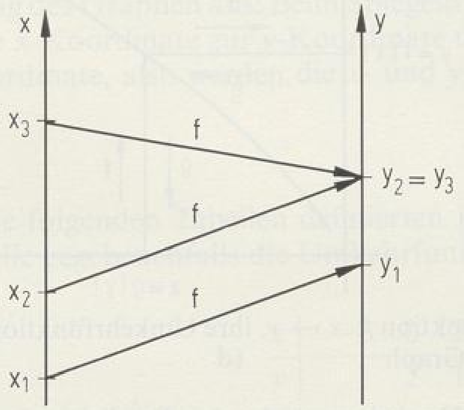


Abb. 153.1 Veranschaulichung einer Funktion f: $x \mapsto y$

Abbildung 153.1 zeigt, dass dabei auch verschiedene x-Werte denselben y-Wert als Funktionswert haben können. Zu einem solchen y-Wert gehört also mehr als ein x-Wert. Kehrt man die Zuordnung um, dann erhält man keine Funktion, weil die umgekehrte Zuordnung nicht eindeutig ist. Es gibt aber Funktionen f, bei denen die Umkehrung der Zuordnung wieder eindeutig ist, also eine neue Funktion g ergibt. f heißt in einem solchen Fall **umkehrbar**, und g nennt man die **Umkehrfunktion** von f (Abbildung 153.2).
Die Umkehrbarkeit einer Funktion bedeutet, dass ihr Graph von jeder Parallelen zur x-Achse höchstens einmal geschnitten wird; denn jedes $y \in W$ darf nur einem einzigen $x \in D$ zugeordnet sein. Die Umkehrfunktion g zur Funktion f: $x \mapsto y$ entsteht dann einfach durch Umkehren der Abbildungsrichtung g: $y \mapsto x$ (Abbildung 154.1). Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion g ist die Wertemenge W der ursprünglichen Funktion f. Die Wertemenge von g ist dann natürlich die Definitionsmenge D von f.

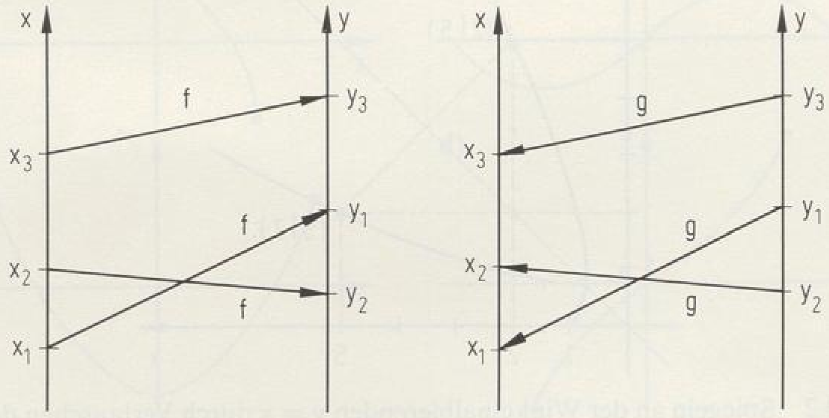


Abb. 153.2 Die Funktion f und ihre Umkehrfunktion g

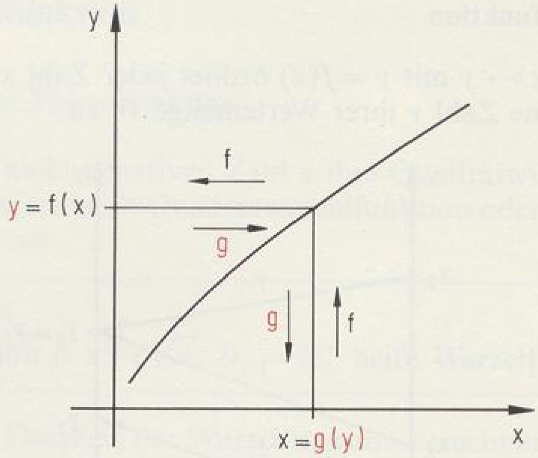


Abb. 154.1 Die Funktion $f\colon x \mapsto y$, ihre Umkehrfunktion $g\colon y \mapsto x$ und ihr gemeinsamer Graph

Schreibt man den Funktionswert y der Funktion $f\colon x \mapsto y$ in der Form $f(x)$, so hat die Funktion f die Funktionsgleichung $y = f(x)$. Hat f eine Umkehrfunktion $g\colon y \mapsto x$ und bezeichnet man ihren Funktionswert mit $g(y)$, so gilt die Gleichung $x = g(y)$. Die Gleichungen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ stellen denselben Zusammenhang zwischen den Elementen der Mengen D und W dar. Bei $y = f(x)$ wird lediglich die Zuordnungsrichtung $x \mapsto y$, bei $x = g(y)$ die Zuordnung $y \mapsto x$ hervorgehoben. In beiden Fällen ergibt sich derselbe Graph.
Bei der Schreibweise $x = g(y)$ für die Umkehrfunktion $g\colon y \mapsto x$ ist y die unabhängige und x die abhängige Variable. Betrachtet man die Funktion g für sich allein, so wird man wie üblich die unabhängige Variable mit x und die abhängige mit y bezeichnen. Diese Änderung der Bezeichnungsweise führt zur

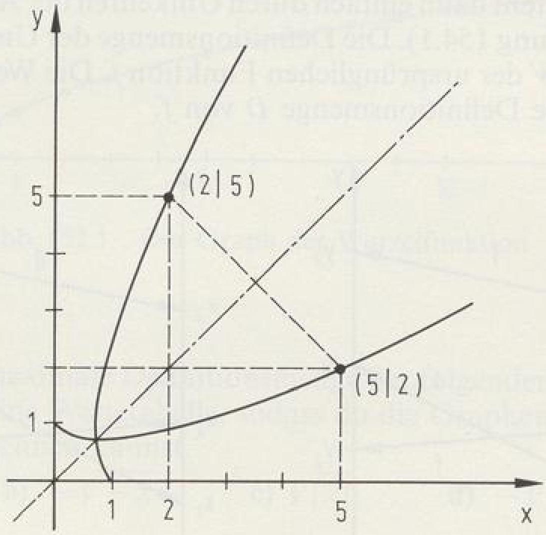


Abb. 154.2 Spiegeln an der Winkelhalbierenden $y = x$ durch Vertauschen der Koordinaten

Gleichung $y = g(x)$. Der zugehörige Graph entsteht aus dem Graphen von $x = g(y)$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ (Abb. 154.2). Wie man die unabhängige Variable bezeichnet, ist eine reine Äußerlichkeit; sie hat nichts mit der durch die Funktion gegebenen Zuordnung zu tun. Sie wirkt sich nur auf die Zeichnung des Graphen aus: Beim Spiegeln an der Winkelhalbierenden $y = x$ wird die x-Koordinate zur y-Koordinate und umgekehrt die y-Koordinate zur x-Koordinate, also werden die x- und y-Koordinaten einfach vertauscht.

Aufgaben

1. Welche der durch die folgenden Tabellen definierten Funktionen $x \mapsto y$ sind umkehrbar? Stelle gegebenenfalls die Umkehrfunktion $y \mapsto x$ durch ihren Graphen dar.

a)

x	-2	0	3
y	1	2	-1

b)

x	-2	0	3
y	1	2	1

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3

d)

x	1	$2{,}7$	$-0{,}5$	4
y	$0{,}25$	$1{,}25$	$-0{,}25$	$-1{,}25$

2. Durch die Gleichungen

a) $5x + 2y - 10 = 0$ **b)** $x - y - 1 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$ **d)** $y - 5 = 0$

wird jeweils auf der Menge der reellen Zahlen eine Funktion $f\colon x \mapsto y$ erklärt. Welche dieser Funktionen sind umkehrbar? Stelle gegebenenfalls die Umkehrfunktion g sowohl in der Form $g\colon y \mapsto x$ als auch in der Form $g\colon x \mapsto y$ durch eine Gleichung dar und zeichne die Graphen.

3. Welche der in Abbildung 155.1 angegebenen Graphen definieren umkehrbare Funktionen?

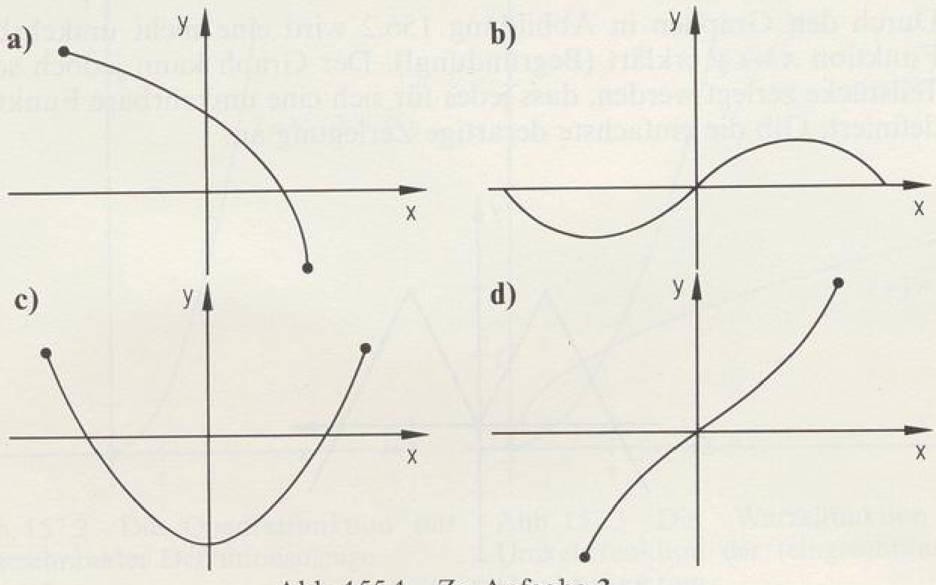


Abb. 155.1 Zu Aufgabe 3

4. Die Graphen der Abbildung 156.1 stellen umkehrbare Funktionen $f\colon x \mapsto y$ dar. Begründe dies! Übertrage sie vergrößert in dein Heft und zeichne jeweils den Graphen der Umkehrfunktion g in der Form $g\colon x \mapsto y$.

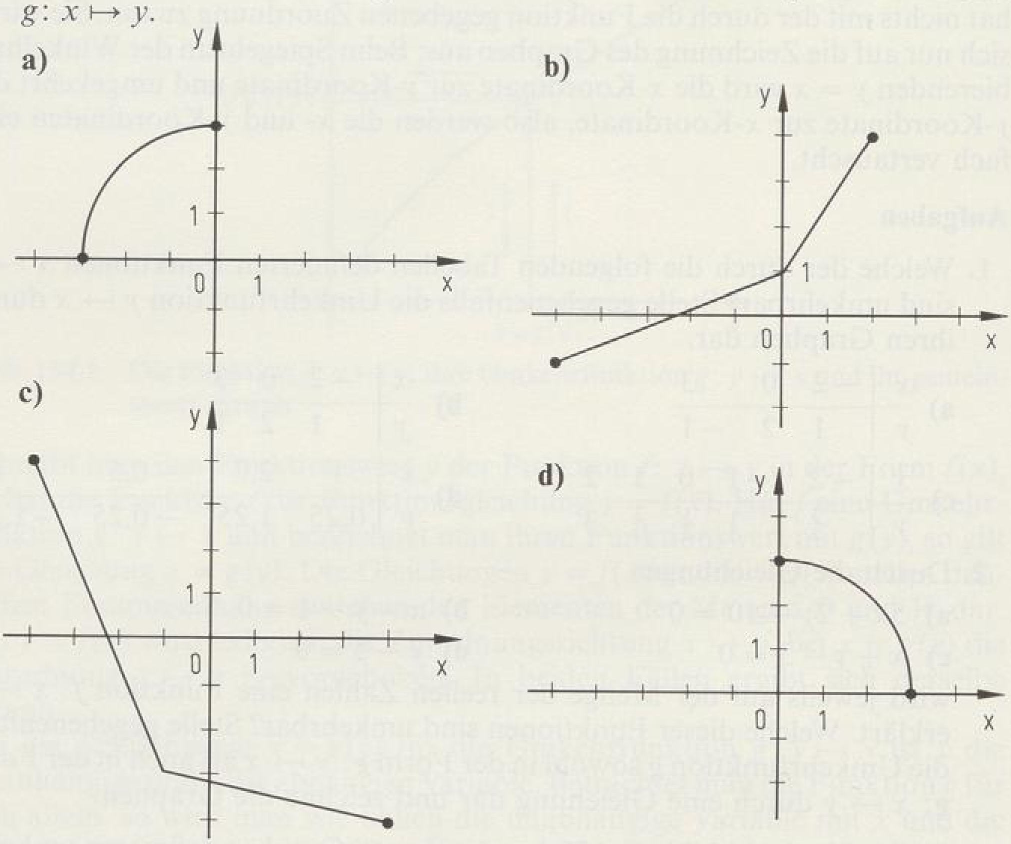


Abb. 156.1 Zu Aufgabe 4

5. Durch den Graphen in Abbildung 156.2 wird eine nicht umkehrbare Funktion $x \mapsto y$ erklärt (Begründung!). Der Graph kann jedoch so in Teilstücke zerlegt werden, dass jedes für sich eine umkehrbare Funktion definiert. Gib die einfachste derartige Zerlegung an.

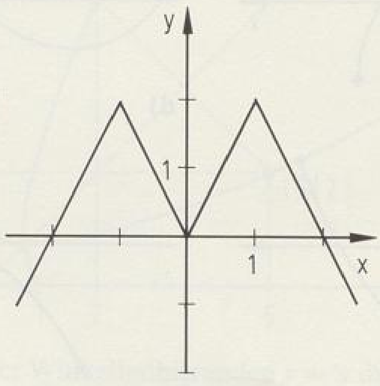


Abb. 156.2 Zu Aufgabe 5

6. Kann man die Graphen **a** und **b** der Abbildung 157.1 in Teilstücke zerlegen, welche umkehrbare Funktionen definieren (vgl. Aufgabe **5**)? Wie könnte die Zerlegung gegebenenfalls vorgenommen werden?

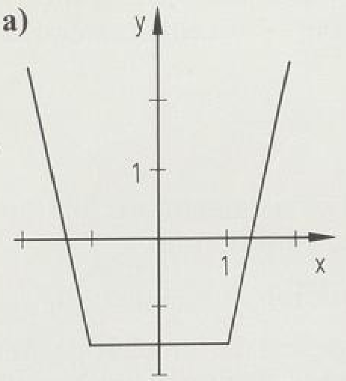


Abb. 157.1 Zu Aufgabe **6**

4.3.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Hat die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ eine Umkehrfunktion? Der Graph der Quadratfunktion ist die Normalparabel. Sie wird von allen Parallelen zur x-Achse, die oberhalb der x-Achse laufen, zweimal geschnitten. Also hat die Quadratfunktion keine Umkehrfunktion. Schränkt man jedoch die Definitionsmenge so ein, dass der Graph nur aus dem steigenden oder nur aus dem fallenden Teil der Parabel besteht, dann kann man die Funktion umkehren. Jetzt trifft jede Parallele zur x-Achse den Graphen höchstens einmal. So hat z. B. die Funktion $x \mapsto x^2$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ eine Umkehrfunktion (Abbildung 157.2). Aus $y = x^2$ mit $x \geqq 0$ folgt $x = \sqrt{y}$ mit $y \geqq 0$. Die Funktion

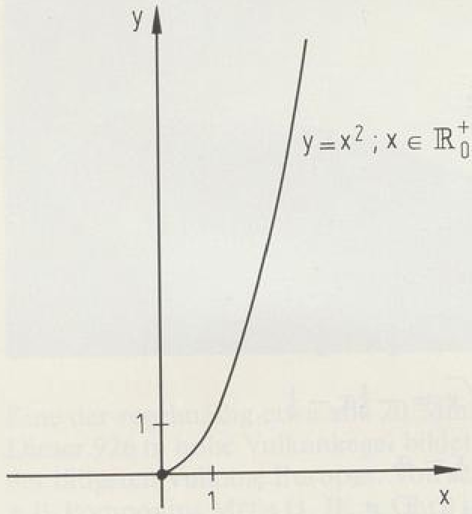


Abb. 157.2 Die Quadratfunktion mit eingeschränkter Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_0^+$

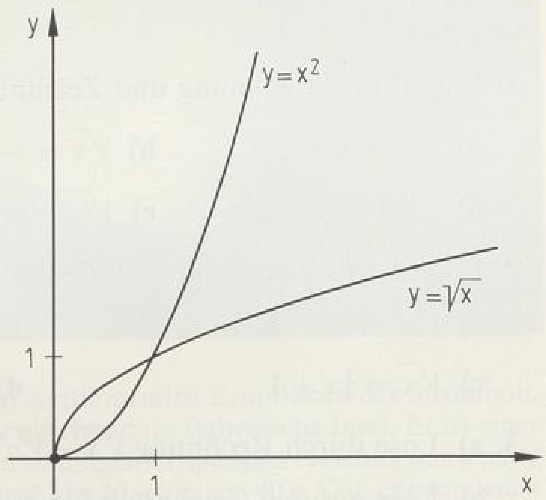


Abb. 157.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der (eingeschränkten) Quadratfunktion

$g: y \mapsto \sqrt{y}$; $y \in \mathbb{R}_0^+$ ist also die Umkehrfunktion zu $f: x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}_0^+$. g ist aber die Wurzelfunktion, die wir in **4.3.1** kennen gelernt haben. Ihr Graph ist demnach die halbe Normalparabel und kann auch mit der Schablone gezeichnet werden. Mit der unabhängigen Variablen x erhält man g: $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ und als Graphen die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Halbparabel (Abbildung 157.3).

Aufgaben

1. Spalte die Quadratfunktion f: $x \mapsto x^2$ in zwei umkehrbare Teilfunktionen f_1 und f_2 auf und gib jeweils die Umkehrfunktion an.
2. Gib die Umkehrfunktion der Wurzelfunktion f: $x \mapsto \sqrt{x}$ an.
3. Bestimme die maximale Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge der Funktion f und zeichne den Graphen. Ermittle gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

   a) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **b)** $f(x) = \sqrt{-x}$ **c)** $f(x) = -\sqrt{|x|}$ **d)** $f(x) = -\sqrt{-x}$

**4.3.4 Graph der Wurzelfunktion und Gerade

Wie bei Normalparabel und Gerade kann man auch bei der Wurzelfunktion die Lage des Graphen zu einer Geraden untersuchen. Die Schnittbedingung liefert eine Wurzelgleichung der Bauart $\sqrt{x} = mx + t$. Sie kann eine Doppellösung (Tangente), eine oder zwei einfache Lösungen (Sekante) oder keine Lösung (Passante) haben.

Aufgaben

1. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = x$ **b)** $\sqrt{x} = -x$ **c)** $\sqrt{x} = |x|$

   d) $\sqrt{|x|} = x$ **e)** $\sqrt{|x|} = -x$ **f)** $\sqrt{|x|} = |x|$

2. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = 2x - 6$ **b)** $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

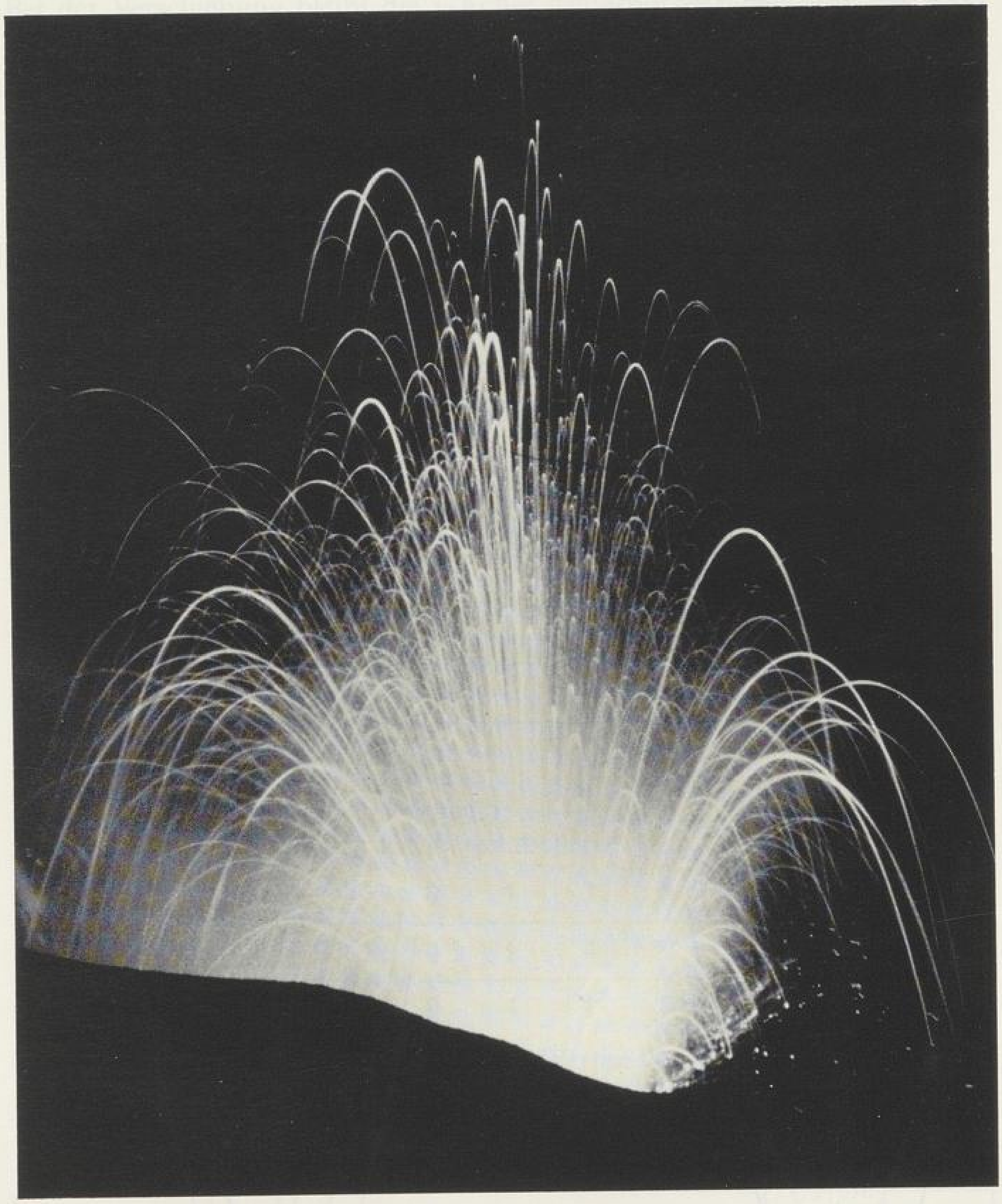
   c) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}x + 1$ **d)** $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

3. **a)** Löse durch Rechnung $\sqrt{x} - \sqrt{a} = x - a$.

   b) Löse **a** durch Zeichnung für $a = 0$; $\frac{1}{4}$; 1; 4.

4. Bestimme t so, dass $y = \frac{1}{3}x + t$ Tangente an den Graphen der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist.

5 Die allgemeine quadratische Funktion



Eine der regelmäßig etwa alle 20 Minuten stattfindenden Eruptionen des Stromboli. Dieser 926 m hohe Vulkankegel bildet die gleichnamige italienische Insel. Er ist einer der tätigsten Vulkane Europas. Von seinen ständigen Eruptionen berichtet uns bereits z. B. Pomponius MELA (1. Jh. n. Chr.) in Buch II/120 seiner um 40 n. Chr. entstandenen *De chorographia libri tres* – »Drei Bücher Erdbeschreibung« –, wo er davon spricht, dass die Insel Strongyle – Στρογγύλη, die Runde, hieß sie nämlich in der Antike – mit einem ewigen Feuer lodere.

5 Die allgemeine quadratische Funktion

5.1 Die verschobene Normalparabel

5.1.1 Verschiebung in y-Richtung

Die Funktionswerte der Funktion $g\colon x \mapsto x^2 + t$, $x \in \mathbb{R}$ unterscheiden sich von den Funktionswerten der Funktion $f\colon x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$ für jedes x um den Wert t.
Wählen wir z. B. $t = 2$, dann erhalten wir folgende Tabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
x^2+2	11	6	3	2	3	6	11

Der Graph von $g\colon x \mapsto x^2 + 2$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschieben um 2 in y-Richtung (Abbildung 160.1 **a)**).

Allgemein gilt:

> Der Graph von $x \mapsto x^2 + t$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um t in y-Richtung.

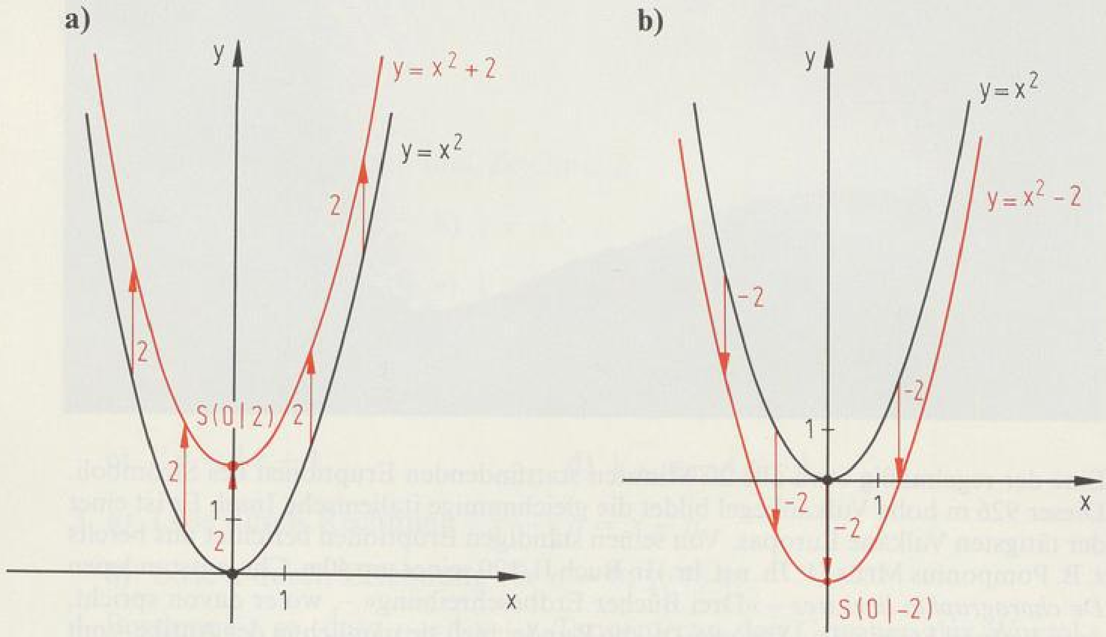


Abb. 160.1 Verschiebung der Normalparabel in y-Richtung

Beachte: Ist t negativ, dann wird die Normalparabel um $|t|$ nach unten verschoben (Abbildung 160.1 **b**).

Bei der Verschiebung bleibt die y-Achse weiterhin Parabelachse, der neue Scheitel ist $(0|t)$, die neue Wertemenge $[t; +\infty[$.

Aufgaben

1. Zeichne die Graphen zur Funktionsgleichung:
   a) $y = x^2 + 1$ **b)** $y = x^2 - 1$
   c) $y = x^2 + 2{,}5$ **d)** $y = x^2 - 3{,}5$.
2. Gib Scheitel und Wertemenge der Parabel an.
   a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = x^2 + 100$
   c) $y = x^2 - 0{,}01$ **d)** $y = x^2 - 2\sqrt{2}$
3. Zeichne den Graphen und bestimme die Nullstellen der zugehörigen Funktion.
   a) $y = x^2 - 1$ **b)** $y = x^2 - 2{,}25$
   c) $y = x^2 - 0{,}25$ **d)** $y = x^2 + 1{,}69$
   e) $y = x^2 - \frac{9}{2}$ **f)** $y = x^2 - 1\frac{1}{2}$
4. Zeichne die Graphen, die zu den folgenden Funktionsgleichungen gehören. (Hinweis: Verwende die Umkehrfunktion!)
   a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = \sqrt{x+2}$ **c)** $y = -\sqrt{x+1}$

5.1.2 Verschiebung in x-Richtung

Den Zusammenhang der Funktionen $f\colon x \mapsto x^2$ und $g\colon x \mapsto (x-3)^2$ erkennt man leicht durch Vergleich der Wertetabellen:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$(x-3)^2$	…	…	…	9	4	1	0	1	4	9

Die Werte von $(x-3)^2$ stimmen mit den Werten von x^2 überein, stehen aber unter den um 3 größeren x-Werten. Der Graph von g entsteht also aus der Normalparabel durch Verschiebung um 3 in x-Richtung (Abbildung 162.1 **a**).
Allgemein gilt:

> Der Graph von $x \mapsto (x-s)^2$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um s in x-Richtung.

Beachte: Ist s negativ, dann wird die Normalparabel um $|s|$ nach links verschoben (Abbildung 162.1 **b**).

Die verschobene Parabel hat die Achse $x = s$ und den Scheitel $(s|0)$. Die Wertemenge bleibt $\mathbb{R}_0^+$.

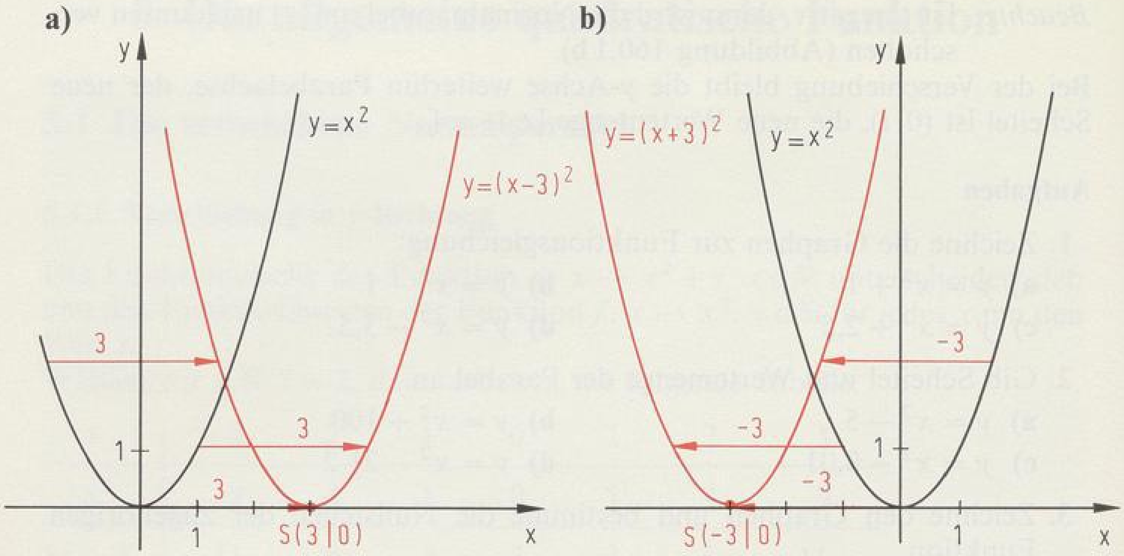


Abb. 162.1 Verschiebung der Normalparabel in x-Richtung

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y=(x-1)^2$ **b)** $y=(x+1)^2$

c) $y=(x-2{,}5)^2$ **d)** $y=(x+\frac{7}{2})^2$

e) $y=(2-x)^2$ **f)** $y=(-x-3)^2$.

2. Gib den Scheitel und die Gleichung der Parabelachse an.

a) $y=(x-1{,}5)^2$ **b)** $y=(x+100)^2$

c) $y=(x-2\sqrt{3})^2$ **d)** $y=(-3+x)^2$

e) $y=(3-x)^2$ **f)** $y=(-3-x)^2$

3. Gib den Scheitel und die Gleichung der Achse an.

a) $y=x^2-2x+1$ **b)** $y=x^2+6x+9$

c) $y=x^2+5x+6{,}25$ **d)** $y=x^2-\frac{1}{50}x+\frac{1}{10000}$

•4. a) Erstelle Wertetabellen für die Funktionen $f\colon x\mapsto\sqrt{x}$ und $g\colon x\mapsto\sqrt{x-3}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Werten? Wie erhält man also den Graphen von g aus dem von f?

b) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y=\sqrt{x-s}$ für $s=1$ bzw. $s=2$.

5.1.3 Zusammengesetzte Verschiebung

Eine beliebige Verschiebung lässt sich zusammensetzen aus einer Verschiebung in x-Richtung und einer Verschiebung in y-Richtung, wie Abbildung 163.1 zeigt.

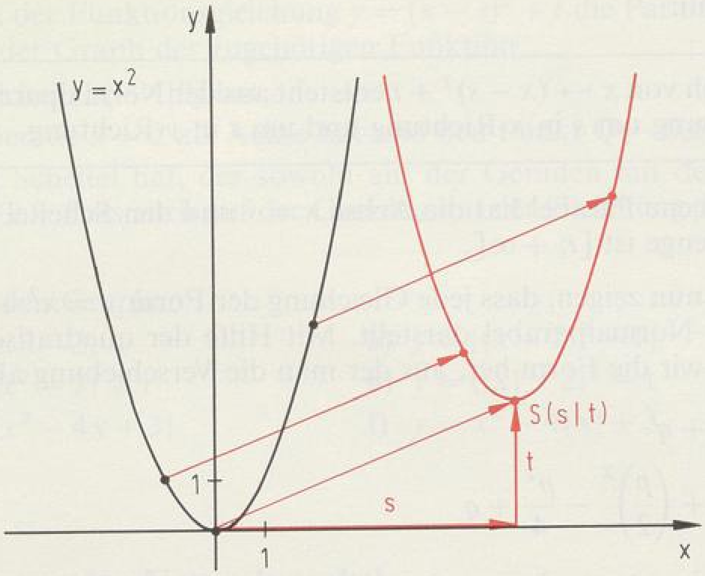


Abb. 163.1 Verschiebung der Normalparabel um s in x-Richtung und um t in y-Richtung

Den Funktionsterm der verschobenen Parabel erhalten wir durch Kombination der beiden uns schon bekannten Verschiebungen:

Normalparabel	$x \mapsto x^2$
Verschiebung um s in x-Richtung	$x \mapsto (x-s)^2$
Verschiebung um t in y-Richtung	$x \mapsto (x-s)^2 + t$

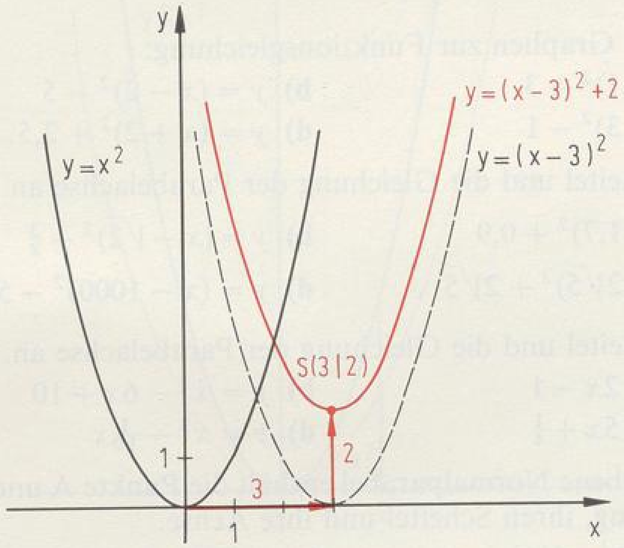


Abb. 163.2 Schrittweise Verschiebung der Normalparabel um $s = 3$ nach rechts und um $t = 2$ nach oben

Allgemein gilt:

Der Graph von $x \mapsto (x-s)^2 + t$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um s in x-Richtung und um t in y-Richtung.

Die verschobene Parabel hat die Achse $x = s$ und den Scheitel $S(s|t)$. Die Wertemenge ist $[t; +\infty[$.

Wir können nun zeigen, dass jede Gleichung der Form $y = x^2 + px + q$ eine verschobene Normalparabel darstellt. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung stellen wir die Form her, aus der man die Verschiebung ablesen kann:

$$y = x^2 + px + q$$

$$y = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

Das ist eine Normalparabel, die um $-\frac{p}{2}$ in x-Richtung und um $\frac{4q-p^2}{4}$ in y-Richtung verschoben ist. Ihr Scheitel ist $\left(-\frac{p}{2}\middle|\frac{4q-p^2}{4}\right)$.

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:
a) $y = (x-1)^2 + 3$ **b)** $y = (x-2)^2 - 5$
c) $y = (x+3)^2 - 1$ **d)** $y = (x+2)^2 + 2{,}5$.

2. Gib den Scheitel und die Gleichung der Parabelachse an.
a) $y = (x-1{,}7)^2 + 0{,}9$ **b)** $y = (x-\sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}$
c) $y = (x+2\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}$ **d)** $y = (x-1000)^2 - 5003$

3. Gib den Scheitel und die Gleichung der Parabelachse an.
a) $y = x^2 - 2x - 1$ **b)** $y = x^2 - 6x + 10$
c) $y = x^2 + 5x + \frac{1}{4}$ **d)** $y = x^2 - \frac{1}{10}x$

4. Eine verschobene Normalparabel enthält die Punkte A und B. Bestimme ihre Gleichung, ihren Scheitel und ihre Achse.
a) $A(2|1)$; $B(-3|1)$ **b)** $A(0|0)$; $B(-2|-8)$
c) $A(0|3)$; $B(1|0)$ **d)** $A(2|3)$; $B(2|4)$ (!)

5. Wähle in der Funktionsgleichung $y=(x-s)^2+t$ die Parameter s und t so, dass der Graph der zugehörigen Funktion

a) den Scheitel $(-4|9)$ hat;

b) die Gerade $x=2$ als Achse hat und den Punkt $Q(-0{,}5|4)$ enthält;

c) einen Scheitel hat, der sowohl auf der Geraden mit der Gleichung $y=3x+1$ als auch auf der Geraden mit der Gleichung $y=-3x-7$ liegt.

●6. Zeichne den Graphen:

a) $y=|x^2-2|$ **b)** $y=|(x-2)^2-1|$

c) $y=|x^2-2|+1$ **d)** $y=(|x|-2)^2-1$

e) $y=|x^2-4x+3|$ **f)** $y=x^2-4|x|+3$

5.2 Streckung der Normalparabel

Im Abschnitt **5.1** haben wir quadratische Funktionen betrachtet, bei denen der Term x^2 den Koeffizienten 1 hatte. Bei der allgemeinen quadratischen Funktion haben wir aber den quadratischen Term ax^2 mit $a \neq 0$. Der zugehörige Graph heißt (allgemeine) **Parabel**. Die Normalparabel ist der Sonderfall für $a=1$. Um zu untersuchen wie sich der Faktor a auf den Graphen auswirkt, vergleichen wir Funktionen vom Typ $g_a: x \mapsto ax^2$ mit $f: x \mapsto x^2$. Für die Werte $a=2$, $a=\frac{1}{2}$ und $a=-2$ erhalten wir folgende Wertetabellen:

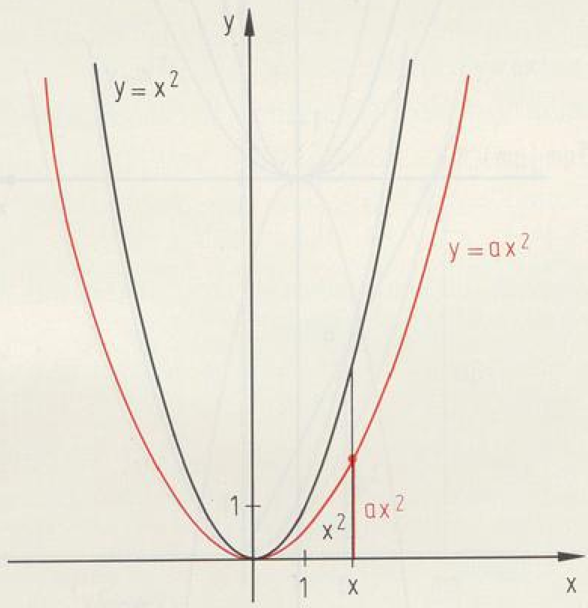


Abb. 165.1 Formänderung der Parabeln durch den Faktor a bei x^2, hier für $0<a<1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5
$-2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

Abbildung 165.1 zeigt, dass a die Gestalt der Parabel beeinflusst. Jede Ordinate x^2 wird mit dem Faktor a zu ax^2 gestreckt. Ist $a > 1$, dann ist die Parabel schlanker als die Normalparabel, ist $0 < a < 1$, dann ist die Parabel breiter als die Normalparabel. Bei negativem a ist die Form durch $|a|$ festgelegt, die Parabel aber an der x-Achse gespiegelt.
Die Abbildung 166.1 zeigt Beispiele für den Einfluss von a auf die Form der Parabel.

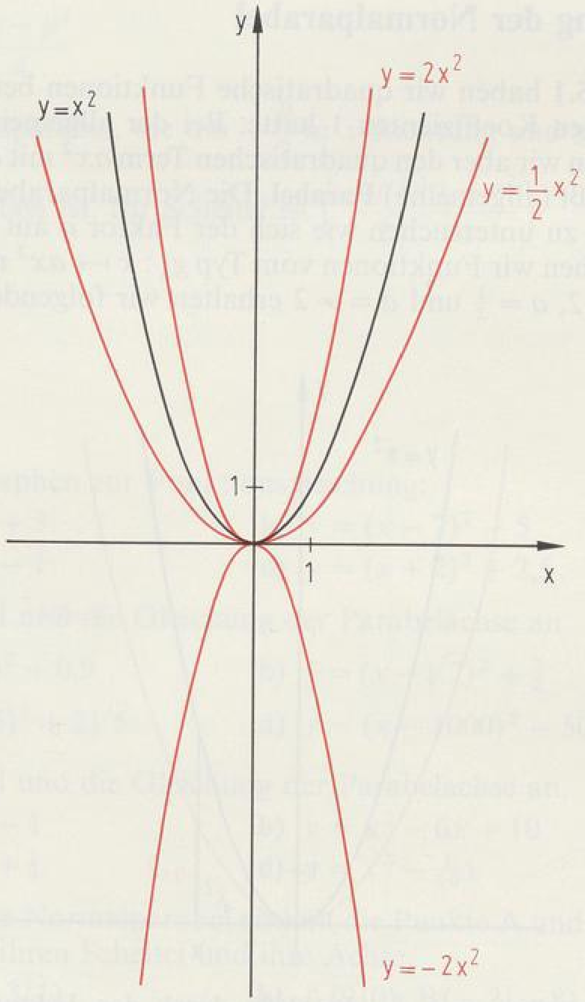


Abb. 166.1 Die Parabel $y = ax^2$ für $a = -2; \frac{1}{2}, 1; 2$

Zusammenfassend halten wir fest:

$a > 0$:	Parabel nach oben offen
$a < 0$:	Parabel nach unten offen
$\lvert a \rvert = 1$:	Normalparabel
$\lvert a \rvert > 1$:	schlanke Parabel
$\lvert a \rvert < 1$:	breite Parabel

Bei den Formänderungen durch den Faktor a bleiben der Scheitel $(0|0)$ und die Achse $x = 0$ der Parabel erhalten. Für $a > 0$ bleibt auch die Wertemenge $\mathbb{R}_0^+$, während für $a < 0$ die Wertemenge $\mathbb{R}_0^-$ ist.
Dem Augenschein nach haben die Parabeln $y = x^2$ und $y = ax^2$ für $|a| \neq 1$ verschiedene Form. Tatsächlich sind aber alle derartigen Parabeln zueinander ähnlich; man kann sie nämlich durch geeignete zentrische Streckungen ineinander überführen.
Wenden wir die zentrische Streckung mit dem Zentrum $(0|0)$ und dem Streckfaktor $m \neq 0$ auf die Punkte $\mathrm{P}(p|p^2)$ der Normalparabel an, dann ergeben sich die Bildpunkte $\mathrm{P}'(mp|mp^2)$. Für diese Bildpunkte gilt $x = mp$ und $y = mp^2 = \frac{1}{m}(mp)^2$ und damit $y = \frac{1}{m}x^2$. Für $m = \frac{1}{a}$ liegen also die Bildpunkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = ax^2$. Damit haben wir

Satz 167.1: Alle Parabeln mit den Gleichungen $y = ax^2$; $a \neq 0$ sind zueinander ähnlich.

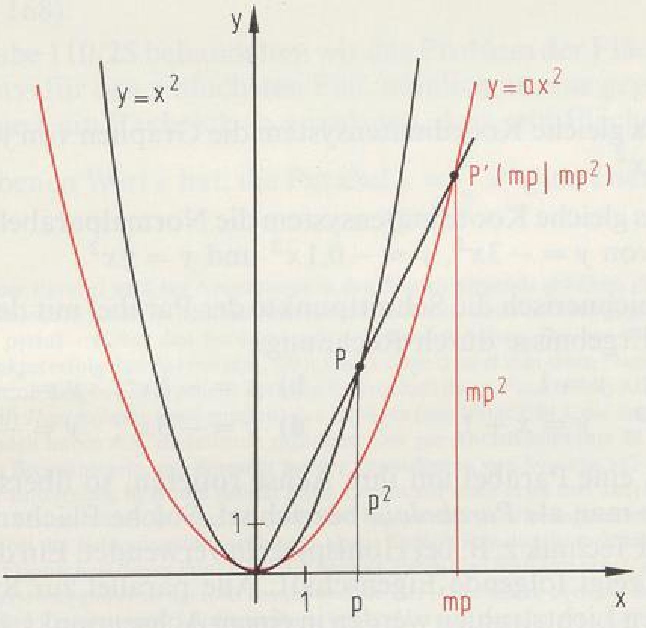


Abb. 167.1 Zentrische Streckung der Normalparabel mit Zentrum $(0|0)$ und Streckfaktor m

**Zum Namen »Parabel«

Wie auf Seite 145 angemerkt, geht das Fachwort *Parabel* auf APOLLONIOS von Perge (um 262–um 190 v. Chr.) zurück. Er beweist in Buch I,11 seiner acht Bücher über die Kegelschnitte – I bis IV sind auf griechisch, V bis VII auf arabisch überliefert, VIII ist verloren – folgende interessante Eigenschaft, die bereits MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) und ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) bekannt war (siehe dazu Abbildung 168.1):

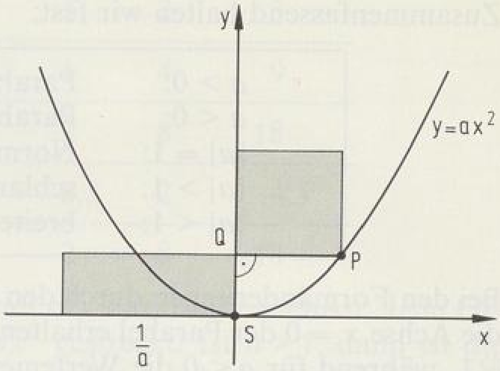


Abb. 168.1 $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{a} \cdot \overline{SQ}$

Das von einem beliebigen Punkt P der Parabel $y = ax^2$ auf die Parabelachse gefällte Lot schneidet auf dieser eine Strecke [SQ] ab, sodass das Quadrat über dem Lot flächengleich einem Rechteck ist, dessen eine Seite dieser Achsenabschnitt [SQ] ist und dessen andere Seite die Länge $\frac{1}{a}$ hat, d. h., daß stets $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{a} \cdot \overline{SQ}$ gilt. (Vgl. Aufgabe 169/**5.**)

Wegen dieses Gleichseins (= παραβολή [parabolē]) der beiden Flächeninhalte gab APOLLONIOS der Kurve $y = ax^2$ den Namen παραβολή, der zu *parabola* latinisiert und als *Parabel* eingedeutscht wurde.

Aufgaben

1. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem die Graphen von $y = x^2$, $y = 4x^2$ und $y = \frac{1}{4}x^2$.

2. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem die Normalparabel $y = x^2$ und die Graphen von $y = -3x^2$, $y = -0{,}1x^2$ und $y = \frac{3}{5}x^2$.

3. Ermittle zeichnerisch die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden und prüfe die Ergebnisse durch Rechnung.

a) $y = x^2$; $y = 1$ **b)** $y = -\frac{1}{3}x^2$; $y = -3$

c) $y = 4x^2$; $y = x + 1$ **d)** $y = -3x^2$; $y = -6x + 3$

4. Lässt man eine Parabel um ihre Achse rotieren, so überstreicht sie eine Fläche, die man als *Paraboloid* bezeichnet. Solche Flächen werden in der Physik und Technik z. B. bei Hohlspiegeln verwendet. Ein derartiger Parabolspiegel zeigt folgende Eigenschaft: Alle parallel zur Symmetrieachse einfallenden Lichtstrahlen werden in einem Achsenpunkt, dem so genannten **Brennpunkt**, vereinigt. Seine Entfernung vom Scheitel heißt **Brennweite**. Hat ein Achsenschnitt des Spiegels (bei passender Wahl des Koordina-

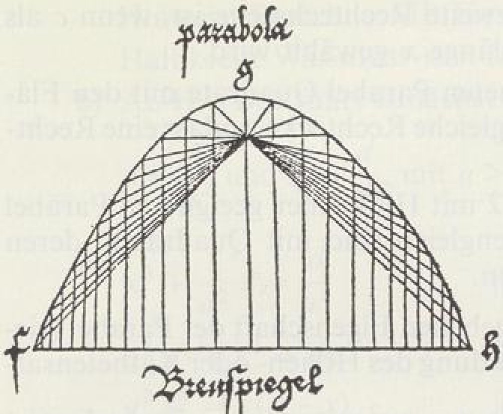


Abb. 169.1 Der parabolische Brennspiegel aus Albrecht DÜRERS (1471–1528) *Underweysung der messung mit dem zirckel vnd richtscheyt in Linien ebnen vnnd gantzen corporen*, Nürnberg 1525

tensystems) die Gleichung $y = ax^2$, so ist $F\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{4a}\right)$ der Brennpunkt.*

a) Wie groß ist die Brennweite eines Parabolspiegels, dessen Achsenschnitt der Graph von $y = \frac{1}{12}x^2$, $-6 \leqq x \leqq 6$, ist (Längeneinheit 1 cm)?

b) Zeichne den Achsenschnitt eines Parabolspiegels von 2 cm Brennweite und 8 cm Durchmesser. (Der Scheitel sei der Ursprung, die Spiegelachse die y-Achse des Koordinatensystems.)
Im Brennpunkt befinde sich eine Lichtquelle. Zeichne den Verlauf der reflektierten Lichtstrahlen.

5. a) Beweise die von APOLLONIOS angegebene Eigenschaft der Parabel (siehe Seite 168).

b) In Aufgabe 110/**25** behandelten wir das Problem der Flächenanlegung. Zeige, dass für den einfachsten Fall, nämlich an eine gegebene Strecke der Länge b ein Rechteck so anzulegen, dass sein Flächeninhalt einen vorgegebenen Wert c hat, die Parabel $y = \frac{1}{b}x^2$ gute Dienste tut. Weise

* Der Brennpunkt einer Parabel wird bei APOLLONIOS in den *Konika* nirgends erwähnt, die Brennpunkte von Hyperbel und Ellipse jedoch schon. Möglicherweise könnte er ihn in seiner verloren gegangenen Schrift *Περὶ τοῦ πυρίου* (peri tu pyriu) – »Über den Brennspiegel« – behandelt haben. Die uns bekannte früheste Erwähnung dieses Punktes erfolgt bei PAPPOS (um 300 n. Chr.), ohne dass er ihm einen Namen gibt. Es lässt sich jedoch nicht belegen, ob die oben angegebene optische Eigenschaft dieses Punkts dem Altertum bekannt war; denn auch die Schrift *Περὶ πυρείων* (peri pyreion) des DIOKLES (um 100 n. Chr.), die angeblich parabolische Brennspiegel behandelt haben soll, ist verloren gegangen. Der gar ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) zugeschriebene Bau von Brennspiegeln, mit denen er bei der Verteidigung von Syrakus 212 v. Chr. die römische Flotte aus größerer Entfernung in Brand gesetzt habe, beruht auf einer etwa drei Jahrhunderte später entstandenen Legende. Erstmals lesen wir von der optischen Eigenschaft des Brennpunktes bei ANTHEMIOS von Tralleis († 534), der bei der Erbauung der berühmten Hagia Sophia Konstantinopels tätig war. Das Abendland erhält von der Eigenschaft dieses Punktes erst Kenntnis durch die GERHARD VON CREMONA (1114–1187) zugeschriebene Übersetzung *liber de speculis comburentibus*, der *Abhandlung über die Brennspiegel nach Kegelschnitten* des großen Physikers und Mathematikers IBN AL-HAITAM, genannt ALHAZEN (um 965–1039), der sich bei seinen Untersuchungen auf griechische Quellen stützte. Johannes KEPLER (1571–1630) gibt schließlich 1604 diesem Punkt den lateinischen Namen **focus** (= Feuerstätte, Opferherd). Die Eindeutschung **Brennpunkt** fand durch das *Mathematische Lexicon* (1716) des Christian VON WOLFF (1679–1754) Verbreitung.

dazu nach, dass y die gesuchte zweite Rechtecksseite ist, wenn c als Inhalt eines Quadrats der Seitenlänge x gewählt wird.

c) Verwandle mit Hilfe einer geeigneten Parabel Quadrate mit den Flächeninhalten 1; 4; 9; 16 in flächengleiche Rechtecke, sodass eine Rechtecksseite stets die Länge 4 hat.

d) Lege an eine Strecke der Länge 2 mit Hilfe einer geeigneten Parabel Rechtecke so an, dass sie flächengleich sind mit Quadraten, deren Seiten die Längen $\frac{3}{2}$ bzw. 4 haben.

6. Mit Hilfe der von APOLLONIOS angegebenen Eigenschaft der Parabel (siehe Seite 168) kann diese unter Verwendung des Höhen- oder Kathetensatzes punktweise konstruiert werden, da $y = ax^2$ mit $x^2 = \frac{1}{a}y$ äquivalent ist (Abbildung 170.1). Konstruiere folgende Parabeln punktweise:
a) $y = 2x^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **c)** $y = 4x^2$ **d)** $y = \frac{1}{4}x^2$

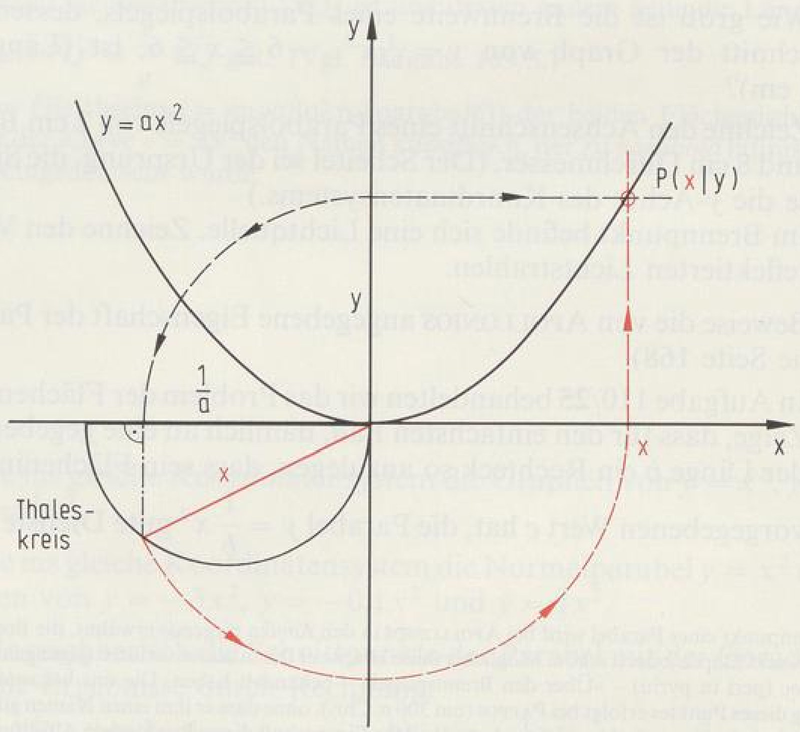


Abb. 170.1 Punktweise Konstruktion der Parabel $y = ax^2$ mit Hilfe des Kathetensatzes $x^2 = \frac{1}{a}y$

7. Wie Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) die kubische Gleichung $x^3 + px = q$ für positive p und q geometrisch löste:

a) *Vorübung:* Zeige, dass der im 1. Quadranten gelegene Halbkreis mit dem Mittelpunkt $M(r|0)$ und dem Radius r die Gleichung $y = \sqrt{x(2r - x)}$ hat.

Hinweis: Berechne $\overline{MP}$ für einen beliebigen Punkt $P(x|y)$ auf dem Halbkreis. Was muss sich für $\overline{MP}$ ergeben?

b) AL-HAYYAM führt zunächst neue Koeffizienten ein; er setzt

$p =: \frac{1}{a^2}$ und $q =: \frac{d}{a^2}$, mit $a > 0$, und erhält die Gleichung

$$x^3 + \frac{1}{a^2}x = \frac{d}{a^2} \qquad \| \cdot a^2 x \quad \text{mit} \quad x \neq 0$$

$$a^2x^4 + x^2 = dx \qquad \| -x^2$$

$$a^2x^4 = x(d-x) \qquad \| \sqrt{}$$

$$ax^2 = \sqrt{x(d-x)}$$

Links steht der Funktionsterm der Parabel $y = ax^2$, rechts der Funktionsterm des Halbkreises $y = \sqrt{x(d-x)}$ um $M(\frac{1}{2}d|0)$ mit Durchmesser d. Die Abszisse des von $(0|0)$ verschiedenen Schnittpunkts dieser beiden Graphen löst also die letzte Gleichung und damit die kubische Gleichung $x^3 + px = q$ (Abbildung 171.1). Die Größen $\frac{1}{a}$ und d erhält man aus p und q mittels des Höhen- oder Kathetensatzes: $y = ax^2$ lässt sich nach Aufgabe **6** punktweise konstruieren. Löse nach diesem Verfahren nach geeigneter Wahl der Einheit

1) $x^3 + 6x = 20$, **2)** $x^3 + 3x = 4$, **3)** $4x^3 + 7x = 24$.

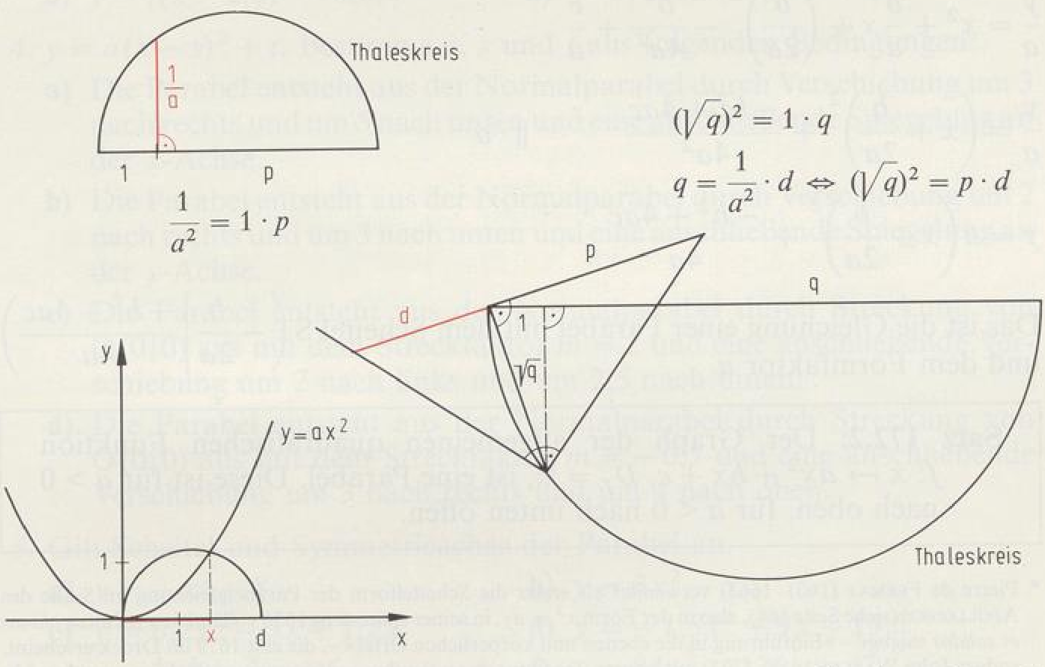


Abb. 171.1 Geometrische Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + 4x = 10$ nach Omar AL-HAYYAM

5.3 Die allgemeine verschobene Parabel

Gegeben sei eine Parabel mit dem Scheitel $S(s|t)$, deren Form durch den Formfaktor a festgelegt ist. Zur Bestimmung ihrer Gleichung gehen wir von der Normalparabel $y = x^2$ aus und strecken sie mit dem Faktor a zur Parabel $y = ax^2$. Eine Verschiebung dieser Parabel um s in x-Richtung erreichen wir, wenn wir x durch $x - s$ ersetzen; das ergibt die Parabel $y = a(x-s)^2$. Schließlich verschieben wir diese Parabel um t in y-Richtung und erhalten $y = a(x-s)^2 + t$. Dieses Ergebnis fassen wir zusammen zum

> **Satz 172.1:** Eine Parabel mit dem Scheitel $S(s|t)$ und dem Formfaktor $a \neq 0$, deren Achse parallel zur y-Achse ist, hat die Gleichung $y = a(x-s)^2 + t$.
> Diese Gleichung heißt **Scheitelform** der Parabelgleichung.*

Jetzt können wir zeigen, dass der Graph einer allgemeinen quadratischen Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ eine Parabel ist. Dazu bringen wir die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ auf die Scheitelform einer Parabelgleichung. Als Hilfsmittel verwenden wir die quadratische Ergänzung.

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \| : a$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad \| \text{ quadratische Ergänzung}$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \qquad \| \cdot a$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$ und dem Formfaktor a.

> **Satz 172.2:** Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion $f\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$, $D_f = \mathbb{R}$, ist eine Parabel. Diese ist für $a > 0$ nach oben, für $a < 0$ nach unten offen.

* Pierre de FERMAT (1601–1665) verwendet als erster die Scheitelform der Parabelgleichung im Sinne des APOLLONIOS (siehe Seite 168), also in der Form $x^2 = ay$, in seiner spätestens 1636 vollendeten *Ad locos planos et solidos isagoge* – »Einführung in die ebenen und körperlichen Örter« –, die erst 1679 im Druck erscheint, sodass John WALLIS (1616–1703) mit seinem *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis* – »Abhandlung über die nach einer neuen Methode dargestellten Kegelschnitte« – von 1655 der Ruhm der Erstveröffentlichung zusteht.

Aus der obigen Rechnung folgt weiter

Satz 173.1: Die allgemeine quadratische Funktion $f\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$, $D_f = \mathbb{R}$, hat für $a > 0$ die Wertemenge $W_f = [t; +\infty[$, für $a < 0$ die Wertemenge $W_f =]-\infty; t]$, wobei t die Scheitelordinate $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ des Graphen G_f von f ist. G_f hat die Symmetrieachse $x = s$, wobei s die Scheitelabszisse $-\frac{b}{2a}$ ist.

Aufgaben

1. Bestimme Scheitel und Symmetrieachse und zeichne die Parabel.

a) $y = -(x-1)^2 + 3$ **b)** $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4$

c) $y = 2(x-2{,}5)^2 + 2{,}5$ **d)** $y = -0{,}25(x+2)^2 + 1$

2. Bestimme a und t so, dass die zugehörige Parabel $y = ax^2 + t$

a) S(?|4) als Scheitel hat und durch den Punkt P(3|−2) läuft;

b) ihren Scheitel auf der Gerade $y = 0{,}5x - 4$ hat und die x-Achse bei $x = 4$ schneidet;

c) die Geraden $x = 2$ und $x = -3$ in den Punkten mit den Ordinaten $-0{,}4$ bzw. $2{,}6$ schneidet.

3. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y = |(x-2{,}5)^2 - 6{,}25|$ **b)** $y = |-0{,}5(x+1)^2 + 1|$.

4. $y = a(x-s)^2 + t$. Bestimme a, s und t aus folgenden Bedingungen:

a) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 3 nach rechts und um 5 nach unten und eine anschließende Spiegelung an der x-Achse.

b) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 2 nach rechts und um 3 nach unten und eine anschließende Spiegelung an der y-Achse.

c) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Streckung von O(0|0) aus mit dem Streckfaktor $m = 2$ und eine anschließende Verschiebung um 2 nach links und um 2,5 nach unten.

d) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Streckung von O(0|0) aus mit dem Streckfaktor $m = -0{,}5$ und eine anschließende Verschiebung um 3 nach rechts und um 4 nach oben.

5. Gib Scheitel und Symmetrieachse der Parabel an.

a) $y = -x^2 - 8$ **b)** $y = 3x^2 - x$

c) $y = 0{,}2x^2 - 3x + 1{,}25$ **d)** $y = -1{,}5x^2 + 9x - 13{,}5$

e) $y = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{10}x - 6$ **f)** $y = 84x^2 - 126x + 47$

g) $y = x^2 + \sqrt{5}x - 1$ **h)** $y = \sqrt{\tfrac{3}{2}}x^2 + 3x + 4$

6. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y = x^2 - 4x + 1$ **b)** $y = -x^2 - 7x - 11{,}25$
c) $y = x^2 - 2{,}4x - 3{,}56$ **d)** $y = -x^2 + x + 3{,}25$
e) $y = 3x^2 + 24x - 47$ **f)** $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + \frac{15}{2}$
g) $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2{,}075$ **h)** $y = 0{,}25x^2 + 1{,}4x + 1{,}96$

8. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y = |x^2 + 4x|$ **b)** $y = |-x^2 + 2x|$
c) $y = |-x^2 + 6x - 6|$ **d)** $y = |-0{,}5x^2 + 1{,}5x - 1{,}625|$

9. Bestimme die Funktionsgleichung einer Parabel, die durch die Punkte A, B und C läuft.

a) A$(-1|9)$, B$(1|1)$, C$(4|4)$ **b)** A$(0|2)$, B$(2|-2)$, C$(-2|0)$
c) A$(0|6)$, B$(-2|4)$, C$(3|1{,}5)$ **d)** A$(-1|2)$, B$(1|-6)$, C$(2{,}5|9)$

10. Eine Parabel mit dem Scheitel S enthält den Punkt P. Bestimme die Funktionsgleichung.

a) S$(3|-1)$, P$(1|1)$ **b)** S$(0{,}4|0{,}8)$, P$(2|-12)$
c) S$(0|-8)$, P$(10|2)$ **d)** S$(-2|9)$, P$(-7|1)$

11. Eine Parabel mit der Symmetrieachse $x = s$ enthält die Punkte P und Q. Bestimme die Funktionsgleichung.

a) $s = 4$, P$(1|-9{,}5)$, Q$(5|-1{,}5)$ **b)** $s = -5$, P$(-7|-1)$, Q$(-2|3)$

•**12.** Die Parabel $y = 2x^2 - 6x + 4$ wird

a) an der x-Achse **b)** an der y-Achse
c) am Ursprung $(0|0)$ **d)** an der Geraden $x = 1$
e) an der Geraden $y = 1$ **f)** an der Geraden $y = x$

gespiegelt. Gib die Gleichung der gespiegelten Parabel an.

•**13.** Zeichne den Graphen.

a) $y = 2x^2 - |6x + 4|$ **b)** $y = 2x^2 - 6|x| + 4$
c) $y = |2x^2 - 6x| + 4$ **d)** $|y| = 2x^2 - 6x + 4$

Die Wurfparabel. Bis in die Neuzeit hinein beherrschten die Vorstellungen des griechischen Philosophen ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) die Lehre von der Bewegung der Körper, denen zufolge die Bahn eines geworfenen Körpers sich

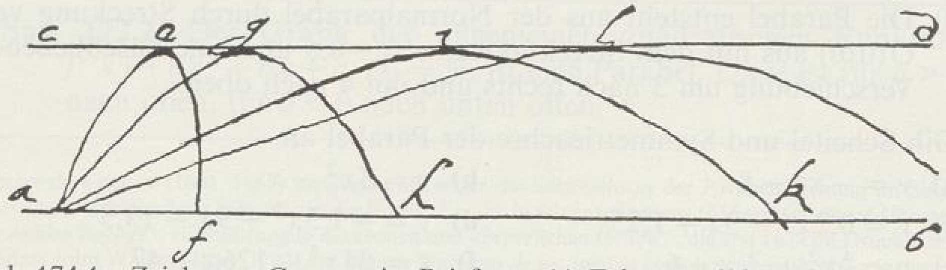


Abb. 174.1 Zeichnung GALILEIS im Brief vom 11. Februar 1609 an einen Prinzen des Hauses MEDICI

aus Geraden- und Kreisstücken zusammensetzt. Erst Galileo GALILEI (1564–1642) hat spätestens 1609 erkannt, dass diese Bahn, falls man den Luftwiderstand vernachlässigen darf, eine Parabel, die so genannte Wurfparabel, ist (siehe Abbildung 174.1). Veröffentlicht hat diese Erkenntnis 1632 sein Schüler Fra Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647) in seinem Werk *Lo Specchio Ustorio overo Trattato delle Settioni Coniche* – »Der Brennspiegel oder Abhandlung über die Kegelschnitte« –, worüber sein Meister sich wenig erfreut zeigte. GALILEI selbst bringt den Nachweis unter Verwendung seines lateinischen Textes aus jenen frühen Jahren am »3. Tag« seiner *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali* – »Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend« –, die 1638 in Leiden erschienen.

Abb. 175.1 Galileo GALILEI (15.12. 1564 Pisa – 8.1.1642 Arcetri/Florenz) – Kupferstich von Ottavio LEONI (um 1587–1630)

14. Der aus dem waagrecht gehaltenen Ende eines Wasserschlauchs austretende Strahl beschreibt bei Vernachlässigung des Luftwiderstands einen Parabelbogen, dessen Achse zum Erdmittelpunkt gerichtet ist. Zeichne in ein geeignetes Koordinatensystem die Bahn eines Wasserstrahls, der 1,5 m über dem Boden waagrecht ausströmt und in einer (horizontal gemessenen) Entfernung von 5 m den Boden erreicht. Der Erdboden ist dabei als waagrechte Ebene angenommen.

15. Ein Stein, der von einem Punkt P aus schräg nach oben geworfen wird, fliegt bei Vernachlässigung des Luftwiderstands auf einem Parabelbogen, dessen Achse durch den Erdmittelpunkt geht.

a) Zeichne in ein geeignetes Koordinatensystem die Wurfbahn für den Fall, dass sich P 1,8 m über dem Boden befindet und der Stein nach 4 m bzw. 8 m waagrechter Verschiebung eine Höhe von 4,2 m bzw. 5 m über dem Boden erreicht hat. Der Boden sei waagrecht und eben.

b) Welche größte Höhe über dem Boden erreicht der Stein?

c) In welcher Entfernung (waagrecht gemessen) von der Abwurfstelle schlägt der Stein auf dem Boden auf?

5.4 Parabeln und Geraden

Nachdem wir jetzt wissen, wie die Gleichung einer allgemeinen Parabel lautet, können wir Schnittprobleme bei Parabeln und Geraden rechnerisch lösen.

5.4.1 Parabel und x-Achse

Die Abszissen der Schnittpunkte einer Parabel und der x-Achse heißen auch **Nullstellen** der Parabel bzw. der zugehörigen quadratischen Funktion. Man erhält die Schnittpunkte als Lösungen des Gleichungssystems

I $y = ax^2 + bx + c$ Parabelgleichung
II $y = 0$ Gleichung der x-Achse

Setzt man $y = 0$ in I ein, dann ergibt sich

I′ $ax^2 + bx + c = 0$
II′ $y = 0$

I′ ist eine quadratische Gleichung für die Nullstellen, die je nach dem Wert ihrer Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ zwei, eine oder keine Lösung hat.
Im ersten Fall, $D > 0$, gibt es zwei Schnittpunkte N_1 und N_2 mit der x-Achse; die x-Achse ist Sekante.

Im zweiten Fall, $D = 0$, gibt es einen Schnittpunkt S. Er hat die Koordinaten $x_s = -\frac{b}{2a}$, $y_s = -\frac{D}{4a} = 0$. S ist also nach Satz 173.1 der Scheitel der Parabel. Die x-Achse ist Tangente.

Im dritten Fall, $D < 0$, treffen sich die Parabel und die x-Achse nicht; die x-Achse ist Passante.
Hat man die Nullstellen, dann kann man auch den Scheitel der Parabel leicht finden. Es gilt nämlich

> **Satz 176.1:** Die Scheitelabszisse x_s ist das arithmetische Mittel der Nullstellen x_1 und x_2, d.h., $x_s = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Geometrisch bedeutet dieser Satz:
Der Scheitel liegt auf der Mittelsenkrechten der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse.

Beweis: Nach VIETA (Satz 103.1) ist $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und damit $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{b}{2a}$. Das ist aber nach Satz 173.1 die Scheitelabszisse.

Satz 176.1 verhilft uns zu einer schnellen Bestimmung der Scheitelabszisse: Weil sich die Abszissen bei einer Verschiebung in y-Richtung nicht ändern, betrachten wir statt der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ die Parabel $y = ax^2 + bx = x(ax + b)$ mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$. Das ergibt sofort die Scheitelabszisse $x_s = -\frac{b}{2a}$. Die Ordinate ergibt sich durch Einsetzen dieses Werts in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$.

Beispiel: Die Parabel $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ wird durch Verschiebung um 5 nach unten zur Parabel $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x = x(\frac{1}{4}x - 2)$ mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$. Für die Scheitelabszisse x_s gilt $x_s = \frac{1}{2}x_2 = 4$. Die Scheitelordinate ergibt sich zu $y_s = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 5 = 1$. Abbildung 177.1 veranschaulicht das Auffinden des Scheitels.

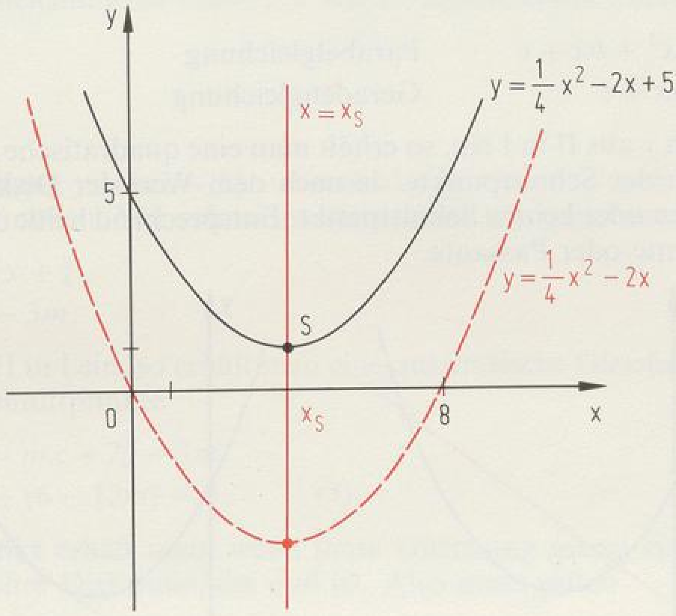


Abb. 177.1 Schnelle Bestimmung der Scheitelabszisse x_s

Aufgaben

1. Bestimme die Nullstellen der Parabeln.

a) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ **c)** $y = 5x^2 + 2x - 1{,}6$

d) $y = -x^2 + 2x + 3$ **e)** $y = 3x^2 - 4x + 2{,}5$ **f)** $y = 2x^2 + 6x + 4{,}5$

2. Bestimme bei den Parabeln aus Aufgabe **1** jeweils den Scheitel.

3. Wie lautet die Gleichung der Parabel, die die Koordinatenachsen in den Punkten

a) A(0|−16), B(2|0) und C(−4|0),

b) A(0|−1), B(5|0) und C(−1|0)

schneidet?

4. Bestimme die Gleichung einer Parabel mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Nullstellen haben die Entfernung 4, der Scheitel liegt bei $(3|-4)$.

b) Die Nullstellen liegen bei -3 und 5, und die Parabel geht durch $(8|-3)$.

**5.4.2 Parabel und Gerade

So wie in **5.4.1** erhält man die Schnittpunkte einer Parabel mit einer beliebigen Geraden durch Lösen eines Gleichungssystems, dessen eine Gleichung die Parabelgleichung, dessen andere die Geradengleichung ist. Im Allgemeinen gilt:

I. $y = ax^2 + bx + c$ Parabelgleichung
II. $y = mx + t$ Geradengleichung

Setzt man y aus II in I ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für die Abszissen der Schnittpunkte. Je nach dem Wert der Diskriminante gibt es zwei, einen oder keinen Schnittpunkt. Entsprechend heißt die Gerade Sekante, Tangente oder Passante.

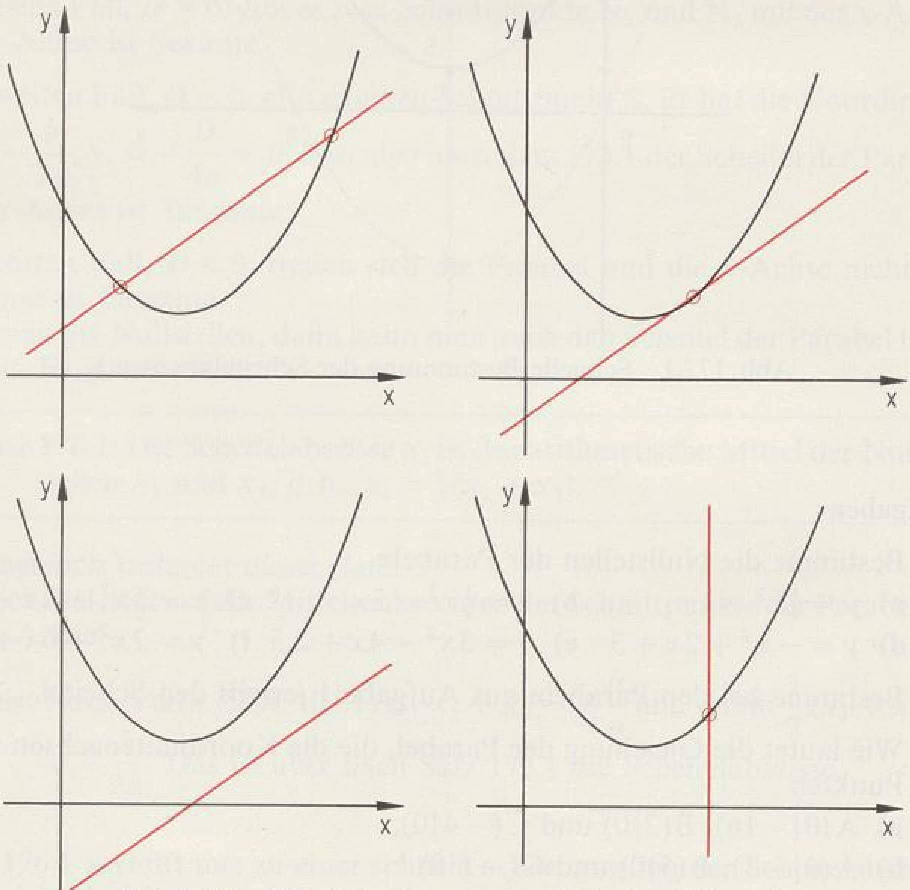


Abb. 178.1 Mögliche Lagen von Parabel und Gerade

Nun gibt es aber Geraden, die keine Tangenten an die Parabel sind, obwohl sie auch nur einen einzigen Schnittpunkt mit der Parabel besitzen, nämlich die Geraden, die zur Parabelachse parallel sind. Ihre Gleichung hat die Form $x = d$.
Abbildung 178.1 zeigt überblicksartig die verschiedenen möglichen Lagen von Parabel und Gerade.
Zur Vertiefung lösen wir die folgende interessante

Aufgabe: Bestimme die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $P(3|2\frac{1}{4})$ an die Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ gelegt werden können, und berechne die Berührpunkte.
Lösung: Achsenparallele Tangenten gibt es nicht. Also müssen die gesuchten Tangenten eine Gleichung der Form $y = mx + t$ haben. Da sie durch P gehen, muss gelten

$$2\tfrac{1}{4} = m \cdot 3 + t$$
$$t = 2\tfrac{1}{4} - 3m.$$

Durch die Gleichung $y = mx + 2\frac{1}{4} - 3m$ wird eine Gerade durch P mit der Steigung m beschrieben. Wir schneiden sie nun mit der gegebenen Parabel:

$$\text{I} \quad y = -\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}$$
$$\text{II} \quad y = mx + 2\tfrac{1}{4} - 3m.$$

Setzt man y aus II in I ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für die Abszissen der Schnittpunkte:

$$-\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4} = mx + 2\tfrac{1}{4} - 3m$$
$$x^2 + (4m-2)x + (6-12m) = 0 \qquad (*)$$

Einen Berührpunkt erhält man, wenn diese Gleichung genau eine Lösung hat, d.h., wenn ihre Diskriminante null ist. Also muss gelten

$$(4m-2)^2 - 4(6-12m) = 0$$
$$16m^2 + 32m - 20 = 0$$
$$4m^2 + 8m - 5 = 0$$

$$m = \frac{-8-12}{8} \quad \vee \quad m = \frac{-8+12}{8}$$

$$m_1 = -\tfrac{5}{2} \quad \text{und} \quad m_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Es gibt somit durch P zwei Tangenten an die Parabel. Sie haben die Gleichungen

$$y = -\tfrac{5}{2}x + 9\tfrac{3}{4} \quad \text{bzw.} \quad y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}. \qquad (**)$$

Man erhält nun die Koordinaten der Berührpunkte B_1 bzw. B_2, indem man die eine bzw. die andere Tangente mit der Parabel zum Schnitt bringt. Man muss also zwei Gleichungssysteme lösen, deren erste Gleichung die Parabelgleichung und deren zweite Gleichung die jeweilige Tangentengleichung ist.

Die beim Einsetzen von II in I dann entstehende quadratische Gleichung haben wir oben aber bereits gefunden und mit (*) bezeichnet. Da ihre Diskriminante null ist, hat (*) die einzige Lösung

$$x = \frac{-(4m-2)}{2} = 1 - 2m.$$

Setzen wir m_1 bzw. m_2 an Stelle von m ein, dann erhalten wir als Abszisse des Berührpunkts B_1 bzw. B_2

$x_1 = 6$ bzw. $x_2 = 0$

und aus den Tangentengleichungen (**) für die Ordinate des jeweiligen Berührpunkts

$y_1 = -5\frac{1}{4}$ bzw. $y_2 = \frac{3}{4}$.

Abbildung 180.1 zeigt die Parabel mit den beiden durch P verlaufenden Tangenten.

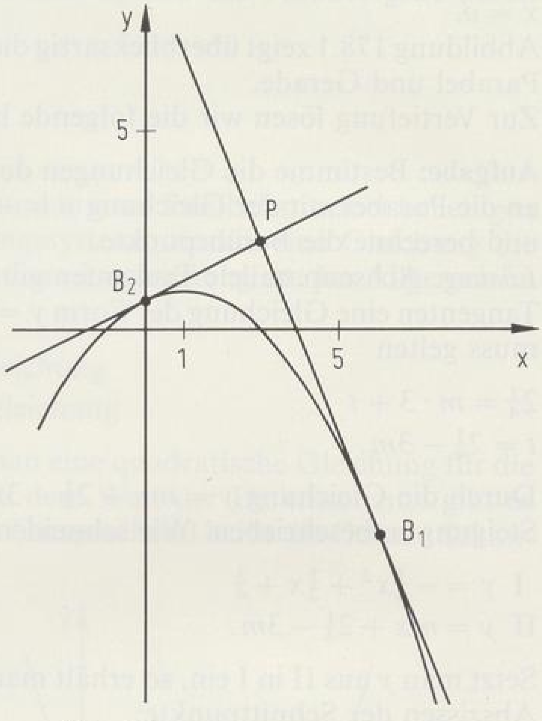


Abb. 180.1 Tangenten von P an die Parabel

Aufgaben

1. Wo schneiden sich die folgenden Parabeln und Geraden? Fertige eine Zeichnung an.

a) $y = x^2 - 5$ und $y = 2x - 2$

b) $y = 2x^2 - 4x + 1$ und $y = 1 - 2x$

c) $y = -0{,}5x^2 - 3x - 2$ und $y = -1{,}5x - 1$

d) $y = \frac{1}{9}x^2$ und $x = 6$

e) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$ und $x = -3$

•**2.** Berechne die Schnittpunkte und die Länge der zugehörigen Parabelsehne.

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ und $2y - x - 12 = 0$

b) $y = \frac{1}{21}x^2$ und $2x - 7y - 14 = 0$

c) $y = -\frac{3}{25}x^2$ und $6x + 5y - 15 = 0$

d) $8(y + 1) = -(x - 2)^2$ und $x + 4y + 14 = 0$

e) $x^2 + 4x + 16y + 52 = 0$ und $8x + 12y + 31 = 0$

3. Der Scheitel einer Parabel, deren Achse zur y-Achse parallel ist, hat die Abszisse 3 und liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 1$, die von der Parabel außerdem noch in einem Punkt mit der Ordinate 9 geschnitten wird. Wie lautet die Gleichung dieser Parabel?

•**4.** Die Gerade $y = 2{,}5$ wird vom Graphen einer Funktion 2. Grades in zwei symmetrisch zur y-Achse liegenden Punkten geschnitten. Dieselbe Parabel schneidet die Gerade $y = 0{,}75x - 0{,}5$ in zwei Punkten mit den Ordinaten -2 und $\frac{5}{8}$. Bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit der ersten Geraden.

5. Im Parabelpunkt P soll die Tangente an die Parabel gelegt werden. Bestimme ihre Gleichung.

a) $y = \frac{1}{8}x^2$, $P(\ |2)$ liegt im 2. Quadranten;
b) $y = -\frac{1}{18}x^2$, $P(\ |-8)$ liegt im 3. Quadranten;
c) $y = -\frac{18}{5}x^2$, $P(1|\ )$.

6. Im Parabelpunkt P soll die Tangente an die Parabel gelegt werden. Bestimme ihre Gleichung und fertige eine Zeichnung an.

a) $y = -5x^2 + 10x - 7$, $P(\frac{1}{5}|\ )$
b) $y = 84x^2 - 126x + 47$, $P(0|\ )$
•**c)** $y = \frac{1}{5}x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $P(\ |\frac{5}{4})$

7. Lege vom Punkt P die Tangenten an die Parabel. Bestimme die Tangentengleichungen und die Koordinaten der Berührpunkte und fertige eine Zeichnung an.

a) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $P(2|4\frac{3}{4})$
b) $y = x^2 - 4x + 6\frac{1}{4}$, $P(0|0)$
c) $y = -x^2 - 7x - 11{,}25$, $P(-2|1)$
d) $y = 3x^2 + 24x - 47$, $P(0|-50)$
e) $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2{,}075$, $P(1|6{,}2)$
f) $y = \frac{3}{4}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$, $P(1|1)$

•**8. a)** Bestimme die Lösungen in Abhängigkeit von a für $\sqrt{x+a} = \frac{1}{2}x + 1$.

b) Zeichne in ein Koordinatensystem den Graphen von $y = \frac{1}{2}x + 1$ und die Graphen von $y = \sqrt{x+a}$ für $a = 0; 1; \frac{3}{2}; 2$ und 3. Interpretiere das Ergebnis von **a** anhand dieser Zeichnung.

⁝**9. a)** Zeichne im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ (Einheit 10 cm) die Parabeln mit der Gleichung $y = f(x) = ax(1-x)$ für $a \in \{0{,}5; 1; 2; 3{,}3; 4\}$. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem die Gerade mit der Gleichung $y = x$.

b) Berechne der Reihe nach die ersten 5 Glieder der Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz $x_{n+1} = ax_n(1-x_n) = f(x_n)$. Wähle als Startwert **1)** $x_0 = 0{,}2$ und **2)** $x_0 = 0{,}5$. Zeichne die Punkte $P_n(x_n|f(x_n))$ ein.

c) x^* heißt Fixzahl, wenn $x^* = f(x^*)$ gilt.

Zeige: Für $a \geqq 1$ ist $x^* = 1 - \dfrac{1}{a}$ eine Fixzahl.

d) x^{**} heißt Zahl mit der Periode 2, wenn $x^{**} = f(f(x^{**}))$ gilt.

Zeige: Für $3 < a \leqq 4$ sind $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a} - \sqrt{1 - \frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}}\right)$ und

$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a} + \sqrt{1 - \frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}}\right)$ Zahlen mit der Periode 2, und es gilt $f(x_1) = x_2$ und $f(x_2) = x_1$.

e) Definiert man analog $x^{(k)}$ als Zahl mit der Periode k für $k > 2$ und trägt diese Zahlen $x^{(k)}$ gegen den Parameter a ab, dann ergibt sich nach längeren Rechnungen (Computer!) ein Diagramm, das man auch Feigenbaumdiagramm oder Bifurkationsdiagramm nennt. Es entstehen der Reihe nach Punkte der Perioden $2, 4, 8, \ldots,$ bis auf einmal das Chaos ausbricht und die Folgen keine Gesetzmäßigkeit mehr erkennen lassen.

**5.4.3 Parabel und Parabel

Die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Parabeln ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems

I $y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$

II $y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$.

Auch hier kann es zwei, eine oder keine Lösung geben, wie Abbildung 183.1 überblicksartig veranschaulicht. Zum Fall der sich berührenden Parabeln lösen wir folgende

Aufgabe: Um wie viel muss die Normalparabel in y-Richtung verschoben werden, damit sie die Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ berührt?

Lösung:

I $y = x^2 + t$ verschobene Normalparabel

II $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

I′ $y = x^2 + t$

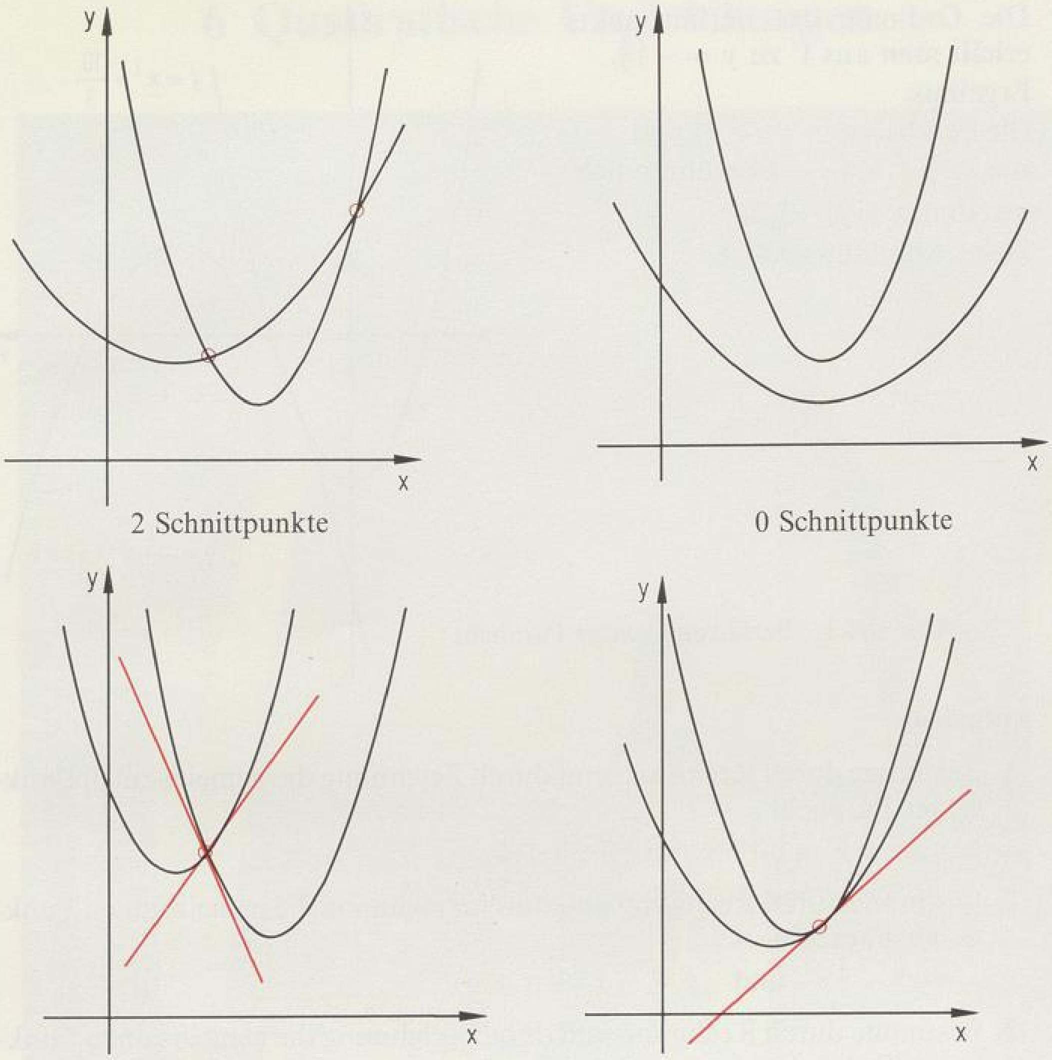
II′ $\frac{3}{2}x^2 - 4x + 6 + t = 0$

Damit sich die beiden Parabeln berühren, darf Gleichung II′ nur eine einzige Lösung haben; ihre Diskriminante muss also null sein:

$16 - 4 \cdot \frac{3}{2}(6 + t) = 0$

$16 - 36 - 6t = 0$

$t = -3\frac{1}{3}$.



2 Schnittpunkte

0 Schnittpunkte

1 Schnittpunkt mit

verschiedenen Tangenten

gemeinsamer Tangente

Abb. 183.1 Mögliche Schnittmengen von Parabeln

Die Normalparabel muss somit um $3\frac{1}{3}$ nach unten verschoben werden. Sie berührt dann die andere Parabel in dem Punkt, dessen Abszisse sich aus der letzten Gleichung II′ ergibt, wenn man dort $t = -3\frac{1}{3}$ setzt:

$\frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{8}{3} = 0$

$9x^2 - 24x + 16 = 0$

$(3x - 4)^2 = 0$

$x = \frac{4}{3}.$

Die Ordinate des Berührpunkts erhält man aus I′ zu $y = -1\frac{5}{9}$.
Ergebnis:
Die Parabeln $y = x^2 - 3\frac{1}{3}$ und $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ berühren sich im Punkt $(1\frac{1}{3} | -1\frac{5}{9})$.
Siehe Abbildung 184.1.

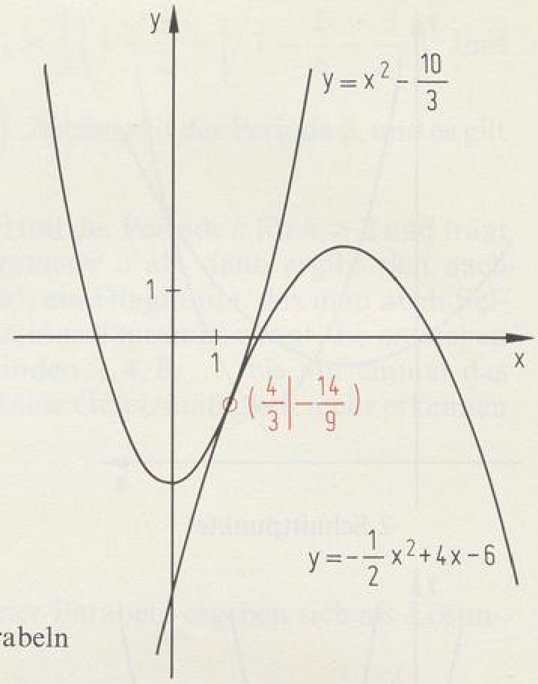


Abb. 184.1 Berührung zweier Parabeln

Aufgaben

1. Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = x^2 + 2$ und $y = x^2 - 2x + 5$.

2. Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = x^2 - 3x$ und $y = -x^2 + x + 6$.

3. Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = -x^2 + 4$ und $y = x^2 - 4x + 6$.

4. Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = x^2 + 4x - 1$ und $y = 2x^2 + x + 3$.

•**5.** Zeige: Zwei Parabeln $y = ax^2 + bx + c$ und $y = Ax^2 + Bx + C$, die genau einen Schnittpunkt haben, der kein Berührpunkt ist, sind kongruent.

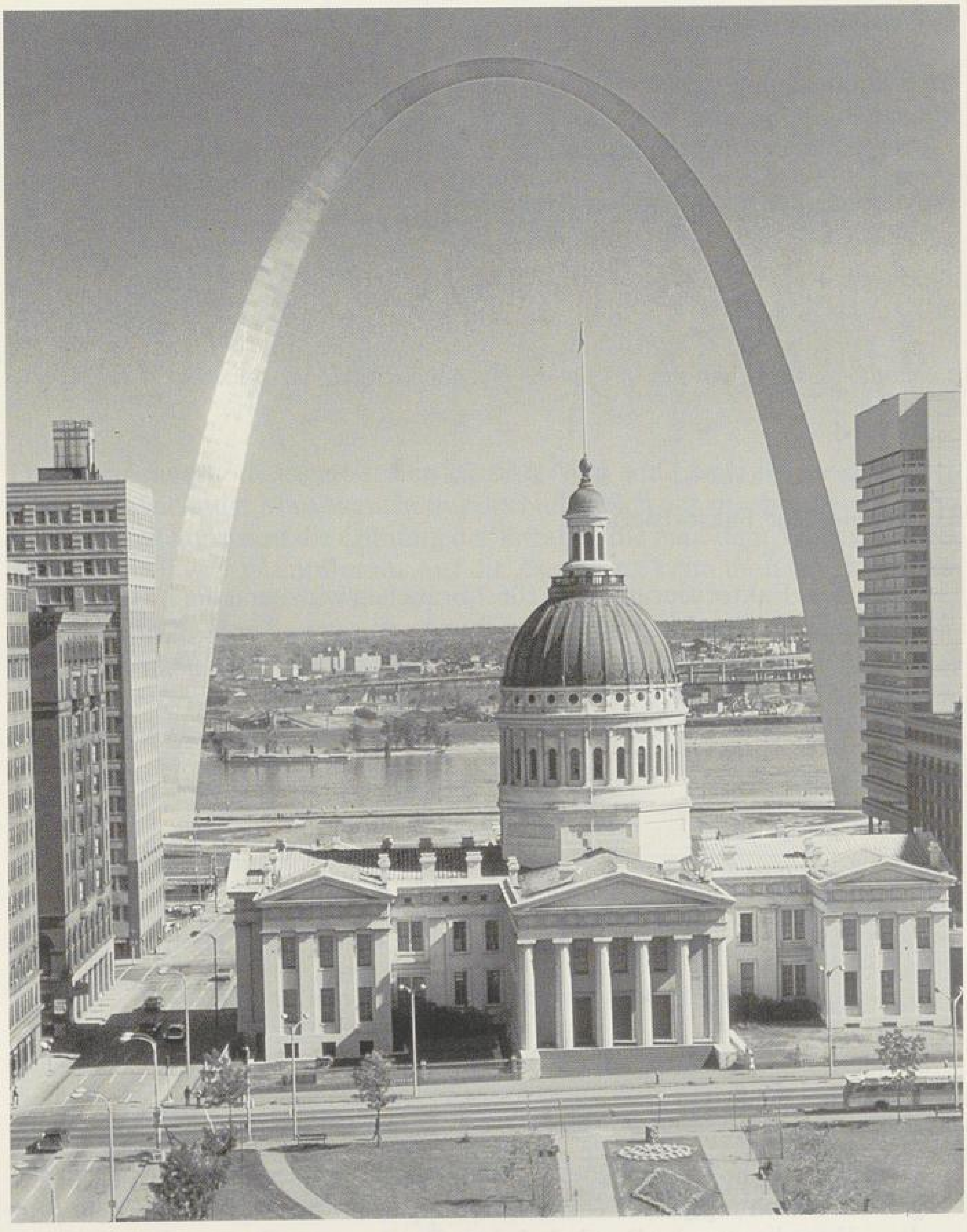
6. A(0|6), B(4,5|1,5), C(6|5), S(5,5|2,5)

a) Bestimme eine Gleichung der Parabel p durch A, B und C. Zeichne die Parabel p.

b) Gib eine Gleichung der Parabel q an, die nach unten geöffnet ist, den Scheitel S hat und kongruent zur Normalparabel ist. Zeichne die Parabel q.

c) Berechne die Schnittpunkte der beiden Parabeln.

6 Quadratische Ungleichungen



Gateway Arch in Saint Louis, Missouri, USA
Der 192 m hohe, in den Jahren 1959 bis 1965 aus rostfreiem Stahl und Beton nach einem Entwurf des Finnen Eero SAARINEN (1910–1961) errichtete Bogen erinnert als Gateway to the West an den nach 1803 einsetzenden Siedlerstrom in den Westen der USA und damit an die Bedeutung, die Saint Louis im 19. Jh. hatte.

6 Quadratische Ungleichungen

6.1 Lösungsverfahren

Eine Ungleichung der Form $ax^2 + bx + c > 0$ mit $a \neq 0$ heißt quadratische Ungleichung. So ist z. B. $x^2 - x - 2 > 0$ eine quadratische Ungleichung. Zur Lösung solcher Ungleichungen gibt es verschiedene Verfahren:

1) Methode der quadratischen Ergänzung

$x^2 - x - 2 > 0$

$x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 > 2 + \frac{1}{4}$

$(x - \frac{1}{2})^2 > \frac{9}{4}$

$|x - \frac{1}{2}| > \frac{3}{2}$

$x - \frac{1}{2} < -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x - \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$

$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$

$L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

2) Methode der Faktorisierung

$x^2 - x - 2 > 0$

Nach dem Faktorisierungssatz 106.1 brauchen wir zuerst die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$. Wir erhalten $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Damit wird die Ungleichung zur Produktungleichung $(x+1)(x-2) > 0$, die man graphisch lösen kann.
Aus Abbildung 186.1 liest man ab: $L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

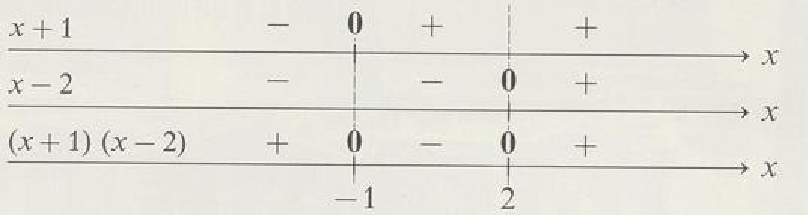


Abb. 186.1 Vorzeichenverteilung beim Term $(x+1)(x-2)$

3) Parabelmethode

$x^2 - x - 2 > 0$

Wir zeichnen die Parabel $y = x^2 - x - 2$. Sie hat als Nullstellen die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$, d. h. $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Gesucht sind die x-Koordinaten der Parabelpunkte, für die $y > 0$ gilt. Das sind die Parabelpunkte, die oberhalb der x-Achse liegen. Weil die Parabel nach oben offen ist, sind, wie Abbildung 187.1 zeigt, die y-Koordinaten positiv, wenn $x < -1$ bzw. $x > 2$ gilt. Also lesen wir die Lösungsmenge ab:
$L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

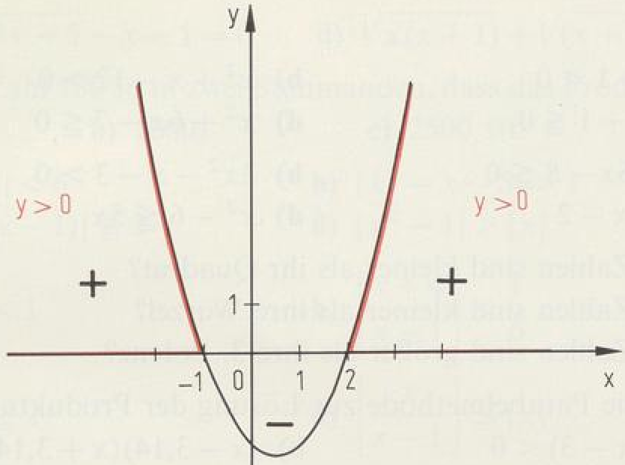


Abb. 187. Lösung der Ungleichung $x^2 - x - 2 > 0$ mit der Parabelmethode

Die Parabelmethode ist meist der kürzeste Weg zur Lösung einer quadratischen Ungleichung. Man braucht nur die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Gleichung und die Öffnung der Parabel, die man dem Vorzeichen des Koeffizienten von x^2 entnimmt. Auf die Zeichnung kann man sogar verzichten.

Bei den Verfahren **2** und **3** haben wir angenommen, dass es Nullstellen gibt. Wenn das nicht der Fall ist, dann liegt die Parabel entweder ganz über oder ganz unter der x-Achse. Je nach der Art des Ungleichheitszeichens ist die Lösungsmenge dann leer oder ganz $\mathbb{R}$, wie Abbildung 187.2 veranschaulicht.

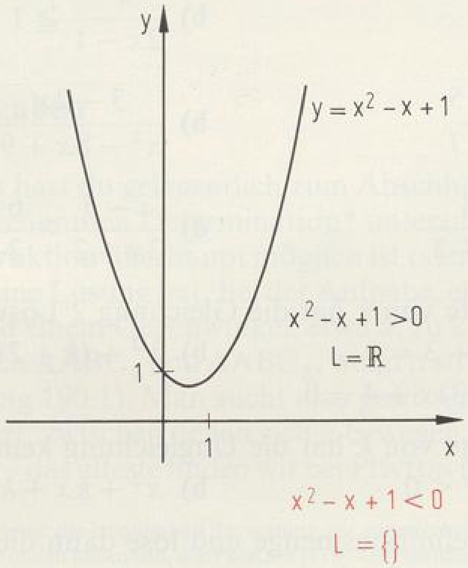


Abb. 187.2 Parabelmethode in Fällen ohne Nullstellen

Aufgaben

1. **a)** $x^2 - x + 1 < 0$ **b)** $x^2 + x - 12 > 0$
c) $x^2 - 2x + 1 \leqq 0$ **d)** $x^2 + 6x - 7 \leqq 0$

2. **a)** $-x^2 + 6x - 8 \leqq 0$ **b)** $2x^2 - x - 3 > 0$
c) $4x^2 \leqq 5x - 2$ **d)** $x^2 - 6 \leqq 5x$

3. **a)** Welche Zahlen sind kleiner als ihr Quadrat?
b) Welche Zahlen sind kleiner als ihre Wurzel?
c) Welche Zahlen sind größer als ihre 3. Potenz?

4. Verwende die Parabelmethode zur Lösung der Produktungleichung:
a) $(x-2)(x-3) < 0$ **b)** $(x - 3{,}14)(x + 3{,}14) > 0$
c) $(2x-1)(2x-3) \geqq 0$ **d)** $(x - \frac{1}{3})(x + \frac{2}{3}) > 0$

5. **a)** $(x-2)(x-3) < 4$ **b)** $x^2 - 3x < 8$
c) $x^2 < 4x - 1$ **d)** $-x^2 > x - 10$

6. **a)** $|x^2 + 5x| < 14$ **b)** $|13x - x^2| \leqq 30$

7. **a)** $0 < x^2 - 10 < x$ **b)** $x \leqq x^2 - 1 \leqq x - 1$

8. **a)** $\dfrac{10x}{x^2+4} \leqq -2$ **b)** $\dfrac{19}{x^2+1} < 1 + \dfrac{3x}{x^2+1}$
c) $\dfrac{7x}{-1-x^2} \geqq 3{,}5$ **d)** $\dfrac{2}{x^2} > \dfrac{1}{1+x^2}$

9. Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners:
a) $\dfrac{x-1}{x+3} < 0$ **b)** $\dfrac{x^2}{2x-1} \geqq 1$

10. **a)** $\dfrac{x-1}{x-3} < \dfrac{x-5}{x-7}$ **b)** $\dfrac{3-2x}{x^2-8x+9} \leqq 0$
c) $\dfrac{3}{2x+1} < \dfrac{8}{x+2}$ **d)** $\dfrac{x-3}{3x+2} > \dfrac{6-x}{2-x}$

11. Für welche Werte von k hat die Gleichung 2 Lösungen?
a) $x^2 - kx + k + 3 = 0$ **b)** $x^2 + (k+2)x + k + 5 = 0$
c) $kx^2 + 2(k-3)x + 4 = 0$

12. Für welche Werte von k hat die Ungleichung keine Lösung?
a) $kx^2 - 3x + 1 < 0$ **b)** $x^2 + kx + k \leqq 0$

13. Bestimme die Definitionsmenge und löse dann die Gleichung.
a) $\sqrt{(x-1)(x+2)} = \sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{10}$

c) $\sqrt{2x^2+3x-5}-x-1=0$ **d)** $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x+3)}=3\sqrt{2}$

14. Zerlege die Zahl 100 so in zwei Summanden, dass das Produkt größer als
a) 2000, **b)** 1000, **c)** 2500 ist.

15. a) $|x(x+1)|<6$ **b)** $|x^2-x-5|>1$
c) $|(x-5)(x-1)|\geqq 2$ **d)** $|x^2-1|>|x|$

16. a) $\left|\frac{2x}{x-2}\right|<1$ **b)** $\left|\frac{x+4}{x-1}\right|<\frac{1}{6}$

c) $\left|\frac{x+4}{x-4}\right|\geqq 2$ **d)** $\left|\frac{x}{x-1}\right|\leqq |x|$

17. a) $|x-1|\leqq|x^2-1|$ **b)** $|x(x+1)|>|x^2+1|$

18. Für welche natürlichen Zahlen n gilt
a) $\sqrt{n}+n<100$ **b)** $0{,}1n-0{,}01\sqrt{n}+1\geqq 0$?

19. Kennzeichne die Punktmenge, bei der die Koordinaten der Punkte der angegebenen Ungleichung genügen.
a) $y<x^2$ **b)** $y\geqq x^2-2$
c) $y-2x^2+2>0$ **c)** $2y+4x^2-5x+1\leqq 0$

20. Kennzeichne die Punktmenge, bei der die Koordinaten der Punkte der angegebenen Ungleichung genügen.
a) $x^2<y<1-x^2$ **b)** $x^2-3x<y<-x^2+4x-5$
c) $0<y<-2x^2+9x-7$ **d)** $3x^2-2x<y<-2x+3$

6.2 Extremwertaufgaben

Im Geometrieunterricht hast du gelegentlich zum Abschluss einer Konstruktionsaufgabe in der so genannten Determination* untersucht, unter welchen Bedingungen die Konstruktion überhaupt möglich ist oder unter welchen Bedingungen sie mehr als eine Lösung hat. Bei der Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Seiten, etwa a und c, und einem Gegenwinkel, etwa α, zu konstruieren, erhält man 2 Lösungen, nämlich ΔABC_1 und ΔABC_2, wenn a so gewählt wird, dass $h_a<a<c$ gilt (Abbildung 190.1). Man sucht also gewissermaßen den kleinsten und den größten Wert, zwischen denen sich a bewegen kann. Aus solchen Abgrenzungsproblemen – das älteste finden wir bei PLATON (428–348 v. Chr.) in

* determinatio (lat.) = *Abgrenzung* ist die lateinische Übersetzung des entsprechenden griechischen Fachbegriffs διορισμός (diorismós). Erfunden haben soll, wie PROKLOS (410–485) berichtet, diesen Diorismos LEON, ein Zeitgenosse PLATONS, der als erster »Abgrenzungen dafür geben konnte, wann die Lösung einer gestellten Aufgabe möglich ist und wann nicht«.

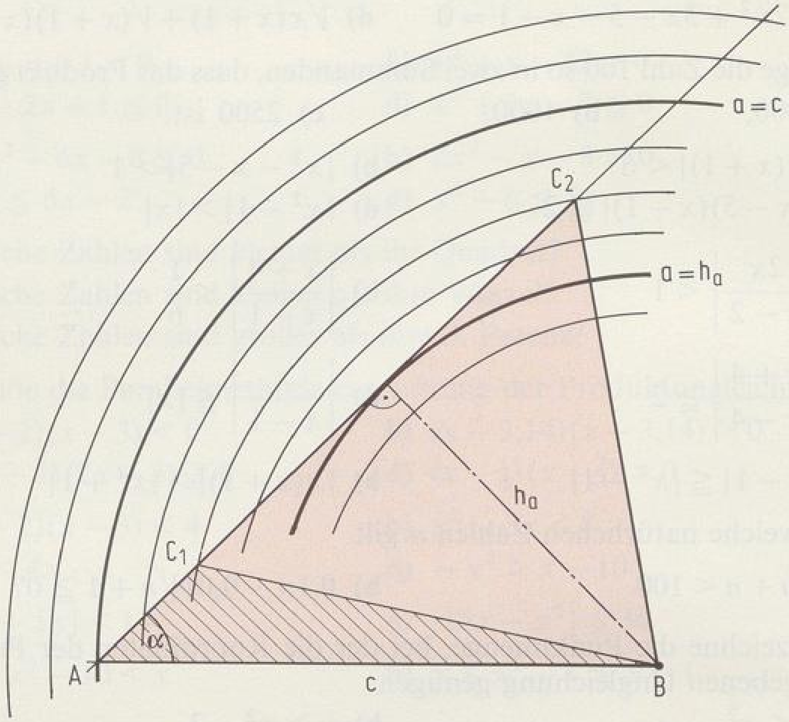


Abb. 190.1 Es gibt 2 Lösungen, wenn $h_a < a < c$

Menon (87a, b) –, sind die Extremwertaufgaben* entstanden, deren frühestes uns erhaltenes Beispiel von EUKLID (um 300 v. Chr.) stammt (Aufgabe 195/**9**). Aber erst APOLLONIOS (um 262– um 190 v. Chr.) erkannte, dass solche Extremwertaufgaben, losgelöst von den geometrischen Abgrenzungsproblemen,

> »zu den Sachen gehören, die an und für sich einer Betrachtung würdig erscheinen«,

wie er im Vorwort zu Buch V seiner *Konika* schreibt, in dem er auch solche »Sachen« angeht. Aber es vergingen mehr als 1800 Jahre, bis es dem Juristen und Mathematiker Pierre de FERMAT (1601–1665) gegen 1629 gelang, in seinem *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* – »Methode zur Bestimmung eines Maximums und eines Minimums«** – ein allgemeines Verfahren zum Lösen solcher Extremwertaufgaben zu entwickeln. Das erste Beispiel, das er seinen Lesern darin vorführt, sei unser

Beispiel 1:

Eine gegebene Strecke [AC] soll durch einen Punkt E so geteilt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks, das man aus den beiden Teilen [AE] und [EC] bilden kann, maximal wird (Abbildung 190.2).

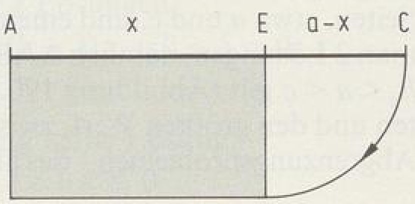


Abb. 190.2 Zu Beispiel 1

* extremus (lat.) = der äußerste
** maximus (lat.) = der größte; minimus (lat.) = der kleinste

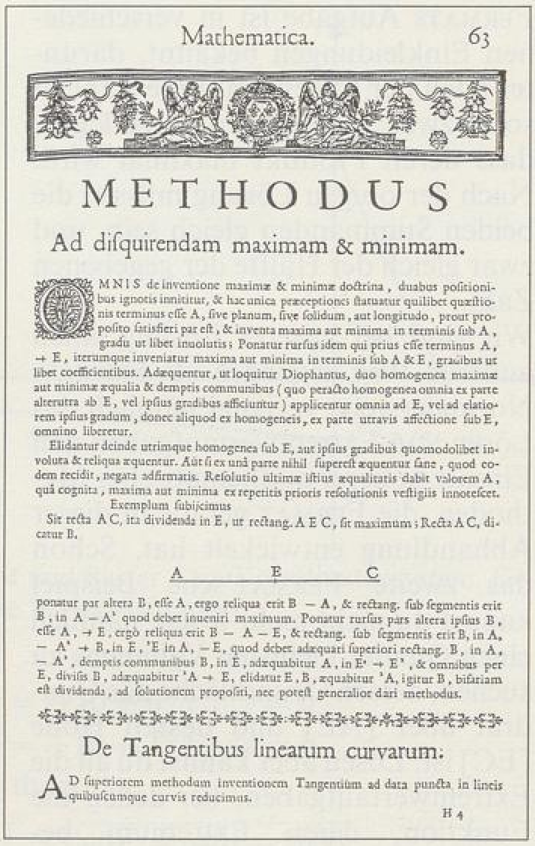
Lösung: Wir bezeichnen die Länge der Strecke [AC] mit a und die des Teilstücks [AE] mit x; dann hat [EC] die Länge $a-x$. Der Inhalt der Rechtecksfläche ergibt sich in Abhängigkeit von x zu $x(a-x)$. Gesucht ist nun der Wert von x, für den $x(a-x)$ maximal wird. Um ihn zu finden betrachten wir die Funktion

$$f: x \mapsto x(a-x),$$
$$D_f =]0; a[.$$

Formt man $f(x)$ um zu $f(x) = -x^2 + ax$, so erkennt man sofort, dass der Graph von f ein Parabelbogen ist, dessen Scheitel bei $\left(\frac{a}{2} \middle| \frac{a^2}{4}\right)$ liegt (Abbildung 191.2).

Weil die Parabel nach unten offen ist und die Scheitelabszisse $\frac{a}{2}$ in D_f liegt, ist die Scheitelordinate $\frac{a^2}{4}$ der größte Funktionswert von f.

Das gesuchte x hat also den Wert $\frac{a}{2}$, und der Teilpunkt E muss als Mittelpunkt der Strecke [AC] gewählt werden.



Mathematica. 63

METHODUS

Ad disquirendam maximam & minimam.

OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus positionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione; statuatur quilibet quæstionis terminus esse A, sive planum, sive solidum, aut longitudo, prout proposito satisfieri par est, & inventa maxima aut minima in terminis sub A, gradu ut libet inuolutis; Ponatur rursus idem qui prius esse terminus A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione sub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea sub E, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut si ex unâ parte nihil superest æquentur sane, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subijcimus

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang. A E C, sit maximum; Recta A C, dicatur B.

A E C

ponatur par altera B, esse A, ergo reliqua erit B − A, & rectang. sub segmentis erit B, in A − A² quod debet inueniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B, esse A, + E, ergò reliqua erit B − A − E, & rectang. sub segmentis erit B, in A, − A² + B, in E, ²E in A, − E, quod debet adæquari superiori rectang. B, in A, − A², demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E² + E², & omnibus per E, divisis B, adæquabitur ²A + E, elidatur E, B, æquabitur ²A, igitur B, bifariam est dividenda, ad solutionem propositi, nec potest generalior dari methodus.

De Tangentibus linearum curvarum:

AD superiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

H 4

Abb. 191.1 Erste Seite der erst 1679 in Toulouse im Sammelband *Varia Opera Mathematica* des Pierre de FERMAT erschienenen »Methode zur Bestimmung eines Maximums und eines Minimums«

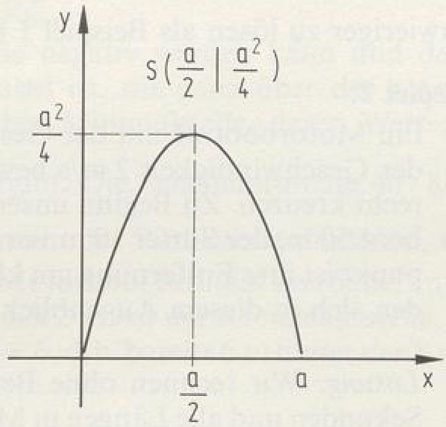


Abb. 191.2 Graph von $f: x \mapsto x(a-x)$, $D_f =]0; a[$

Abb. 192.1 Pierre de FERMAT (17.(?)8.1601 Beaumont-de-Lomagne bis 12.1.1665 Castres)

FERMATS Aufgabe ist in verschiedenen Einkleidungen bekannt, darunter auch der folgenden: Eine Zahl ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass deren Produkt maximal wird. Nach der obigen Lösung müssen die beiden Summanden gleich sein, und zwar gleich der Hälfte der gegebenen Zahl.
Wir sind bei unserer Lösung einen anderen Weg gegangen als FERMAT. Normalerweise verlangt nämlich das Lösen von Extremwertaufgaben den Einsatz höherer mathematischer Methoden, die FERMAT gerade in dieser Abhandlung entwickelt hat. Schon das zweite FERMAT'sche Beispiel kannst du nicht mehr lösen, nämlich einen Quader kleinsten Volumens zu suchen, dessen Grundfläche das Quadrat über [AE] und dessen Höhe [EC] ist. Lösen aber kannst du all die Extremwertaufgaben, bei denen die Funktion, deren Extremum bestimmt werden soll, quadratisch ist. Du brauchst dazu nur den Scheitel der zugehörigen Parabel zu berechnen; die Scheitelabszisse ist dann die gesuchte **Extremalstelle**, die Scheitelordinate ist das **Extremum** der Funktion. Ist die Parabel nach unten offen, dann ist die Extremalstelle eine **Maximalstelle** und das Extremum ein **Maximum**. Ist die Parabel nach oben geöffnet, dann handelt es sich um eine **Minimalstelle** und um ein **Minimum**.

Schwieriger zu lösen als Beispiel 1 ist das nun folgende

Beispiel 2:

Ein Motorboot M mit der Geschwindigkeit 6 m/s und ein Surfer S mit der Geschwindigkeit 2 m/s bewegen sich so, dass sich ihre Kurse senkrecht kreuzen. Zu Beginn unserer Betrachtung befindet sich das Motorboot 50 m, der Surfer 10 m vor dem Kreuzungspunkt. Zu welchem Zeitpunkt ist ihre Entfernung am kleinsten? Wie groß ist sie dann? Wo befinden sich in diesem Augenblick M und S?

Lösung: Wir rechnen ohne Benennungen, messen dabei alle Zeiten in Sekunden und alle Längen in Metern. Ferner denken wir uns auf den See ein Koordinatensystem gelegt, dessen Achsen die beiden Kurse sind (Abbildung 193.1). Zum Zeitpunkt t befinden sich

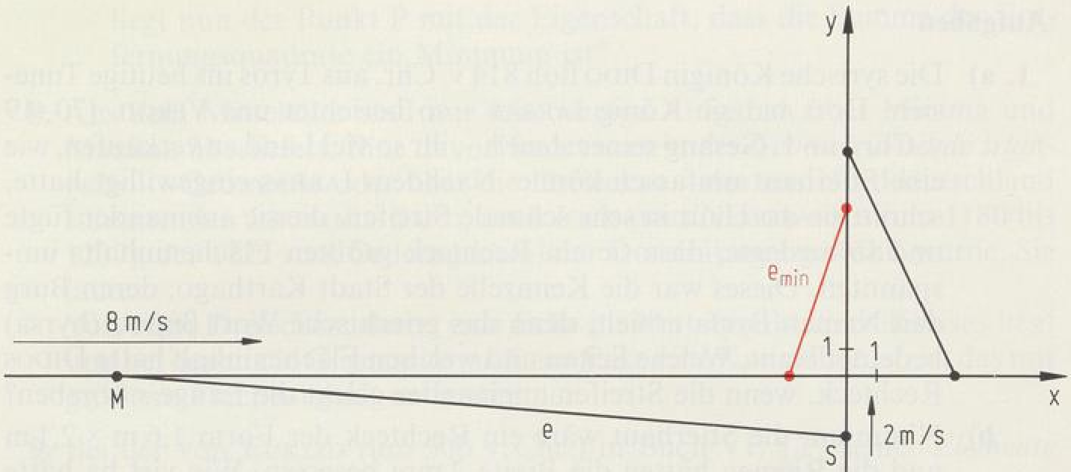


Abb. 193.1 Bewegung von Motorboot M und Surfer S im Koordinatensystem. Gezeichnet sind die Verhältnisse bei 4s, 8s und 9s.

das Motorboot an der Stelle $\quad x = -50 + 6 \cdot t, \quad y = 0,$
der Surfer an der Stelle $\quad y = -10 + 2 \cdot t, \quad x = 0.$
Ihre Entfernung beträgt nach Pythagoras

$$e = \sqrt{(-50 + 6t)^2 + (-10 + 2t)^2} = \sqrt{40t^2 - 640t + 2600}.$$

Gesucht ist $e_{\min}$, der kleinste Wert von e. Da die Wurzelfunktion echt monoton steigend ist, nimmt die Wurzelfunktion ihren kleinsten Wert an, wenn der Radikand am kleinsten ist. Aus dem Graphen der Wurzelfunktion (Abbildung 152.1) entnimmt man diesen Sachverhalt unmittelbar. Zum Auffinden von $e_{\min}$ bestimmen wir also das Minimum der Radikandenfunktion

$r: t \mapsto 40t^2 - 640t + 2600, \quad D_r = \mathbb{R}_0^+,$

die als Summe zweier Quadrate nie negativ werden kann und deren Graph eine nach oben offene Parabel ist, die ganz über der t-Achse verläuft. Ihre Scheitelabszisse ist ihre Minimalstelle, deren Wert sich nach Satz 173.1 zu $-\dfrac{-640}{2 \cdot 40} = 8$ ergibt. Die Scheitelordinate $40 \cdot 8^2 - 640 \cdot 8 + 2600 = 40$ ist das Minimum der Radikandenfunktion, und damit erhält man $e_{\min} = 2\sqrt{10}$. Das Motorboot befindet sich dabei an der Stelle $x = -50 + 6 \cdot 8 = -2$, d.h. noch 2 m vor der Kreuzungsstelle, der Surfer an der Stelle $y = -10 + 2 \cdot 8 = 6$, d.h. bereits 6 m hinter der Kreuzungsstelle.

Aufgaben

1. a) Die syrische Königin Dido floh 814 v. Chr. aus Tyros ins heutige Tunesien. Dort bat sie König Iarbas – so berichtet uns Vergil (70–19 v. Chr.) im 1. Gesang seiner *Aeneïs* –, ihr so viel Land zu verkaufen, wie eine Stierhaut umfassen könne. Nachdem Iarbas eingewilligt hatte, schnitt sie die Haut in sehr schmale Streifen, die sie aneinander fügte und so auslegte, dass sie ein Rechteck größten Flächeninhalts umspannten. Dieses war die Keimzelle der Stadt Karthago, deren Burg den Namen Byrsa erhielt; denn das griechische Wort βύρσα (byrsa) bedeutet Haut. Welche Seiten und welchen Flächeninhalt hatte Didos Rechteck, wenn die Streifen aneinander gelegt die Länge s ergaben?

b) Nimm an, die Stierhaut wäre ein Rechteck der Form 1,6 m × 2,1 m und die Riemen hätten die Breite 2 mm besessen. Wie viel ha hätte dann Didos Burganlage betragen?

2. Welche Lösung hat Aufgabe **1**, wenn Dido die Riemen hätte so auslegen dürfen, dass das Rechteck auf einer Seite von der geradlinigen Küste begrenzt wird, sie für diese Seite also keine Riemen verbrauchte?

3. Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Kantenlänge a. Auf den Seiten sei von jedem Eckpunkt aus im Umlaufssinn eine jeweils gleich große Strecke abgetragen. Verbindet man die Endpunkte dieser Strecken, so entsteht ein Viereck RSTU, das wieder ein Quadrat ist (Beweis!). Wie groß muss die abzutragende Strecke gewählt werden, damit der Flächeninhalt dieses Quadrats minimal wird? Wie groß ist er dann?

4. In einen Kreis vom Radius r ist ein Rechteck größten Flächeninhalts einzuzeichnen. Bestimme die Länge der Rechtecksseiten und den Inhalt.

5. In einem Dreieck mit der Grundseite g und der zugehörigen Höhe h wird die Parallele zu g gezogen, die die beiden anderen Seiten in zwei Punkten schneidet. Fällt man von diesen die Lote auf g, so entsteht ein Rechteck. Wie muss die Parallele gezogen werden, damit dieses Rechteck maximalen Flächeninhalt hat? Wie lang sind dann die Rechtecksseiten, und wie groß ist sein Inhalt?

6. Ein Motorboot M mit der Geschwindigkeit 8 m/s und ein Ruderboot R mit der Geschwindigkeit 1 m/s bewegen sich so, dass ihre Kurse sich senkrecht kreuzen. Zu Beginn unserer Betrachtung befindet sich das Motorboot 90 m, das Ruderboot 15 m vor dem Kreuzungspunkt. Zu welchem Zeitpunkt ist ihre Entfernung am kleinsten, und wie groß ist sie dann? Wo befinden sich in diesem Augenblick M und R?

7. a) Auf der Strecke [AB] der Länge 8 liegt der Punkt C 3 Einheiten von A entfernt. Gesucht ist ein Punkt P auf [AB] mit der Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von A, B und C minimal wird. Wo liegt er?

b) Die Punkte A_1 bis A_7 liegen so auf einer Geraden, dass sie immer weiter voneinander entfernt sind, und zwar 1, 3, 5, 7, 9 bzw. 11 Einheiten. Wo liegt nun der Punkt P mit der Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungsquadrate ein Minimum ist?

8. Aus dem Mittelalter sind nur sehr wenige Aufgaben über Minima und Maxima überliefert. Eine davon findet man in der *Geometria vel de triangulis* – »Geometrie oder über die Dreiecke« – des aus Norddeutschland stammenden JORDANUS SAXO, auch JORDANUS NEMORARIUS (um 1180 bis 1237), der 1222 zum Ordensgeneral der Dominikaner gewählt wurde. Sie lautet:
Von allen Dreiecken, deren eine Ecke im Mittelpunkt eines Kreises liegt und bei denen die Gegenseite zu dieser Ecke eine Kreissehne ist, ist das mit größtem Flächeninhalt zu bestimmen.

9. Bei der von EUKLID (um 300 v. Chr.) in Buch VI, § 27 seiner *Elemente* gestellten Aufgabe handelt es sich um folgendes Problem:
Über der Hälfte [MB] einer Strecke [AB] wird ein Parallelogramm MBNP beliebiger Höhe h gezeichnet. Auf [AB] wird ein Punkt C beliebig gewählt und durch ihn die Parallele zu BN gezogen, die den Diagonalenstrahl [BP in einem Punkt D schneidet. Nun lässt sich ein Parallelogramm ACDE konstruieren. Wie muss C gewählt werden, damit der Inhalt dieses Parallelogramms maximal wird?

**Anhang

Lineare Interpolation

In der Praxis kommt es oft vor, dass man von einer Funktion nur einzelne Werte kennt, die man eventuell durch Messung erhalten hat, dass man aber Zwischenwerte braucht. Hat man den Funktionsterm, dann kann man diese Zwischenwerte leicht berechnen. Wenn der Funktionsterm aber unbekannt ist (oder so kompliziert), dass die Berechnung von Zwischenwerten sehr mühsam wird), dann kann man das Verfahren der linearen Interpolation anwenden. Man ersetzt dabei den Funktionsgraphen zwischen zwei bekannten Punkten, den **Stützpunkten**, durch eine Strecke und berechnet den Wert, den die zugehörige affine Funktion an der gewünschten Stelle hat. Diesen Wert nimmt man als Näherungswert für den gesuchten Funktionswert. Je weniger gekrümmt der Graph in der untersuchten Gegend ist, desto genauer wird dieser Näherungswert sein. Liegen die beiden Stützpunkte sehr nahe beieinander, dann verläuft der Graph der Funktion meist schon ziemlich geradlinig und der Fehler wird klein sein. Liegt der gesuchte Wert zwischen den Stützstellen, dann spricht man von **interpolieren***, liegt er außerhalb, dann sagt man **extrapolieren**.

Rechnerische Durchführung der Interpolation:
$(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ seien die beiden Stützpunkte. Wir suchen $f(x)$. Ist $(x|y)$ der Punkt auf der Interpolationsgeraden, dann verwenden wir y als Näherungswert für $f(x)$.
Mit $\Delta Y = y_2 - y_1$, $\Delta X = x_2 - x_1$, $\Delta y = y - y_1$ und $\Delta x = x - x_1$ gilt wegen des Strahlensatzes (siehe Abbildung 196.1):

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$. Damit berechnen wir

$$\Delta y = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x$$

und daraus

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x.$$

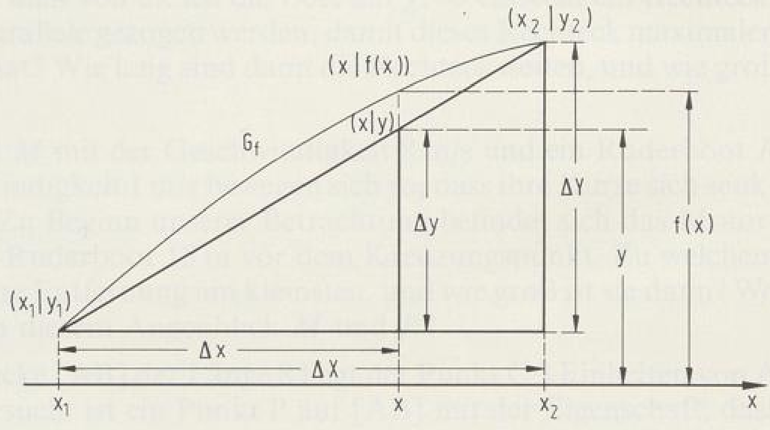


Abb. 196.1 Interpolation mit zwei Stützpunkten

* Das Wort *interpolieren* kommt aus dem Lateinischen und bedeutet *zurechtstutzen* oder *verfälschen*. Der erste, der es in dem obigen mathematischen Sinn gebraucht hat, war John WALLIS (1616–1703).

Beispiel:

Am Thermometer einer meteorologischen Station wurden im Laufe eines Tages folgende Temperaturen abgelesen:

x = Uhrzeit t in Std.	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y = Temperatur θ in °C	7,1	5,0	8,3	14,9	19,0	22,2	18,8	12,5	9,8

Wir wollen einen Näherungswert für die Temperatur um 10 Uhr durch lineare Interpolation bestimmen. Als Stützpunkte verwenden wir die nächstgelegenen bekannten Punkte $(9|14{,}9)$ und $(12|19{,}0)$. Damit berechnen wir:

$\Delta Y = 19{,}0 - 14{,}9 = 4{,}1$

$\Delta X = 12 - 9 = 3$

$\Delta x = 10 - 9 = 1$ und damit

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x = 14{,}9 + \frac{4{,}1}{3} \cdot 1 \approx 14{,}9 + 1{,}4 = 16{,}3$$

16,3 °C ist der Schätzwert für die Temperatur um 10 Uhr, der sich bei linearer Interpolation ergibt. Der wirkliche Wert und damit auch der Fehler sind allerdings weiterhin unbekannt!

Über den Fehler kann man sich informieren, wenn man den interpolierten Wert mit dem wahren Wert vergleichen kann, wenn man z. B. die Interpolation bei einer Funktion durchführt, deren Term bekannt ist.
Als Beispiel betrachten wir die Wurzelfunktion.
Wir berechnen mit den Stützpunkten $(0|0)$, $(1|1)$ und $(2|\sqrt{2})$ durch Interpolation Näherungswerte für $\sqrt{0{,}5}$ und für $\sqrt{1{,}5}$.

$\sqrt{0{,5}}$: $\Delta Y = 1 - 0 = 1$

$\Delta X = 1 - 0 = 1$

$\Delta x = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$ und damit

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$$

$\sqrt{1{,5}}$: $\Delta Y = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41$

$\Delta X = 2 - 1 = 1$

$\Delta x = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ und damit

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x = 1 + 0{,}41 \cdot 0{,}5 = 1{,}2$$

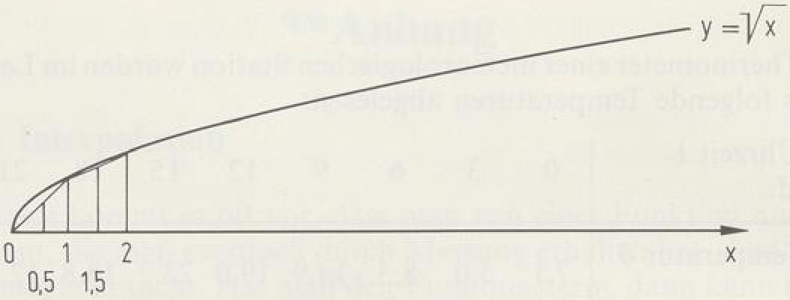


Abb. 198.1 Interpolation bei der Wurzelfunktion

Der **absolute Fehler** = »Näherungswert minus wahrer Wert« ist

im ersten Fall $0{,}5 - \sqrt{0{,}5} \approx -0{,}2$,

im zweiten Fall $1{,}2 - \sqrt{1{,}5} \approx -0{,}02$.

Der aussagekräftigere **relative Fehler** $= \dfrac{\text{absoluter Fehler}}{\text{wahrer Wert}}$ ist

im ersten Fall $-0{,}2 : \sqrt{0{,}5} \approx -0{,}28 = -28\%$,

im zweiten Fall $-0{,}02 : \sqrt{1{,}5} \approx -0{,}02 = -2\%$.

Im zweiten Fall ist der relative Fehler erheblich kleiner, weil die Kurve im Interpolationsbereich nicht so stark gekrümmt ist.

Aufgaben

1. Berechne mit der Tabelle des Beispiels von Seite 197 Näherungswerte für die Temperatur um

a) 1 Uhr **b)** 2 Uhr **c)** 18.30 Uhr.

2. Berechne mit der Tabelle des Beispiels von Seite 197 Näherungswerte für die Uhrzeit zwschen 3 Uhr und 15 Uhr, zu der die Temperatur folgende Werte hatte:

a) 7 °C **b)** 7,1 °C **c)** 10 °C.

3. Unter der Deklination δ des Polarsterns versteht man den Breitengrad des Sterns auf der Himmelskugel. Wäre $\delta = 90°$, dann stünde der Polarstern genau am N-Pol der Himmelskugel. In einer Tabelle lesen wir die Deklination des Polarsterns für verschiedene Jahre ab:

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990
Deklination δ	89°01,7′	89°04,7′	89°07,6′	89°10,4′	89°13,2′

a) Berechne Näherungswerte für die Deklination im Jahr

1) 1988 **2)** 1965 **3)** 1977.

b) Berechne Näherungswerte für das Jahr, in dem die Deklination den Wert
1) 89°05′ **2)** 89°10′ **3)** 89°12,4′ hat.

c) Berechne mittels Extrapolation Näherungswerte für die Deklination im Jahr
1) 1940 (Tabellenwert 88°58,7′)
2) 2000 (Tabellenwert 89°15,9′)

4. Als Zeitgleichung bezeichnet man in der Astronomie die Differenz »Wahre Sonnenzeit« minus »Mittlere Sonnenzeit«, das ist also die Zeit, um die die wahre Sonne sich »verfrüht« gegenüber dem Durchschnittswert, der sich ergibt, wenn man eine gleichmäßig umlaufende Sonne annimmt.
Für die Zeitgleichung im Dezember 1988 findet man in einer Tabelle ($+11^m = 11$ min)

Datum	1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.
Zeitgleichung	$+11^m$	$+9^m$	$+7^m$	$+4^m$	$+2^m$	-1^m	-3^m

a) Berechne Näherungswerte für die Zeitgleichung am
1) 5.12.88 **2)** 22.12.88 **3)** 24.12.88.

b) An welchem Dezembertag wird die Zeitgleichung den Wert
1) $+10^m$ **2)** $+5^m$ **3)** 0^m
gehabt haben?

5. Berechne durch Interpolation (Extrapolation) aus den Stützstellen 10 und 11 und den Werten $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$ und $\sqrt{11} \approx 3{,}3166$ Näherungswerte für

a) $\sqrt{10{,}5}$ **b)** $\sqrt{10{,}9}$ **c)** $\sqrt{10{,}95}$

d) $\sqrt{10{,}1}$ **e)** $\sqrt{10{,}05}$ **f)** $\sqrt{12}$.

6. Bestimme mit einem Taschenrechner die absoluten und die relativen Fehler, die bei den Näherungen von Aufgabe **5** auftreten. Erkläre die Unterschiede anhand des Graphen der Wurzelfunktion.

Register

ABRAHAM BAR HIJJA 90
absoluter Fehler 198
ABU KAMIL 57
abzählbar 26
Abzählbarkeit 25
Achse 146
Agrimensoren 34
Ägypter 35, 58, 72f.
Akademie 144
Akusmatikoi 60
AL-BAGDADI 61, 63
AL-CHARIZMI 34, 42, 63, 67f., 78ff., 87, 90, 94f., 100
ALEXANDER DER GR. 1, 8
Algorithmus 42
AL-HAYYAM 170f.
ALHAZEN 169
AL-KARADSCHI 90
AL-NAYRIZI 57, 63
AMASIAS 90f.
Anlegen von Flächen 110, 169
ANTHEMIOS (Ἀνθέμιος) 169
AO 6484 48
AO 8862 134, 137
APOLLONIOS (Ἀπολλώνιος) 145f., 168ff., 172, 190
Araber 34, 57, 61, 63, 73, 87, 90, 137
ARCHIMEDES (Ἀρχιμήδης) 8, 47, 146, 168f.
ARCHYTAS (Ἀρχύτας) 45, 60
ARISTOTELES (Ἀριστοτέλης) 8, 12, 58ff., 99, 144, 174
Arithmetica integra 141
arithmetisches Mittel 45
~ mehrerer Zahlen 108
Ars magna 93
ARYABHATA I 34, 67, 87, 100
Äther 99
Autographie 48

BACHMANN 63
Babylonier 46ff., 58, 72f., 86, 90
Berührpunkt 149
BHĀSKARA II 57, 100f., 122, 127
Bifurkationsdiagramm 182
Binom 63
biquadratisch 122
Blende 37
BM 13901 86, 88f., 97, 138f.
BM 85200 127
BOETHIUS 63, 99
BOLZANO 25, 29f.
BOMBELLI 35
BONASONI 73
BRAHMAGUPTA 87
Brennpunkt 168f.
Brennweite 168
Byrsa 194

CANTOR 25ff., 30, 63
~'sches Diagonalverfahren 30
CARDANO 35, 91ff., 95, 101, 117, 121ff., 128, 140ff.
CASSIODORUS 63
casus irreducibilis 128
CAUCHY 25
CAVALIERI 175
census 67, 90
Chaos 182
Chiu Chang Suan Shu 73, 98
CICERO 145
CLEMENS von Alexandria 73
Codex Dresden C80 35
Codex Dresden C349 35
Codex latinus monacensis 14908 62, 67f., 94
Codex Leipzig 1696 35, 70
COMMANDINO 45
CONRADT VON MEGENBURG 146
COPERNICUS 144
Coß 35, 127

DARIUS 31f.
Dariusvase 31f.
DEDEKIND 24ff., 63
Deklination 198
delisches Problem 13
DE MOIVRE 129
DEMOKRIT (Δημόκριτος) 73
DESCARTES 21, 35, 62, 122
Determination 189
Deutsche Algebra 34, 67f.
Diagonalverfahren
~, erstes 25
~, zweites 30
DIDO 194
DIOKLES (Διοκλῆς) 169
DIOPHANT (Διόφαντος) 61, 73, 87, 90, 125, 127
Dirhem 67
Diskriminante 84
Divisionsverfahren 42
Dodekaeder 58f., 99
Doppellösung 103, 106, 149
Drachme 31, 67
Drudenfuß 9
dschidr 34, 90
DÜRER 169

ELIAS PHILOSOPHUS 144
Ellipse 111
ERATOSTHENES (Ἐρατοσθένης) 13
EUDOXOS (Εὔδοξος) 8, 61
EUKLID (Εὐκλείδης) 8, 12, 34, 45, 57ff., 73, 81, 90, 98ff., 110f., 125, 144ff., 190, 195
EUKLID VON MEGARA 45
EULER 78, 101, 129
extrapolieren 196
Extremalstelle 192
Extremum 192

Faktorisierungssatz 106
Fakultät 17
Feigenbaumdiagramm 182
Fehler 198
Feldmesser 34
FERMAT 172, 190ff.
Fixzahl 181
Flächenanlegung 110, 169
Flussdiagramm 40
focus 169
Frequenz 50
FRIDERICUS 62, 67f.

GALILEI 28, 144, 175
GAR 47
GAUSS 21
geltende Ziffer 46
GEMMA FRISIUS 44
Geometria Culmensis 34
geometrisches Mittel 45
GERHARD VON CREMONA 34, 61, 63, 67f., 90, 169
Gewinnumformung 66
gleichmächtig 28
Gleichung 73
~ dritten Grades 125
~ zweiten Grades 72
~, biquadratische 122
~, kubische 125
~, reziproke 1. Art 129
~, reziproke 2. Art 132
~ssystem 134
~~, überbestimmtes 140
~~, unterbestimmtes 140
GOETHE 9
goldener Schnitt 98ff.
GOLDSCHEIDER 25
Grad 73
GRAMMATEUS 73
Griechen 13, 34, 58

harmonisches Mittel 45
Harpedonapten 73
HERON (Ἥρων) 46f., 125
HERTZ 50
HIPPARCH (Ἵππαρχος) 73
HIPPASOS (Ἵππασος) 45, 58f.
HOECKE 90
HOLTZMANN 99
HORCH 73
Hyperbel 112
Hz 50

IAMBLICHOS (Ἰάμβλιχος) 58, 73
IBN AL-HAITAM 169
Inder 34f., 57, 67, 73, 87, 90
INITIUS ALGEBRAS 35

inkommensurabel 58
interpolieren 196
Intervallschachtelung 16
-sverfahren 38
irrational 63
Irrationalzahl 15, 58ff.
ISOKRATES (Ἰσοκράτης) 73
Isolieren 65
Iterationsverfahren 38, 40

JOHANNES DE SACRO BOSCO 34, 45, 146
JORDANUS NEMORARIUS, auch SAXO 34, 195
JUSTINIAN 144

Kaaba 125
KASSITEN 136, 139f.
KEPLER 45, 99f., 169
Klammer 35
KLÜGEL 45
kommensurabel 59
Königsweg 1, 8, 144
Konstante 72
KOPPE 35
Körper 24
Kreuzer 102
KROLL 100
kubische Gleichung 125

LAGRANGE 130
latus 34f.
LEIBNIZ 72
LEON (Λέων) 189
LEONARDO DA VINCI 59, 99
LEONARDO VON PISA 35, 62f., 73, 79, 82, 94, 122, 124, 138
lineares Glied 72
Linearfaktoren 106
LORENZ 99
Lösungsformel 83ff., 86

Mächtigkeit 26
mäl 67, 90, 95
Mathematikoi 60
Maximum 190, 192
MELA 159
MELANCHTHON 142
MENAICHMOS (Μέναιχμος) 1, 8, 144, 168
Menge 25
Menon 10, 190
Minimum 190, 192
Mittel 45
Monotoniegesetz des Radizierens 53
mula 34f.

NEUPLATONIKER 9
NIKOMACHOS (Νικόμαχος) 34
normal 145
Normalform 72
Normalparabel 145

Nullstelle 176

obolos 31, 67
OHM 99f.
OUGHTRED 84

PACIOLI 57, 59, 99, 144
PAPPOS (Πάππος) 169
Papyrus Moskau 35, 78
Papyrus Rhind 72
Parabel 110, 144f., 165, 168
-methode 186
Paraboloid 168
Paradoxie 29
partielles Radizieren 52
Passante 149
Pentagramm 9, 58
Pentalpha 9
Philosoph 58
PLATO VON TIVOLI 90
PLATON (Πλάτων) 8, 10, 58, 60, 99, 144, 189
Polynomdivision 126
Practica Arithmeticae 141
PRESTET 73
PROKLOS (Πρόκλος) 8, 189
Proportion 45
-, stetige 45, 99, 141
PTOLEMAIOS I. (Πτολεμαῖος) 8
PYTHAGORAS (Πυθαγόρας) 58,73
PYTHAGOREER (Πυθαγόρειοι) 9, 13, 58ff., 73, 99, 110, 125,145

Quadratfunktion 145
quadratische Ergänzung 80f., 164, 186
- Funktion 145
- Gleichung 72f.
--, Lösungsformel 85
-s Glied 72
Quadratverdopplung 10ff.
Quadratwurzel 33
quinta essentia 33

Radikand 34f.
radix 34, 90
radizieren 34f.
RAMUS 35, 99
Rationalmachen 52
reell 21
-e Zahlen 21
--, Rechengesetze 22
REINAUD 42
rein quadratisch 74
relativer Fehler 198
RIES 35
ROBERT VON CHESTER 90
ROMANUS 128
ROOMEN 128
RUDOLFF 35, 127
runde Klammern 35

SAARINEN 185
SALOMO 9
Satz von VIETA 71, 102f.
SAVASORDA 90
Schablone 145
Scheitel 146
Scheitelform 172
SCHEYBL 35, 45
SCHMID 99
SCHREYBER 73
sectio aurea 100
- divina 99f.
Seilverknüpfer 73
Sekante 149
SELEUKIDEN 48
Sexagesimalsystem 47ff.
Siegel Salomonis 9
SKT 362 137
SKT 363 138
SOKRATES (Σωκράτης) 10, 45, 58
STEINER 26
stetige Proportion 45, 99, 141
- Teilung 99
STEVIN 91
STIFEL 35, 57, 62f., 67, 90ff., 121, 124, 127f., 140ff.
STOBAIOS (Στοβαῖος) 8
Streckung 165
Stromboli 159
Struktogramm 40
STURM 146
Substitution 119
SULAIMAN 144
surdus 35, 63
Susa 140
SYLVESTER 84

Tangente 149
TARTAGLIA 35, 128, 144
teilweises Wurzelziehen 52
Tetradrachme 61
THALES (Θαλῆς) 73
THEAITETOS (Θεαίτητος) 58, 61, 63
Theätet 58
THEODOROS (Θεόδωρος) 58, 63
Timaios 99

überabzählbar 29
überbestimmt 140
umkehrbar 153
Umkehrfunktion 153
unterbestimmt 140

VAT 6598 46ff.
VAT 6599 127
VAT 7528 137
VAT 8390 136
VAT 8512 137
VERGIL 144, 194
VIETA, Satz von 71, 102f., 105
VIÈTE 35, 71, 103ff., 125, 128

WALLIS 172, 196
WEBER 24

WEIERSTRASS 25
WIDMANN VON EGER 35, 45
WOLFF 73, 100, 122, 125, 169
Würfelverdopplung 12
Wurfparabel 144, 174
Wurzel 34
-funktion 152
-gleichungen 64, 117
-zeichen 34

XYLANDER 99

YBC 4668 140
YBC 4697 139
YBC 7289 48f.

Zahlenkörper 24
ZEISING 100
Zeitgleichung 199
ZEUTHEN 73
Ziffer, geltende 46

Bildnachweis

Alinari, Mailand: 32.1 – Bayerische Staatsbibliothek, München: 59.1, 68.1, 71.1, 91.1, 93.1, 104.2, 141.1, 141.2, 169.1, 191.1 – Bekemeier, Bernd: Martin Ohm (1792–1872): Universitäts- und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform, Göttingen 1987: 99.1 – Bolzano B.: Gesamtausgabe, Stuttgart/Bad Cannstatt 1975: 29.1 – British Museum, London: 88.1 – David, Florence Nightingale: Games, Gods and Gambling, London 1962: 129.1 – Deutscher Kunstverlag, München Berlin: 10.1 – Deutsches Museum, München: 84.1, 104.1, 143.1, 175.1, 192.1 – Fueter, Rudolf: Leonhard Euler, Beiheft Nr. 3 zur Zeitschrift Elemente der Mathematik, 1948: 101.1 – Haller, Rudolf: 159.1 – Klett Verlag: 185.1 – Kowalewski, Gerhard: Große Mathematiker, Berlin 1938: 130.1 – Kraay, Colin M.: Archaic and classical Greek coins, London 1976: 61.1 rechts – Kunsthistorisches Museum, Wien: 60.1 – May, John M. F.: The coinage of Abdera (549–345 B.C.), London 1966: 61.1 links, 62.1 – Menninger, Karl: Zahlwort und Ziffer, Göttingen 1958: 31.1 – Meschkowski, Herbert: Probleme des Unendlichen; Braunschweig 1967: 26.1 – Neugebauer, Otto: Mathematische Keilschrifttexte, Berlin 1935–1937: 48.1 – Neugebauer, Otto und Abraham Joseph Sachs: Mathematical cuneiform texts, New Haven 1945: 49.1 – Paccard, André: Le Maroc et l'artisanat traditionnel islamique dans l'architecture, Band 1, Saint-Jorioz 1974: 9.1 – Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **33**, Paris 1936: 86.1, 89.1 – Schweizer Bundesinstitut für Technologie, Zürich: 24.1 – Universität Leipzig: 70.1 – Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat, Toulouse 1679: 192.1 – Wohlwill, Emil: Die Entdeckung der Parabelform der Wurflinie, in Zeitschrift für Mathematik und Physik, Suppl. 14, Leipzig 1899: 174.1 – Thüringisches Hauptstaatsarchiv Weimar (Reg Ii 572, Bl. 1^b): 142.2 / Unterschrift

ISBN 3-486-11296-1
9 783486 112962
Bestell-Nr. **11296**-1

Oldenbourg

Barth · Federle · Haller

Algebra

9